PROPRIÉTÉS QUALITATIVES DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, SOLUTION

Partie I $\boxed{19}$

I.1. On a bien $u' = f(t, u)$ avec $f(t, (u_1, u_2)) = (u_2, -u_1 - qu_1^3)$. . . . . $\boxed{1}$

I.2. $u_1' = u_2$ et $u_2' = -u_1$ est équivalent à $(u_1 + iu_2)' = -i(u_1 + iu_2) \Leftrightarrow u_1 + iu_2 = \lambda e^{-it}$. Avec $\lambda = Re^{i\theta}$ on obtient $u_1 + iu_2 = Re^{i(\theta - t)}$ soit $u_1 = R\cos(\theta - t)$ et $u_2 = R\sin(\theta - t)$. La courbe obtenue est un cercle de centre O, de rayon R parcouru dans le sens trigonométrique inverse. $\boxed{2}$

I.3. **a.** On remarque que $u_1u_1' + qu_1^3u_1' + u_2u_2' = (u_1 + qu_1^3)u_2 + u_2(-u_1 - qu_1^3) = 0$ donc, en intégrant on obtient $u_1^2 + \dfrac{q}{2}u_1^4 + u_2^2 = p$. . . . . $\boxed{2}$

b. $u_1^2 + \dfrac{q}{2}u_1^4 + u_2^2 = p \geqslant 0$ est immédiat.

Si $p = 0$ alors $0 \leqslant u_1^2 + u_2^2 \leqslant p = 0$ donc $u_1 = u_2 = 0$ par conséquent la fonction u est la fonction nulle. . . . . $\boxed{1}$

c. La courbe C_p présente des symétries par rapport aux deux axes de coordonnées. On peut donc limiter l'étude au cas où $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$.

On a alors $x_2 = \sqrt{p - x_1^2 - \frac{q}{2}x_1^4} = g(x_1) = \sqrt{h(x_1)}$. La racine carrée est croissante et concave, h est aussi concave donc g aussi. Si $x_2 = 0$ alors la tangente est horizontale (g' devient infinie), si $x_1 = 0$ alors $g'(0) = 0$ donc la tangente est verticale. On obtient alors une courbe qui ressemble à une ellipse étirée selon l'axe Ox_2 (pour $x_1 = 0$ on a $x_2 = \sqrt{p}$ mais $h(\sqrt{p}) < 0$ donc pour $x_2 = 0$, $x_1 < \sqrt{p}$). . . . . $\boxed{4}$

d. On utilise le théorème du relèvement : $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$ et u est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc on sait qu'il existe deux fonctions ρ et θ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$u_1(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \text{ et } u_2(t) = \rho(t)\sin\theta(t).$$ $\boxed{3}$

e. En complexes on a $u_1' + iu_2' = \rho' e^{i\theta} + i\rho e^{i\theta}\theta' = -i(u_1 + iu_2) - iqu_1^3 = -i\rho e^{i\theta} - iqu_1^3$ d'où, en multipliant par $e^{-i\theta}$ on obtient :

$$\rho' + i\rho\theta' = -i\rho - iqu_1^3 e^{-i\theta}$$

et, en prenant la partie imaginaire, $\rho\theta' = -\rho - q\rho^3\cos^3\theta\cos\theta$, soit, vu que $\rho \neq 0$, on a $\theta' = -1 - q\rho^2\cos^4\theta \leqslant -1$. . . . . $\boxed{3}$

Conclusion : $\theta' \leqslant -1$ donc $\theta(t) - \theta(0) = \displaystyle\int_0^t \theta'(u)\,du \leqslant -t$ pour $t > 0$ d'où $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\theta(t) = -\infty$, en particulier il existe $[0, T] \subset \mathbb{R}$ tel que $\theta([0, T]) = [\theta(0), \theta(0) - 2\pi]$ i.e. la trajectoire de u est exactement la courbe C_p. . . . . $\boxed{3}$

