PROPRIÉTÉS QUALITATIVES DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Introduction

Ce problème présente des techniques permettant d'étudier les solutions d'équations différentielles en général non linéaires, sans connaître explicitement ces solutions. Par conséquent, on ne cherchera pas à résoudre les équations différentielles qui apparaîtront au fil de l'épreuve, sauf si cela est demandé. Rappelons que, dans le cas d'une équation différentielle non linéaire, l'intervalle de définition d'une solution est lui aussi inconnu.

Définitions et notations

Pour tout entier $m > 0$, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ du produit scalaire usuel

$$(x|y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i y_i \ ;$$

la norme associée est notée $\|x\|$; on note $B_f(x_0, R)$ la boule fermée de centre $x_0 \in \mathbb{R}^m$ et de rayon R.

Soient U une partie ouverte de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, et f une application de U dans $\mathbb{R}^m$. On dit que l'application $u\ : I \to \mathbb{R}^m$ est une solution de l'équation différentielle

$$x' = f(t, x) \tag{E}$$

si

a) I est un intervalle non trivial (ni vide, ni réduit à un point) de la droite réelle $\mathbb{R}$,
b) u est une application dérivable de I dans $\mathbb{R}^m$,
c) pour tout $t \in I$, on a $(t, u(t)) \in U$ et $u'(t) = f(t, u(t))$.

Soient $u_1\ : I_1 \to \mathbb{R}^m$ et $u_2\ : I_2 \to \mathbb{R}^m$ deux solutions de (E) ; on dit que u_1 est une *restriction* de u_2 si $I_1 \subset I_2$ et si, pour tout $t \in I_1$, on a $u_1(t) = u_2(t)$. On dit aussi que u_2 est un *prolongement* de u_1, ou encore que u_2 *prolonge* u_1.

Une solution de (E) est dite *maximale* si elle n'admet pas d'autre prolongement qu'elle-même.

De manière générale $\mathcal{C}^n(X, Y)$ désigne l'ensemble des applications de X dans Y de classe $\mathcal{C}^n$, lorsque cela a un sens.

On dit que l'application f est *localement lipschitzienne* en x si, pour tout point (t_0, x_0) de U, il existe deux nombres réels ε et k tous deux > 0 et tels que :

a) l'ensemble $C = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]\times B_f(x_0, \varepsilon)$ soit inclus dans U,
b) si (t, x_1) et (t, x_2) sont deux points de C, on ait $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant k\|x_1 - x_2\|$.

On rappelle qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$ est localement lipschitzienne en x.

Les deux premières parties n'utilisent pas le théorème de Cauchy-Lipschitz, contrairement aux autres parties. L'énoncé de ce théorème est donné au début de la troisième partie.

Partie I

Soit q un nombre réel $\geqslant 0$ et soit u une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$; pour $t \in \mathbb{R}$, on écrit $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$. On suppose que la fonction u satisfait sur $\mathbb{R}$, aux égalités

$$\begin{cases} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -u_1 - q u_1^3. \end{cases}$$

L'existence d'une telle application u est admise ici.

I.1. Démontrer que u est solution d'une équation différentielle du type (E) en précisant bien quelle est l'application f.

I.2. Pour $q = 0$, déterminer l'application u et démontrer que l'image de l'arc $t \mapsto u(t)$ est un cercle. Représenter ceci sur un dessin, en n'oubliant pas de mentionner le sens de parcours.

I.3. Supposons $q > 0$.

a. Démontrer qu'il existe un nombre réel p tel que l'image de u soit incluse dans la courbe
$$C_p = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + \frac{q}{2}x_1^4 + x_2^2 = p\}.$$

b. Démontrer que p est $\geqslant 0$. Que dire de u si $p = 0$?
On suppose désormais $p > 0$.

c. Représenter sommairement la courbe C_p dans un repère orthonormé du plan. Les tangentes aux points où la courbe C_p coupe les axes du repère doivent apparaître sur le dessin.

d. Démontrer qu'il existe 2 fonctions $\rho, \theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\rho > 0$, telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait
$$u_1(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \text{ et } u_2(t) = \rho(t)\sin\theta(t).$$

e. Calculer $\theta'(t)$ en fonction de ρ et θ, et en déduire que la trajectoire de u est exactement la courbe C_p.

