80.03M

SESSION 2008

Filière MP (groupes MP/MPI et groupe I)

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Filières MP PC (groupe I)

Épreuve optionnelle commune aux ENS de Paris et Lyon

MATHÉMATIQUES MPI 2

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

L'objectif de ce problème est d'étudier les propriétés des solutions d'équations différentielles de la forme

$$x'(t) = \phi(x(t)) \tag{1}$$

où ϕ est une fonction homogène de degré 0, c'est-à-dire une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{0\})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, vérifiant

$$\phi(kx) = \phi(x) \tag{2}$$

pour tout nombre réel $k > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. A noter que ϕ n'est pas définie en 0 et c'est précisément cette difficulté qui est traitée dans ce sujet.

Nous dirons que $x(t)$ est une solution de (1) au sens 1 sur un intervalle $]a, b[$ si $x(t)$ est une fonction continue de $]a, b[$ vers $\mathbb{R}^2$ et s'il existe un nombre fini N de temps t_i tels que $a < t_1 < t_2 < ... < t_N < b$ et tels que $x(t)$ soit de classe C^1 et non nulle sur les intervalles $]a, t_1[$, $]t_1, t_2[$, ..., $]t_N, b[$ et vérifie (1) sur ces intervalles.

Nous dirons que $x(t)$ est une solution maximale de (1) au sens 1 s'il n'existe pas de solution $y(t)$ de (1) au sens 1 sur un intervalle $]c, d[$ strictement plus grand que $]a, b[$ telle que $x(t) = y(t)$ pour $t \in]a, b[$.

Enfin nous dirons que $x(t)$ est une solution de (1) au sens 2 sur un intervalle $]a, b[$ si $x(t)$ est une fonction continue de $]a, b[$ vers $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $t \in]a, b[$, si $x(t) \neq 0$ alors x est dérivable en t et (1) est vraie. Nous définissons de même la notion de solution maximale de (1) au sens 2.

Dans tout le sujet, nous identifierons $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ et noterons $\mathcal{R}e\,(x)$ la partie réelle d'un nombre complexe x et $\mathcal{I}m\,(x)$ sa partie imaginaire. Ainsi un point $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ sera aussi noté $x = x_1 + ix_2$, avec $x_1 = \mathcal{R}e\,(x)$, $x_2 = \mathcal{I}m\,(x)$. La norme de x dans $\mathbb{R}^2$, qui est aussi son module après identification entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, sera notée indifféremment $\|x\|$ ou $|x|$.

Nous terminerons cette introduction par le résultat suivant (que le candidat pourra utiliser sans le démonter)

Passage en polaire: si $f(t)$ est une fonction continue (respectivement C^1) d'un intervalle $]a, b[$ vers $\mathbb{C} - \{0\}$ alors il existe deux fonctions $\rho(t)$ et $\theta(t)$ continues (respectivement C^1), de $]a, b[$ vers $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}$ telles que

$$f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}.$$

Partie I

1) Vérifier que toute solution de (1) au sens 1 sur un intervalle $]a, b[$ est solution au sens 2 sur le même intervalle.

2) Soient (en identifiant $\phi(x)$ et x à des nombres complexes)

$$\psi_0(x) = \mathcal{R}e\left(\phi(x)\frac{\bar{x}}{|x|}\right)$$

et

$$\chi_0(x) = \mathcal{I}m\left(\phi(x)\frac{\bar{x}}{|x|}\right).$$

Donner une interprétation géométrique de ψ_0 et de χ_0. Vérifier que ψ_0 et χ_0 sont homogènes de degré 0.

3) Soient pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\alpha) = \psi_0(\exp(i\alpha)).$$

et

$$\chi(\alpha) = \chi_0(\exp(i\alpha))$$

Exprimer ϕ en fonction de χ et ψ.

4) Soit $x(t)$ une solution de (1), de classe C^1 sur un intervalle $]a, b[$ et qui ne passe pas par 0 sur cet intervalle. D'après le rappel fait en introduction on sait qu'il existe deux fonctions de classe C^1, $\rho(t)$ et $\theta(t)$ telles que $x(t) = \rho(t)\exp(i\theta(t))$.