Partie II : Barrières $\boxed{26}$

II.1. On a $(he^{-Kt})' = (-Kh + h')e^{-Kt} \leqslant 0$ et $e^{-Ka}h(a) = 0$ donc la fonction $t \mapsto e^{-Kt}h(t)$ est décroissante sur $[a, b]$ et s'annule en a donc elle est $\leqslant 0$. On a alors $\forall t \in [a, b]$, $e^{-Kt}h(t) \leqslant 0$ soit $\forall t \in [a, b]$, $h(t) \leqslant 0$. . . . . $\boxed{3}$

II.2. **a.** On raisonne par l'absurde comme le suggère l'énoncé, soit $t^* > t_0$ tel que $u(t^*) < \alpha(t^*)$. On pose $F = \{t \in [t_0, t^*] \mid u(t) = \alpha(t)\}$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, $F \neq \emptyset$, F est borné, fermé car u et α sont continues.

Conclusion : F est compact, il possède donc une borne supérieure $t_1 \geqslant t_0$. Si $t_1 < t \leqslant t^*$ alors $t \notin F$ et $u(t) < \alpha(t)$ (si il existe $t' \in]t_1, t^*]$ tel que $u(t') > \alpha(t')$ alors le théorème des

valeurs intermédiaires entraîne l'existence de $t'' > t'$ avec $t'' \in F$ ce qui est impossible).
On a donc prouvé que $u(t_1) = \alpha(t_1)$ et $u(t) < \alpha(t)$ pour $t_1 < t \leqslant t^*$.................... **4**

b. On utilise l'hypothèse que f est localement lipschitzienne en x en prenant le point $(t_1, u(t_1)) = (t_1, \alpha(t_1))$. On sait alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que, pour $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon]$ et $|\alpha(t) - \alpha(t_1)| \leqslant \varepsilon$, $|u(t) - u(t_1)| \leqslant \varepsilon$ on ait $|f(t, \alpha(t)) - f(t, u(t))| \leqslant C|\alpha(t) - u(t)|$.
α et u sont continues donc il existe $\eta \leqslant \varepsilon$ positif tel que $\forall t \in [t_1, t_1 + \eta]$, $|\alpha(t) - \alpha a(t_1)| \leqslant \varepsilon$ et $|u(t) - u(t_1)| \leqslant \varepsilon$.
Pour conclure, on choisit $t_2 = t_1 = \eta$.................... **3**

c. On a ainsi $\alpha' - u' \leqslant f(t, \alpha) - f(t, u) \leqslant C|\alpha - u| = C(\alpha - u)$ sur $[t_1, t_2]$ et, grâce au **II.1**, on en déduit que $\alpha - u \leqslant 0$ sur $[t_1, t_2]$ ce qui est contradictoire.
Conclusion : $\forall t \geqslant t_0$, $t \in I \cap J$, $\alpha(t) \leqslant u(t)$.................... **2**

II.3. **a.** $\alpha'(t) = \dfrac{1}{(\lambda - t)^2} \leqslant \dfrac{1}{(\lambda - t)^2} + \sin^2 \frac{t}{\lambda - t} = f(t, \alpha(t))$ donc α est bien une barrière inférieure de (E).................... **1**

b. Soit $\lambda_0 = t_0 + \dfrac{1}{u(t_0)} > t_0$ alors $\alpha_0(t) = \dfrac{1}{\lambda_0 - t}$ est une barrière inférieure de (E) sur $]-\infty, \lambda_0[$ donc, comme $u(t_0) = \alpha(t_0)$, on sait que $\forall t \in]-\infty, \lambda_0[\cap I$, $u(t) \geqslant \alpha(t)$, en particulier $\lambda_0 \notin I$ donc I est majoré.................... **3**

II.4. *Lemme de la barrière supérieure* : Soit I est intervalle réel non trivial et $\beta\ : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall t \in I$, $(t, \beta(t)) \in U$ et tel que $\beta'(t) \geqslant f(t, \beta(t))$ et soit $v\ : J \to \mathbb{R}$ est solution de (E). Si $t_0 \in I \cap J$ et si $\beta(t_0) \geqslant v(t_0)$ alors $\forall t \geqslant t_0$, $t \in I \cap J$, on a $\beta(t) \geqslant v(t)$.................... **2**
Démonstration : on remplace f par la fonction g définie par $g(t, x) = f(t, -x)$, U par l'ensemble $U' = \{(t, x) \mid (t, -x) \in U\}$ et on pose $\alpha = -\beta$, $u = -v$. On applique alors le lemme de la barrière inférieure à α, u.................... **2**