Partie II : Barrières

Dans cette partie, on considère une partie ouverte U de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ localement lipschitzienne en x. On note toujours (E) l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.

II.1. Soient a, b et K des nombres réels, avec $a < b$, et soit $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable satisfaisant à $h(a) = 0$ et $h' \leqslant Kh$. Démontrer que h est $\leqslant 0$ [on pourra par exemple chercher une fonction φ telle que $(h' - Kh)\varphi$ soit la dérivée d'une fonction simple].

II.2. *Lemme de la barrière inférieure* : On suppose que I est un intervalle réel non trivial et $\alpha : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que, pour tout $t \in I$, le point $(t, \alpha(t))$ appartienne à U et que l'on ait l'inégalité
$$\alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t)).$$
On dit alors que α est *barrière inférieure* de l'équation (E) sur l'intervalle I.
Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une solution de (E) et $t_0 \in I \cap J$. On suppose que $\alpha(t_0) \leqslant u(t_0)$ et on veut montrer que $\alpha(t) \leqslant u(t)$ pour $t \geqslant t_0$, $t \in I \cap J$. On suppose que cela est faux par l'absurde.

a. Démontrer qu'il existe t^* et t_1 dans $I \cap J$ tels que $t_0 \leqslant t_1 < t^*$ et que l'on ait
$$u(t_1) = \alpha(t_1) \text{ et } u(t) < \alpha(t) \text{ pour } t_1 < t \leqslant t^*.$$

b. Établir l'existence de $t_2 \in]t_1, t^*]$ et d'un réel $C \geqslant 0$ tels que, pour tout $t \in [t_1, t_2]$, on ait
$$|f(t, \alpha(t)) - f(t, u(t))| \leqslant C|\alpha(t) - u(t)|.$$

c. En déduire que l'on a $\alpha' - u' \leqslant C(\alpha - u)$ sur $[t_1, t_2]$. Trouver alors une contradiction et conclure.

II.3. *Exemple* : Prenons dans cette question $U = \mathbb{R}^2$ et $f(t, x) = x^2 + (\sin tx)^2$.

a. Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application α de $]-\infty, \lambda[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\alpha(t) = 1/(\lambda - t)$ est une barrière inférieure de (E).

b. En déduire que, si $u : I \to \mathbb{R}$ est une solution de (E) et s'il existe un nombre réel t_0 tel que $u(t_0) > 0$ alors l'intervalle I est majoré.

II.4. De façon analogue, énoncer et démontrer le lemme de la barrière supérieure.

II.5. *Unicité*

a. Déduire des résultats précédents que, si $u_1 : J_1 \to \mathbb{R}$ et $u_2 : J_2 \to \mathbb{R}$ sont deux solutions de (E) et s'il existe un nombre réel $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, alors $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \cap J_2$.

b. Nous allons démontrer par un exemple que l'unicité est fausse lorsque l'on ne suppose plus la fonction f localement lipschitzienne en x. Posons $U = \mathbb{R}^2$ et prenons pour f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t, x) = \sqrt{|x|}$.

i) Prouver que la fonction f est continue. Est-elle localement lipschitzienne ?

ii) Décrire toutes les solutions strictement positives de (E).

iii) Raccorder de telles solutions avec la fonction nulle pour construire deux solutions de (E) qui coïncident en un point mais pas en tout point.

Partie III : Entonnoirs et anti-entonnoirs

Dans la suite du problème, on admet le *théorème de Cauchy-Lipschitz* :

Soient U une partie ouverte de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ et $f \in \mathcal{C}^0(U,\mathbb{R}^m)$ une fonction localement lipschitzienne en x. Soit (t_0, x_0) un point de U ; alors

a) *l'équation différentielle* (E) *admet une solution maximale unique $u\ : I \to \mathbb{R}^m$ satisfaisant à $u(t_0) = x_0$;*

b) *son ensemble de départ I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$;*

c) *toute solution v de* (E) *telle que $v(t_0) = x_0$ est une restriction de u.*

Dans cette partie, on prend $m = 1$ et on prend pour U le produit $]a, b[\times]c, d[$, où a, b, c, d désignent des nombres réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et satisfont à $a < b$ et $c < d$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$ une fonction localement lipschitzienne en x. On note toujours (E) l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.