Quelles sont les équations vérifiées par $\rho(t)$ et $\theta(t)$? On fera intervenir ψ et χ.

5) Soit $\tau(t)$ une fonction C^1 définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]a, b[$. Soit $\tilde{\theta}(t) = \theta(\tau(t))$ et $\tilde{\rho}(t) = \rho(\tau(t))$. Montrer que si $\tau'(t) = \rho(\tau(t))$ alors $\tilde{\theta}$ et $\tilde{\rho}$ vérifient

$$\tilde{\theta}'(t) = \chi\big(\tilde{\theta}(t)\big). \tag{3}$$

$$\tilde{\rho}'(t) = \psi\big(\tilde{\theta}(t)\big)\tilde{\rho}(t). \tag{4}$$

6) On s'intéresse dans cette question au système (3,4). Soit $\rho_0 > 0$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale au système (3,4) telle que $\tilde{\rho}(0) = \rho_0$ et $\tilde{\theta}(0) = \theta_0$. Montrer que $\tilde{\rho}$ est positif sur tout son intervalle définition. Vérifier que $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\theta}$ sont définis sur $\mathbb{R}$ tout entier.

7) Soit, dans cette question, $\phi(x) = x/\|x\|$.

   7a) Vérifier que ϕ est homogène de degré 0. Tracer l'allure du champ de vecteurs $\phi(x)$.

   7b) Soit $x(t)$ une solution de (1) au sens 1 sur un intervalle $]a, b[$. Soit $1 \leq i < N$. Calculer $x(t)$ en fonction de $x(t_i)$ sur l'intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ dans le cas où $x(t_i) \neq 0$. Que se passe-t-il quand $x(t_i) = 0$? Le candidat est invité à s'aider d'un dessin.

   7c) Donner toutes les solutions maximales de (1) au sens 1.

   7d) Donner toutes les solutions maximales de (2) au sens 2.

8) Soit maintenant dans cette question

$$\phi(x) = \sin\Big(\frac{\mathcal{R}e\,(x)}{\|x\|}\Big)\frac{x}{\|x\|}.$$

   8a) Donner toutes les solutions maximales de (1) au sens 1.

   8b) Donner toutes les solutions maximales de (1) au sens 2.

9) Montrer que si $x(t)$ est une solution au sens 1 et si $\lambda > 0$ alors $\lambda x(t/\lambda)$ est aussi solution de (1) au sens 1. Interpréter géométriquement ce résultat.

Partie II

On suppose dans toute cette partie II que χ ne s'annule jamais.

1) On s'intéresse dans cette question au système (3,4). Soit $(\tilde{\rho}, \tilde{\theta})$ une solution maximale de (3,4). On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\rho}(t_0) > 0$.

   1a) Vérifier que $\tilde{\theta}$ est monotone.

1b) Montrer qu'il existe $T_0 > 0$ tel que $\tilde{\theta}(T_0) = \tilde{\theta}(0)$ (modulo 2π). Montrer que $e^{i\tilde{\theta}}$ est périodique.

1c) Montrer que $\tilde{\rho}(t + T_0)/\tilde{\rho}(t)$ est une constante indépendante de $t \in \mathbb{R}$. On notera γ cette constante.

2) On revient maintenant à (1). Soit $x(t)$ une solution maximale de (1) au sens 1. Soit $]a, b[$ un intervalle sur lequel $x(t)$ est de classe C^1 et ne s'annule pas. Comme dans I.4 on introduit les fonctions $\rho(t)$ et $\theta(t)$ telles que $x(t) = \rho(t)\exp(i\theta(t))$.

2a) Montrer que l'on peut définir une fonction $\tau(t)$, de classe C^1, telle que $\tau'(t) = \rho(\tau(t))$. Comme dans I.5 on introduit $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\theta}$.

2b) En étudiant $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\theta}$, donner l'intervalle de définition de $x(t)$. On distinguera les cas $\gamma < 1$, $\gamma > 1$ et $\gamma = 1$.

2c) Tracer l'allure des solutions.