II.5. **a.** On remarque que toute solution de (E) est à la fois barrière inférieure et supérieure donc $u_1(t_0) \leqslant u_2(t_0) \Rightarrow \forall t \in J_1 \cap J_2$, $u_1(t) \leqslant u_2(t)$ et par symétrie, $u_2(t) \leqslant u_1(t)$ soit, pour $t \in J_1 \cap J_2$, $t \geqslant t_0$, $u_1(t) = u_2(t)$.................... **1**
Si $t \leqslant t_0$, on pose $v_i(t) = u_i(-t)$, $i = 1, 2$ alors $v_i'(t) = -u_i'(-t) = -f(-t, u_i(-t)) = g(t, v_i(t))$ où $g(t, v) = -f(-t, v)$ et on utilise le résultat que l'on vient de prouver.................... **3**

b. i) f est continue en tant que composée d'applications continues. f n'est pas localement lipschitzienne car $\dfrac{|f(t, x) - f(t, 0)|}{|x|} = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} \to +\infty$ quand $x \to 0$.................... **1**

ii) Si u est une solution > 0 sur I alors

$$(E) \Leftrightarrow \forall t \in I,\ u'(t) = \sqrt{u(t)} \Leftrightarrow \forall t \in I,\ \frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I,\ \sqrt{u(t)} = \frac{t - t_0}{2},\ t > t_0,\ \Leftrightarrow \forall t \in I,\ t > t_0,\ u(t) = \frac{(t - t_0)^2}{4}$$

et les solutions maximales > 0 sont définies sur $]t_0, +\infty[$.................... **3**

iii) Soient $u_0(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & \text{si } t > 0 \\ u_0(t) = 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$ et $u_1(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)^2}{4} & \text{si } t > 1 \\ u_1(t) = 0 & \text{si } t \leqslant 1, \end{cases}$ alors on a $u_0(0) = u_1(0)$ mais $u_1 \neq u_0$.................... **1**

Partie III : Entonnoirs et anti-entonnoirs **27**

III.1. Soit M une borne de g' alors g est M-lipschitzienne sur $]p, q[$ alors g vérifie le critère de Cauchy d'existence de limite au voisinage de q donc g admet une limite finie en q.................... **2**

III.2. a. $t \in I$ (!) et grâce aux lemmes des barrières inférieures et supérieures, on sait que l'on a $\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$ pour $t \in I \cap J$.
Conclusion : $(t, u(t))$ appartient à Δ pour tout $t \geqslant t_0$ appartenant à $I \cap J$. . . . . $\boxed{2}$

b. Raisonnons par l'absurde : si $I \cap [t_0, +\infty[$ n'est pas contenu dans J, soit $J \cap [t_0, +\infty[= [t_0, t_1)$ (on ne sait pas si t_1 est élément de cet ensemble), avec $t_1 \in I$. On a alors $u(t) \in [\alpha(t), \beta(t)]$ donc u est bornée au voisinage de t_1 donc $f(t, u(t))$ est aussi bornée. Par conséquent u' est bornée et, vu la question **1**, u admet une limite en t_1. On peut alors prolonger u à un intervalle voisinage de t_1 ce qui est contradictoire.
Conclusion : $I \cap [t_0, +\infty[\subset J$. . . . . $\boxed{2}$