III.1. Soient p et q des nombres réels tels que $p < q$, et soit $g\ :]p, q[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est bornée. Démontrer que la fonction g admet une limite finie en q.

III.2. *Théorème de l'entonnoir.*

Soit $I \subset]a, b[$ un intervalle non trivial et soient $\alpha, \beta\ : I \to]c, d[$ des applications dérivables telles que, pour tout $t \in I$, on ait

$$\alpha(t) \leqslant \beta(t), \quad \alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t)) \text{ et } f(t, \beta(t)) \leqslant \beta'(t).$$

Dans cette situation, on dit que l'ensemble $\Delta = \{(t, x) \mid t \in I \text{ et } \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t)\}$ est un entonnoir de (E) sur l'intervalle I. Nous allons établir que les solutions qui entrent dans un entonnoir s'y trouvent piégées.

Soit $u\ : J \to \mathbb{R}$ une solution *maximale* de (E) et soit t_0 un point de J tel que $(t_0, u(t_0))$ appartienne à l'ensemble Δ.

a. Démontrer que $(t, u(t))$ appartient à Δ pour tout $t \geqslant t_0$ appartenant à $I \cap J$.

b. Démontrer que l'intervalle $I \cap [t_0, +\infty[$ est contenu dans J.

III.3. *Exemple* : On prend $U = \mathbb{R}^2$. On pose

$$f(t, x) = t - x + g(t, x),$$

où $g \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ est une fonction qui satisfait à $\begin{cases} g(t,x) \geqslant 1 & \text{pour } x < t \\ g(t,x) \leqslant 1 & \text{pour } t < x. \end{cases}$

a. Démontrer que, pour tout nombre réel $\lambda > 0$, les fonctions α et β définies par $\alpha(t) = t - \lambda e^{-t}$ et $\beta(t) = t + \lambda e^{-t}$, définissent un entonnoir sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que toute solution maximale de (E) est définie sur un intervalle non majoré et admet une asymptote en $+\infty$.

Voici une nouvelle définition : Soit $I \subset]a, b[$ un intervalle non trivial et soient $\alpha, \beta\ : I \to]c, d[$ des applications dérivables telles que, pour tout $t \in I$, on ait

$$\beta(t) \leqslant \alpha(t), \quad \alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t)) \text{ et } f(t, \beta(t)) \leqslant \beta'(t).$$

L'ensemble $A = \{(t, x) \mid t \in I \text{ et } \beta(t) \leqslant x \leqslant \alpha(t)\}$ est appelé un *anti-entonnoir* de l'équation (E) sur l'intervalle I.

III.4. *Un résultat d'unicité* : On se donne un tel anti-entonnoir A, en supposant de plus que l'extrémité droite de l'intervalle I est le point b, que $\alpha(t) - \beta(t) \to 0$ quand $t \to b$ avec $t < b$, et enfin que la fonction f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ positive ou nulle sur A.

Démontrer qu'il existe au plus une solution u de (E) sur I telle que $(t, u(t))$ appartienne à l'ensemble A pour tout $t \in I$.

