CORRIGÉ MINES-PONTS MP MATH 1

Première partie $\boxed{14}$

(1)

$$I_n = \int_0^n \ln(x+n+1) - \ln(x+1)\ \mathrm{d}x = (2n+1)\ln(2n+1) - 2(n+1)\ln(n+1) \qquad \boxed{2}$$

(2)

$$I_n = (2n+1)\left[\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - 2(n+1)\left[\ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$
$$= 2n\ln 2 - \ln n + \ln 2 - 1 - \frac{3}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \qquad \boxed{4}$$

(3) Pour i et j entiers naturels (non nuls dans l'inégalité de droite), on a par monotonie :

$$\int_i^{i+1}\int_j^{j+1} \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{x+y+1} \leqslant \frac{1}{i+j+1} \leqslant \int_{i-1}^{i}\int_{j-1}^{j} \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{x+y+1}$$

On somme l'inégalité de gauche pour i et j variant de 0 à $n-1$, et l'inégalité de droite pour i et j variant de 1 à $n-1$, puis on rajoute à droite les termes $(i=0, 1 \leqslant j \leqslant n-1)$, $(j=0, 1 \leqslant i \leqslant n-1)$ et $(i=0, j=0)$, ce qui donne l'encadrement :

$$I_n \leqslant S_n \leqslant I_{n-1} + 1 + 2\left(\frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n}\right) \leqslant I_n + 1 + 2\left(\frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n}\right). \qquad \boxed{4}$$

(4) $\frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n}$ est équivalent à $\ln n$ (théorème de comparaison série-intégrale), et (cf. **2.**) $I_n \sim 2n\ln 2$, donc $\dfrac{S_n}{2n\ln 2} \to 1$, soit $S_n \sim 2n\ln 2$. . . . . $\boxed{2}$

(5) On développe le carré, ce qui donne une somme double finie que l'on échange avec l'intégrale :

$$J_n = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n-1} \int_0^1 x^{i+j}\ \mathrm{d}x = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n-1} \frac{1}{i+j+1} = S_n \sim 2n\ln 2 \qquad \boxed{2}$$

Seconde partie $\boxed{54}$

(6) Si $(x_1, \dots x_n)$ est une base orthonormée de E, alors $\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ pour tout n-uplet $(a_1, \dots a_n)$, donc $(x_1, \dots x_n)$ est une suite 1-presque orthogonale. . . . . $\boxed{1}$
Inversement, si cette suite finie est 1-presque orthogonale, alors

$$\forall (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|^2 = \sum a_i^2.$$

Pour i et j distincts, on prend $a_i = a_j = 1$ et les autres a_k nuls, ce qui donne

$$\|x_i + x_j\|^2 = 2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 + 2(x_i|x_j)$$

d'où $(x_i|x_j) = 0$, donc $(x_1, \dots x_n)$ est une famille orthonormale donc libre (cf. question **7.**) de n vecteurs en dimension n, c'est par conséquent une base orthonormée de E. $\boxed{4}$

(7) Supposons $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$. On calcule sa norme au carré et on utilise l'hypothèse ii, pour obtenir $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$, donc tous les a_i sont nuls, et la famille est libre. . . . . $\boxed{2}$

(8) Si la suite (P_n) est μ-presque orthogonale,

$$\frac{1}{\mu}\ln(2n-1) = \frac{1}{\mu}\int_0^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{2x+1} \leqslant \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1} \leqslant \left\|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}P_k\right\|^2$$
$$\leqslant \mu\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1} \leqslant \mu\left(\int_0^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{2x+1}+1\right) = \mu\left(1+\frac{\ln(2n-1)}{2}\right)$$

On reconnaît au milieu l'intégrale J_n, d'où $\dfrac{J_n}{n} \leqslant \dfrac{\mu}{n}\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{k} \sim \mu\dfrac{\ln(2n)}{n}$, soit $\dfrac{J_n}{n} \to 0$, ce qui est en contradiction avec le résultat trouvé à la question 5. . . . . $\boxed{6}$

(9) Avec les notations de l'énoncé, ${}^tAMA = \sum_{i,j} a_i a_j (V_i|V_j) = \|\sum_i a_i V_i\|^2$.
Supposons $MA = 0$, alors ${}^tAMA = 0$, or la famille $(V_1, \ldots V_n)$ est libre donc $A = 0$, d'où M est inversible. . . . . $\boxed{2}$
M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée, donc il existe P orthogonale et D diagonale sans aucun coefficient diagonal nul tels que $M = {}^t PDP$. $\boxed{1}$