III.3. a. $\alpha'(t) = 1 + \lambda e^{-t}$ et $\alpha(t) < t$ donc $g(t, \alpha(t)) \geqslant 1$ d'où

$$\alpha'(t) = 1 + \lambda e^{-t} \leqslant \underbrace{t - (t - \lambda e^{-t})}_{=\lambda e^{-t}} + \underbrace{g(t, \alpha(t))}_{\geqslant 1}$$

de même pour $\beta(t)$, les fonctions α et β définissent un entonnoir sur $\mathbb{R}$. . . . . $\boxed{2}$

b. Vu le **2.b**, $I = \mathbb{R}$ et si u est une solution maximale vérifiant $u(t_0) = x_0$ alors on prend $\lambda = |x_0 - t_0|e^{t_0}$ qui donne $\alpha(t_0) \leqslant x_0 \leqslant \beta(t_0)$.
On peut alors appliquer le théorème de l'entonnoir, $I \cap [t_0, +\infty[= [t_0, +\infty[\subset J$. . . . . $\boxed{3}$
On a ainsi, pour $t \geqslant t_0$, $t - \lambda e^{-t} \leqslant u(t) \leqslant t + \lambda e^{-t}$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty}(u(t) - t) = 0$ i.e. la première bissectrice est asymptote en $+\infty$. . . . . $\boxed{1}$

III.4. On raisonne par l'absurde : soient (u, v) deux solutions de (E) telles que $(t, u(t))$ et $(t, v(t))$ soient dans A pour tout $t \in I$.
On suppose $u \neq v$ donc, le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne que $\forall t \in I$, $u(t) \neq v(t)$. Comme $u - v$ est continue, $u - v$ garde un signe constant que l'on suppose > 0. On a alors

$$u'(t) - v'(t) = f(t, u(t)) - f(t, v(t)) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(t, w_t)}_{\geqslant 0}(u(t) - v(t))$$

donc $u' - v' \geqslant 0$ i.e. $u - v \nearrow$ or, par encadrement, on sait que $(u - v)(t) \to 0$ quand $t \to b$ ce qui est absurde.
Conclusion : il existe au plus une solution u de (E). . . . . $\boxed{4}$

III.5. a. $\tilde{f}(t, x) = -f(-t, x)$ convient : en effet $u'(-t) = f(-t, u(-t))$ et en remplaçant, on a bien $\widehat{u}'(t) = -u'(-t) = -f(-t, u(-t)) = \tilde{f}(t, \widehat{u}(t))$. La transformation étant involutive, on a bien équivalence. . . . . $\boxed{2}$

b. On a bien sûr $\widehat{\beta}(t) \leqslant \widehat{\alpha}(t)$ et $\widehat{\beta}'(t) = -\beta'(-t) \leqslant -f(-t, \beta(-t)) \leqslant \tilde{f}(t, \widehat{\beta}(t))$, de même pour $\widehat{\alpha}$.
On est donc dans les hypothèses du **III.2**, $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}$ définissent un entonnoir $(\widehat{\mathrm{E}})$ sur l'intervalle $-I$. . . . . $\boxed{1}$

c. On considère les solutions maximales de $(\widehat{\mathrm{E}})$ vérifiant les conditions initiales $\widehat{u}_n(-t_n) = \alpha(t_n)$ et $\widehat{v}_n(-t_n) = \beta(t_n)$ alors on sait que ces solutions sont définies sur $[-t_n, +\infty[\cap I$ donc, en prenant $u_n(t) = \widehat{u}_n(-t)$ et $v_n(t) = \widehat{v}_n(-t)$, u_n et v_n sont solutions de (E) sur $[t_0, t_n]$. . . . $\boxed{2}$

d. On sait que sur $[-t_n, -t_0]$, $\widehat{\alpha}(t) \geqslant \widehat{u}_{n+1}(t)$ grâce au théorème de l'entonnoir par conséquent $\widehat{\alpha}(-t_n) = \widehat{u}_n(-t_n) \geqslant \widehat{u}_{n+1}(-t_n)$ soit $u_n(t_n) \geqslant u_{n+1}(t_n)$ donc : soit $u_n = u_{n+1}$ et dans ce cas $u_n(t_0) = u_{n+1}(t_0)$ soit $u_n \neq u_{n+1}$, $u_n(t_n) > u_{n+1}(t_n)$ et $u_n(t_0) > u_{n+1}(t_0)$.
Dans tous les cas, on peut affirmer que la suite $(u_n(t_0))$ est décroissante. . . . . $\boxed{2}$
On montre de même que $(v_n(t_0)) \nearrow$ et comme $v_n(t_n) = \beta(t_n) \leqslant \alpha(t_n) = u_n(t_n)$, on en déduit, par le même raisonnement, que $v_n(t_0) \leqslant u_n(t_0)$ pour $n \geqslant 1$. . . . . $\boxed{3}$