III.5. *Un résultat d'existence* : Dans cette question, A est un anti-entonnoir sur I, défini comme ci-dessus par des fonctions α et β, et on suppose que l'extrémité droite de l'intervalle I est le point b. Nous allons établir l'existence d'une solution u de (E) sur I telle que $(t, u(t))$ appartienne à l'ensemble A pour tout $t \in I$. Pour cela considérons une suite strictement croissante $(t_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de I ayant pour limite b.

a. Pour toute application u de J dans $\mathbb{R}$, on note $-J$ l'intervalle constitué des nombres réels t tels que $-t \in J$, et on définit l'application $\widehat{u} : -J \to \mathbb{R}$ par la formule $\widehat{u}(t) = u(-t)$. Démontrer que u est solution de (E) si et seulement si $\widehat{u}$ est solution d'une équation différentielle $(\widehat{\mathrm{E}})$ $x' = \tilde{f}(t,x)$ où $\tilde{f}$ est une fonction que l'on précisera.

b. Vérifier que $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}$ définissent un entonnoir de l'équation $(\widehat{\mathrm{E}})$ sur l'intervalle $-I$.

c. Déduire de l'étude des entonnoirs l'existence, pour chaque entier $n \geqslant 1$, de deux solutions u_n, v_n de (E), définies sur $[t_0, t_n]$ et telles que

$$u_n(t_n) = \alpha(t_n) \text{ et } v_n(t_n) = \beta(t_n).$$

d. Prouver que la suite $(u_n(t_0))_n$ est décroissante, que la suite $(v_n(t_0))_n$ est croissante, et que l'on a $v_n(t_0) \leqslant u_n(t_0)$ pour tout $n \geqslant 1$.

e. En déduire l'existence d'un nombre réel x_0 tel que $v_n(t_0) \leqslant x_0 \leqslant u_n(t_0)$ pour tout $n \geqslant 1$.

f. Considérer l'unique solution maximale u de (E) telle que $u(t_0) = x_0$ et prouver l'existence annoncée.

Partie IV : Périodicité

Pour $t \in]0, +\infty[$, on dit qu'une application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ est T-périodique si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $h(t+T) = h(t)$.

Dans cette partie, on prend $U = \mathbb{R} \times]c,d[$ et on suppose l'application $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ localement lipschitzienne en x. De plus, on suppose que l'on a

$$\forall (t,x) \in U,\ f(t,x) = f(t+T, x),$$

où T est un nombre réel > 0 donné.

IV.1. Donner un exemple très simple d'une telle fonction f pour laquelle aucune solution de (E) n'est périodique.

IV.2. Soit $u : J \to \mathbb{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle (E).

a. Vérifier que l'application v définie par $v(t) = u(t+T)$ est aussi une solution de (E) sur un intervalle à préciser.

b. En déduire que, s'il existe un nombre réel $t_0 \in J$ tel que $t_0 + T \in J$ et $u(t_0 + T) = u(t_0)$ alors u est T-périodique et $J = \mathbb{R}$.

Définissons une application P (*une période plus tard*) de la façon suivante : Pour chaque $z \in]c,d[$, notons $\gamma_z : I_z \to \mathbb{R}$ l'unique solution maximale de (E) telle que $\gamma_z(0) = z$. On pose

$$D = \{z \in]c,d[\mid T \in I_z\}$$

et on note P l'application de D dans $\mathbb{R}$ définie par $P(z) = \gamma_z(T)$.

IV.3. Donner un exemple d'équation différentielle $x' = f(t,x)$ où $f(t+T, x) = f(t,x)$ pour tout $(t,x) \in U$, $T > 0$ et où $D = \emptyset$.

On suppose dans la suite de cette partie que $D \neq \emptyset$ et non réduit à un point.

IV.4. Démontrer que, pour $z \in]c,d[$, γ_z est T-périodique si et seulement si $z \in D$ et $P(z) = z$.

IV.5. Démontrer que

a. l'ensemble D est un intervalle de $\mathbb{R}$,

b. l'application P est strictement croissante,

c. l'ensemble $P(D) = \{P(z) \mid z \in D\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$,

d. l'application P est continue.