(10) $\|W\|^2 = \sum_{i,j} a_i a_j (V_i|V_j) = {}^t AMA$. . . . . $\boxed{1}$

(11) $\|W\|^2 = {}^t (PA)D(PA) = \sum_i \lambda_i b_i^2$, en notant $(b_1, \ldots b_n)$ le vecteur PA et $(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ les éléments diagonaux de D. Cette quantité est strictement positive pour tout vecteur W non nul, donc pour tout n-uplet $(b_1, \ldots, b_n)$ non nul (car P est inversible). Il en résulte facilement que tous les λ_i sont strictement positifs. . . . . $\boxed{2}$
Si α est la plus petite valeur propre de M et β la plus grande, on en déduit l'encadrement

$$\sqrt{\alpha}\|B\| \leqslant \|W\| \leqslant \sqrt{\beta}\|B\|. \qquad \boxed{2}$$

(12) P étant orthogonale, $\|B\| = \|A\|$, i.e $\sum_i b_i^2 = \sum_i a_i^2$. On choisit $\mu \geqslant \max(\beta, \frac{1}{\alpha})$. La question précédente conduit donc à l'encadrement $\frac{1}{\mu}\sum_i a_i^2 \leqslant \|W\|^2 \leqslant \mu\sum_i a_i^2$, donc $(V_1, \ldots, V_n)$ est μ-presque orthogonale. . . . . $\boxed{3}$

(13) On va démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute suite $(k_1, \ldots k_n)$ convenable, les valeurs propres de la matrice $M = \big((V_{k_i}|V_{k_j})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont comprises entre $\dfrac{\alpha-3}{\alpha-1}$ et $\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$.
Soit λ une telle valeur propre et $(x_1, \ldots x_n)$ un vecteur propre associé. On a donc $\forall i,\ \lambda x_i = x_i + \sum_{j\neq i} m_{ij}x_j$. Choisissons l'entier i tel que $|x_i|$ soit maximal, donc strictement positif.

$$|\lambda - 1||x_i| \leqslant \sum_{j\neq i}\frac{1}{\alpha^{|k_j-k_i|}}|x_i| \leqslant |x_i|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2}{\alpha^p}$$

car les indices k_j sont deux à deux distincts et supérieurs ou égaux à 1 donc pour tout entier p, il ne peut y avoir au plus que 2 valeurs de j telles que $|k_i - k_j| = p$. En simplifiant, il vient $|\lambda - 1| \leqslant \dfrac{2}{\alpha-1}$, or λ est réel, d'où l'encadrement voulu.
Or $\alpha > 3$, donc 0 n'est pas valeur propre de M, donc la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est libre, et en utilisant la question 12, pour tout n-uplet convenable $(k_1, \ldots k_n)$, la suite $(V_{k_1}, \ldots V_{k_n})$ est μ-presque orthogonale, avec $\mu \geqslant \left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)2$ et $\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha-3}\right)$, d'où un choix de μ indépendant

de l'entier n, ce qui achève de montrer que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est presque orthogonale. $\boxed{7}$
On peut proposer une démonstration plus directe :
On a $\left\|\sum\limits_{p=1}^{n} a_p V_p\right\|^2 = \underbrace{\sum\limits_{p=1}^{n} a_p^2}_{A} + \underbrace{\sum\limits_{p\neq q} a_p a_q (V_p|V_q)}_{B}$. Majorons $|B|$:

$$\begin{aligned}|B| &\leqslant \sum_{p\neq q} |a_p|.|a_q| \frac{1}{\alpha^{|p-q|}} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{p\neq q}(a_p^2+a_q^2)\frac{1}{\alpha^{|p-q|}}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{p\neq q} a_p^2 \frac{1}{\alpha^{|p-q|}} + \frac{1}{2}\sum_{p\neq q} a_q^2\frac{1}{\alpha^{|p-q|}} = \sum_{p\neq q} a_p^2 \frac{1}{\alpha^{|p-q|}}\\ &\leqslant \sum_{p=1}^{n} a_p^2 \left(\sum_{q=1,q\neq p}^{n} \frac{1}{\alpha^{|p-q|}}\right) \leqslant A2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\alpha^i}\end{aligned}$$

Or $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{\alpha^i} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{\alpha^i} = \dfrac{1}{\alpha-1}$ soit $|B| \leqslant \dfrac{2}{\alpha-1}A$ d'où l'encadrement

$$A\frac{\alpha-3}{\alpha-1} = A\left(1-\frac{2}{\alpha-1}\right) \leqslant \left\|\sum_{p=1}^{n} a_p V_p\right\|^2 \leqslant A\left(1+\frac{2}{\alpha-1}\right) = A\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$$

et on prend $\mu = \max\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}, \dfrac{\alpha-1}{\alpha-3}\right)$.