e. Immédiat : $(v_n(t_0)) \nearrow$ et majorée admet une limite v_0, $(u_n(t_0)) \searrow$ et minorée admet une limite u_0 et on a $v_0 \leqslant u_0$. . . . . $\boxed{1}$

f. Si u est l'unique solution maximale vérifiant $u(t_0) = x_0$ alors pour tout $t \in [t_0, t_n]$, on a $\beta(t) \leqslant v_n(t) \leqslant u(t) \leqslant u_n(t) \leqslant \alpha(t)$ (conséquence immédiate du théorème de l'entonnoir). On en déduit que u est définie sur $[t_0, b[$ et vérifie $\beta(t) \leqslant u(t) \leqslant \alpha(t)$. 2

Partie IV : Périodicité 29

IV.1. Soit $f(t,x) = 1$ alors $x' = 1 \Leftrightarrow x = t - t_0$. f vérifie bien les hypothèses et pourtant aucune solution n'est périodique. 4

IV.2. **a.** $u'(t+T) = f(t+T, u(t+T)) = f(t, u(t+T))$ donc $v(t) = u(t+T)$ est solution de (E) sur $J - T$. 2

b. Si $u(t_0 + T) = u(t_0)$ alors $v(t_0) = u(t_0)$ et grâce à l'unicité d'une solution maximale, on a $u(t) = v(t)$ pour $t \in J$ et $t \in J - T$. En vertu de l'unicité de l'intervalle de définition d'une solution maximale, on a $J = J - T$. $\forall t \in J$, $t + T \in J$. Si b est une borne supérieure de J et si b est finie on a immédiatement une contradiction. J n'est pas borné supérieurement, inférieurement non plus par le même genre d'argument.
Conclusion : $J = \mathbb{R}$. 3

IV.3. Prenons par exemple $f(t,x) = x^2 + 1$ et $T = 2\pi$ alors $x' = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \tan(t - t_0)$ définie sur l'intervalle maximal $]t_0 - \frac{\pi}{2}, t_0 + \frac{\pi}{2}[$. 5

IV.4. Si γ_z est T-périodique alors $\gamma_z(T) = \gamma_z(0)$ i.e. $P(z) = z$.
Si $P(z) = z$ alors $\gamma_z(0) = \gamma_z(T)$ donc, vu le résultat du **2**, γ_z est T-périodique. 1

IV.5. **a.** Soient $z < z'$ deux éléments de D, si $z'' \in]z, z'[$ alors $\gamma_z < \gamma_{z''} < \gamma_{z'}$ pour tout $t \in I_z \cap I_{z'}$ (théorème de l'entonnoir). Par conséquent $T \in I_{z''}$ i.e. $z'' \in D$.
Conclusion : D est bien un intervalle. 3

b. De même on a $\gamma_z(T) < \gamma_{z''}(T) < \gamma_{z'}(T)$ donc P est strictement croissante. 1

c. Si $y \in]P(z), P(z')[$, on note γ l'unique solution maximale de (E) vérifiant $\gamma(T) = y$ alors, si on pose $\delta(t) = \gamma(-t)$, δ est solution de (E') : $x' = -f(-t, x)$ et $\delta_z(t) = \gamma_z(-t)$, $\delta_{z'}(t) = \gamma_{z'}(-t)$ constitue un entonnoir de (E') donc δ est solution de (E') sur $[-T, 0]$ i.e. γ solution de (E) vérifie $\gamma(0) \in]z, z'[$ et $\gamma(T) = y$.
Conclusion : $y = P(\gamma(0))$, $P(D)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. 3

d. Par l'absurde : si z est un point de discontinuité de P alors $P(z^-) < P(z^+)$ et tout élément de $]P(z^-), P(z^+)[\backslash\{P(z)\}$ n'appartient pas à $P(D)$ ce qui est contradictoire. 2