IV.6. *Exemple* : Prenons $f(t,x) = \sin t + 2\cos x$ et $T = 2\pi$. Posons $u = \gamma_0$ et $v = \gamma_{-\pi}$.

a. Établir que les applications u et v sont bien définies sur $[0, 2\pi]$ [on pourra construire un entonnoir à l'aide de fonctions du type $t \mapsto \pm 3t + \lambda$].

b. Vérifier que la fonction nulle est une barrière inférieure de (E) sur $[0, 2\pi]$; en déduire que $u(2\pi) \geqslant 0$. Démontrer par un raisonnement similaire que $v(2\pi) \leqslant -\pi$.

c. Démontrer qu'il existe $z \in [-\pi, 0]$ tel que $P(z) = z$.

d. En déduire que (E) admet au moins une solution 2π-périodique.

e. Démontrer que (E) admet une infinité de solutions 2π-périodiques.

Partie V : Applications

Soient a_1 et a_2 des nombres réels tels que $0 < a_1 < a_2$ et soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Pour $x = (x_1, x_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, on écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. On note B l'ensemble des points (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x_1 = \rho \cos\theta$, $x_2 = \rho \sin\theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \in [a_1, a_2]$.

On fait en outre les hypothèses suivantes :

(H1) Pour x appartenant à la frontière de B dans $\mathbb{R}^2$, $f(x)$ pointe vers l'intérieur de B, ce qui signifie que, pour tout nombre réel θ, le produit scalaire $(f(a_i \cos\theta, a_i \sin\theta) | (\cos\theta, \sin\theta))$ est positif ou nul pour $i = 1$, négatif ou nul pour $i = 2$.

(H2) Le produit scalaire $(f(x_1, x_2) | (-x_2, x_1))$ ne s'annule pas sur B.

Le but de cette partie est d'établir l'existence d'une solution périodique non constante, à valeurs dans B, de l'équation différentielle (E) $x' = f(x)$.

V.1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où la condition suivante est réalisée :
(H3) Le produit scalaire $(f(x_1, x_2) | (-x_2, x_1))$ est > 0 pour tout $x \in B$.
On suppose désormais que la condition (H3) est réalisée.

V.2. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et soient $\theta\ : I \to \mathbb{R}$ et $h\ : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ deux applications dérivables. Pour $t \in I$, on pose

$$u_1(t) = h(\theta(t)) \cos\theta(t), \quad u_2(t) = h(\theta(t)) \sin\theta(t),$$

et on note u l'application de I dans $\mathbb{R}^2$ définie par $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$.

Démontrer que u est une solution de (E) si et seulement si l'on a, pour tout $t \in I$,

$$h'(\theta(t))\theta'(t) = g_1(\theta(t), h(\theta(t))),$$
$$\theta'(t) = g_2(\theta(t), h(\theta(t))),$$

où g_1 et g_2 sont deux applications de $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

V.3. Prouver qu'il existe des nombres réels b_1 et b_2, avec $0 < b_1 < a_1 < a_2 < b_2$, tels que la fonction g_2 soit > 0 sur $\mathbb{R}\times]b_1, b_2[$.

V.4. Pour $(\theta, \rho) \in \mathbb{R}\times]b_1, b_2[$, on pose

$$G(\theta, \rho) = \frac{g_1(\theta, \rho)}{g_2(\theta, \rho)}.$$

On considère l'équation différentielle (E') $\rho' = G(\theta, \rho)$. Puisque l'application G est de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique en θ, on peut appliquer la partie IV avec $T = 2\pi$. On continue de noter P l'application *une période plus tard*.

a. Démontrer que $[0, 2\pi]\times[a_1, a_2]$ est un entonnoir de (E').

b. Démontrer que $P([a_1, a_2])$ est contenu dans $[a_1, a_2]$.

c. En déduire que l'application P admet au moins un point fixe dans $[a_1, a_2]$, puis que l'équation (E') admet au moins une solution 2π-périodique $h\ : \mathbb{R} \to [a_1, a_2]$.

Désormais, on prend pour fonction $h\ : \mathbb{R} \to [a_1, a_2]$ une solution 2π-périodique de (E').

V.5. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(\theta) = g_2(\theta, h(\theta))$.

a. Prouver que la fonction ψ reste encadrée par deux nombres réels > 0.

b. En déduire que les solutions maximales de l'équation différentielle (E") $\theta' = \psi(\theta)$ sont toutes des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

V.6. Conclure