(14) $x \mapsto f(x,1)$ a pour dérivée $\dfrac{\sqrt{3}(1-x)}{\sqrt{2x+1}(2+x)^2}$ qui est négative. . . . . $\boxed{1}$
$y \mapsto f(1,y) = 1$.
$G : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ a pour dérivée $\dfrac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$ qui est négative. . . . . $\boxed{1}$
$y \mapsto \lim_{x\to\infty} f(x,y) = 0$.
$f_y : x \mapsto f(x,y)$ a pour dérivée $\dfrac{y^2\sqrt{2y+1}(1-x)}{(y+xy+1)^2\sqrt{2xy+1}}$ qui est négative. . . . . $\boxed{1}$
$f_x : y \mapsto f(x,y)$ a pour dérivée $\dfrac{-y(1-x)^2}{\sqrt{2y+1}\sqrt{2xy+1}(y+xy+1)^2}$ qui est négative. . . . $\boxed{2}$
Toutes les fonctions étudiées sont donc décroissantes (et parfois constantes).

(15) f_y est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]\lim_{x\to+\infty} f_y, f_y(1)] =]0,1]$, donc γ possède un antécédent noté $\varphi_\gamma(y)$, i.e $f(\varphi_\gamma(y),y) = \gamma$. . . . . $\boxed{2}$
G est continue strictement décroissante, donc est une bijection de $]1,+\infty[$ dans $]0,1[$, d'où l'existence de $\beta > 1$ tel que $G(\beta) = \gamma$. . . . . $\boxed{2}$
f_x étant décroissante, $G(x) \leqslant f(x,y)$, donc $G(\varphi_\gamma(y)) \leqslant f(\varphi_\gamma(y),y) = \gamma = G(\beta)$, donc $\varphi_\gamma(y) \geqslant \beta$ pour tout y. . . . . $\boxed{2}$

(16) Si $\mu = 1$, alors d'après 6, la suite (Q_i) est orthonormale, or

$$(Q_i|Q_j) = \frac{\sqrt{2k_i+1}\sqrt{2k_j+1}}{k_i+k_j+1} > 0$$

contradiction. . . . . $\boxed{2}$
Si $k_i = 0$ alors on a $k_{i+1} \geqslant \beta k_i$ pour tout β. . . . . $\boxed{1}$
On suppose maintenant que $k_i > 0$.

La μ-presque orthogonalité s'écrit

$$\forall (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n},\ \frac{1}{\mu}\sum_i a_i^2 \leqslant \sum_{i,j} a_i a_j \frac{\sqrt{2k_i+1}\sqrt{2k_j+1}}{k_i+k_j+1} \leqslant \mu \sum_i a_i^2$$

En appliquant cette double inégalité pour $n = 2$, avec $a_{i+1} = -a_i = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ on obtient finalement

$$\frac{1}{\mu} \leqslant 1 - \frac{\sqrt{2k_i+1}\sqrt{2k_{i+1}+1}}{k_i+k_{i+1}+1} \leqslant \mu.$$

On pose alors $\theta_i = \dfrac{k_{i+1}}{k_i}$. On pose $\gamma = 1 - \dfrac{1}{\mu} \in]0,1[$. . . . . $\boxed{6}$

Alors la condition s'écrit $\forall i,\ f(\theta_i, k_i) \leqslant \gamma = f(\varphi_\gamma(k_i), k_i)$ d'où $\theta_i \geqslant \varphi_\gamma(k_i)$. D'après **15.**, il existe β tel que $G(\beta) = \gamma$ et dans ce cas $\varphi_\gamma(y) \geqslant \beta$ pour tout y, d'où $\theta_i \geqslant \beta$.

En conclusion, $k_{i+1} \geqslant \beta k_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. . . . . $\boxed{3}$