IV.6. **a.** Soit $\beta(t) = 3t$ alors $\beta'(t) = 3 \geqslant \sin t + 2\cos(\beta(t))$ et $\beta(0) = 0 \geqslant -\pi$.
Soit $\alpha(t) = -3t - \pi$ alors $\alpha'(t) = -3 \leqslant \sin t + 2\cos(\alpha(t))$ et $\alpha(0) = -\pi \leqslant 0$.
L'ensemble $\Delta = \{(t,x) \mid t \in [0, +\infty[\text{ et } \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t)\}$ est un entonnoir de (E) sur $[0, +\infty[$ et, grâce au théorème de l'entonnoir, on peut affirmer que les applications u et v sont définies sur $[0, +\infty[$ (donc sur $[0, 2\pi]$). 2

b. • On a $0 \leqslant \sin t + 2\cos 0 = 2 + \sin t$ donc 0 est une barrière inférieure de (E) sur $[0, 2\pi]$ et, grâce au lemme de la barrière inférieure, $u(2\pi) \geqslant 0$.
• $\alpha(t) = -\pi$ est une barrière supérieure : en effet $\alpha'(t) = 0 \geqslant \sin t + 2\cos(-\pi) = -2 + \sin t$ donc $v(2\pi) \leqslant -\pi$. 1

c. On ainsi $P(0) \geqslant 0$ et $P(-\pi) \leqslant -\pi$. Soit $Q(t) = P(t) - t$, $Q(0) \geqslant 0$ et $Q(-\pi) \leqslant 0$ donc, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue Q donne $Q(z) = 0$ soit $P(z) = z$. 2

d. Ceci est une conséquence immédiate de la question **IV.4** et du **c**. 0

e. Si w est une solution 2π-périodique de (E) alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $w_n(t) = w(t) + 2n\pi$ est aussi une solution 2π-périodique de (E) et toutes les w_n sont distinctes. 3

Partie V : Applications $\boxed{23}$

Remarque : H2 signifie que $f(x_1, x_2)$ n'est pas orthogonal à $(-x_2, x_1)$.

V.1. Soit $F(x_1, x_2) = (f(x_1, x_2)|(-x_2, x_1))$ définie sur B qui est connexe par arcs. F est continue et ne s'annule pas donc F garde un signe constant.
Conclusion : quitte à prendre $-f$ à la place de f, on peut se ramener au cas où $F > 0$ pour tout $x \in B$. .... $\boxed{2}$

V.2. On a

$$u_1'(t) = [h'(\theta(t))\cos\theta(t) - h(\theta(t))\sin\theta(t)]\theta'(t) = f_1(u(t))$$
$$u_2'(t) = [h'(\theta(t))\sin\theta(t) + h(\theta(t))\cos\theta(t)]\theta'(t) = f_2(u(t))$$

ce qui est équivalent (en utilisant des notations abrégées) à $h'\theta' = f_1\cos\theta + f_2\sin\theta = g_1$, $h\theta' = -f_1\sin\theta + f_2\cos\theta$ d'où

$$g_1(\theta, h) = f_1(h\cos\theta, h\sin\theta)\cos\theta + f_2(h\cos\theta, h\sin\theta)\sin\theta$$
$$g_2(\theta, h) = \frac{1}{h}[-f_1(h\cos\theta, h\sin\theta)\sin\theta + f_2(h\cos\theta, h\sin\theta)\cos\theta]. \qquad \boxed{3}$$

V.3. $hg_2(\theta, h) = (f_1(h\cos\theta, h\sin\theta)|(-\sin\theta, \cos\theta)) > 0$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $h \in [a_1, a_2]$.
Raisonnons par l'absurde : supposons que, pour tout $b_1 < a_1 < a_2 < b_2$, g_2 s'annule sur $\mathbb{R}\times]b_1, b_2[$ (i.e. sur $[0, 2\pi]\times]b_1, b_2[$). On pose $b_{1,n} = a_1 - \dfrac{1}{n}$ et $b_{2,n} = a_2 + \dfrac{1}{n}$ alors il existe $x_n \in [0, 2\pi]\times]b_{1,n}, b_{2,n}[$ tel que $g_2(x_n) = 0$. Comme (x_n) est une suite bornée, on peut en extraire une suite qui va converger vers $x \in [0, 2\pi]\times[a_1, a_2]$. g étant continue, on aura $g(x) = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.
Conclusion : il existe $b_1 < a_1$ et $b_2 > a_2$ tels que $g_2 > 0$ sur $\mathbb{R}\times]b_1, b_2[$. .... $\boxed{5}$

V.4. **a.** On a $g_2 > 0$ et $g_1(\theta, \rho) = (f_1(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|(\cos\theta, \sin\theta))$ et, par hypothèse, $g_1(\theta, a_1) \geqslant 0$ et $g_1(\theta, a_2) \leqslant 0$.
Soit $\rho_1(\theta) = a_1$, $\rho_1'(\theta) = 0 \leqslant \dfrac{g_1(\theta, a_1)}{g_2(\theta, a_1)}$ et $\rho_2(\theta) = a_2$, $\rho_2'(\theta) = 0 \geqslant \dfrac{g_1(\theta, a_2)}{g_2(\theta, a_2)}$.
Conclusion : $[0, 2\pi]\times[a_1, a_2]$ est un entonnoir de (E'). .... $\boxed{2}$

b. Grâce au théorème de l'entonnoir, si ρ solution de (E') vérifie $\rho(0) \in [a_1, a_2]$ alors ρ est définie sur $[0, 2\pi]$ et $\rho(2\pi) \in [a_1, a_2]$ donc $P([a_1, a_2])$ est contenu dans $[a_1, a_2]$. .... $\boxed{1}$

c. Soit $Q(t) = P(t) - t$, $Q(a_1) = P(a_1) - a_1 \geqslant 0$, $Q(a_2) = P(a_2) - a_2 \leqslant 0$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in [a_1, a_2]$ tel que $Q(z) = 0$. La question **IV.4** nous permet alors d'affirmer l'existence d'une solution de (E') 2π-périodique $h\ : \mathbb{R} \to [a_1, a_2]$. $\boxed{1}$

V.5. **a.** $\psi(\theta+2\pi) = g_2(\theta+2\pi, h(\theta+2\pi)) = g_2(\theta+2\pi, h(\theta)) = g_2(\theta, h(\theta))$ i.e. ψ est 2π-périodique donc atteint son maximum et son minimum sur $[0, 2\pi]$ i.e. $\exists(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi]^2$ tels que $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\psi(\theta_1) \leqslant \psi(\theta) \leqslant \psi(\theta_2)$ et $\psi(\theta_1) = g_2(\theta_1, h(\theta_1)) > 0$ donc ψ reste encadré par 2 nombres positifs. .... $\boxed{2}$

b. $\mathbb{R}\times[\psi(\theta_1), \psi(\theta_2)]$ est un entonnoir de (E") donc les solutions maximales de (E") sont définies sur des intervalles $[a, +\infty[$. Par le même argument qu'en **IV.5.c** (où l'on a changé t en $-t$), elles sont aussi définies sur $]-\infty, a]$ donc sur $\mathbb{R}$.
Comme θ' est minorée par un réel strictement positif, θ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. $\boxed{2}$

V.6. On prend pour θ l'unique solution maximale qui s'annule en 0 ($\theta(0) = 0$). Soit $T > 0$ tel que $\theta(T) = 2\pi$, on pose $\theta_1(t) = \theta(t + T)$, $\theta_2(t) = \theta(t) + 2\pi$. θ_1 est solution de (E") (on a une équation autonome), comme ψ est 2π-périodique alors θ_2 est aussi solution de (E"). Or $\theta_1(0) = \theta(T) = 2\pi = \theta_2(0)$ donc $\theta_1 = \theta_2$ par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz. On en déduit donc que $\theta(t + T) = \theta(t) + 2\pi$.
On a l'équivalence u solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si h' est solution de (E') et θ' solution de (E") donc, avec les solutions de (E') et (E") que l'on vient de construire, u est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et est T-périodique. .... $\boxed{5}$