2d) On suppose dans cette question que $\gamma > 1$. Soit Δ une demi droite issue de l'origine. Montrer qu'il existe une infinité de réels $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tels que $t_j < t_{j+1}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tels que $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ soit l'ensemble des solutions de l'équation $x(t) \in \Delta$.
Que peut-on dire de $\rho(t_{j+1})/\rho(t_j)$? de $(t_{j+1} - t_j)/(t_j - t_{j-1})$?

Partie III

Dans cette partie on suppose que χ a exactement deux zéros distincts θ_1 et θ_2 sur $[0, 2\pi[$, tels que $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$, vérifiant de plus $\chi'(\theta_1) > 0$ et $\chi'(\theta_2) < 0$.

1) Dans cette question on s'intéresse au système (3,4). Soit $(\tilde{\theta}, \tilde{\rho})$ une solution maximale de (3,4).

1a) Vérifier que s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\theta}(t_0) \in]\theta_1, \theta_2[$ (mod 2π) alors $\tilde{\theta}(t) \in]\theta_1, \theta_2[$ (mod 2π) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déterminer dans ce cas les limites de $\tilde{\theta}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Calculer les limites de $\tilde{\rho}$ en $+\infty$ et $-\infty$ en fonction de $\psi(\theta_1)$ et $\psi(\theta_2)$ que l'on supposera non nuls.

1b) Reprendre la question 1b dans les trois cas suivants: $\tilde{\theta}(0) = \theta_1$ (mod 2π), $\tilde{\theta}(0) = \theta_2$ (mod 2π), $\tilde{\theta}(0) \notin]\theta_1, \theta_2[$ (mod 2π).

2) On revient dans cette question à l'équation (1). On suppose dans cette question que $\psi(\theta_1) < 0$ et que $\psi(\theta_2) > 0$. Soit $x_0 \neq 0$ et $x(t)$ la solution maximale au sens 1 telle que $x(0) = x_0$. En utilisant la question précédente, montrer que sauf pour x_0 sur une demi-droite que l'on précisera, $x(t)$ ne passe jamais par l'origine, est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et admet des asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ que l'on précisera.

   Tracer l'allure des différentes solutions maximales de (1).

3) Reprendre brièvement la question précédente en supposant successivement

   3a) $\psi(\theta_1) > 0$ et $\psi(\theta_2) > 0$.

   3b) $\psi(\theta_1) > 0$ et $\psi(\theta_2) < 0$.

   3c) $\psi(\theta_1) < 0$ et $\psi(\theta_2) < 0$.

   Préciser à chaque fois si l'intervalle de définition des solutions maximales de (1) est borné ou non. On ne demande pas de détailler les preuves, mais simplement des résultats précis.

4) 4a) Donner un exemple explicite de fonction ϕ telle qu'on soit dans le cas 3b.

   4b) Quelles sont les solutions de (1) au sens 1 dans ce cas ?

   4c) Les notions de solutions au sens 1 et au sens 2 coincident elles ?

Partie IV

Dans cette partie on fait les mêmes hypothèses que dans la partie III, à savoir que χ a exactement deux zéros distincts, θ_1 et θ_2 tels que $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$, $\chi(\theta_1) = \chi(\theta_2) = 0$, $\chi'(\theta_1) > 0$, $\chi'(\theta_2) < 0$. On suppose de plus que $\psi(\theta_1) < 0$ et $\psi(\theta_2) > 0$. On cherche maintenant le comportement asymptotique de $x(t)$ aux limites de son intervalle de définition.

Soit

$$f(\alpha) = \frac{\chi(\theta_2 + \alpha) - \alpha\chi'(\theta_2)}{\alpha^2}.$$

1) Est ce que f est continue ? de classe C^1 ?

2) Soit $u(t) = \tilde{\theta}(t) - \theta_2$. Ecrire l'équation vérifiée par u.

Vérifier que u tend vers 0 en $+\infty$ et est de signe constant. Pour simplifier on supposera dans la suite que $u > 0$ (le cas $u < 0$ se traitant de la même façon).

3) Vérifier que pour t assez grand

$$u' < \frac{3\chi'(\theta_2)}{4} u$$

et en déduire une majoration de $u(t)$.

4) Montrer que $u(t)\exp(-\chi'(\theta_2)t)$ admet une limite finie en $+\infty$.

5) Montrer qu'il existe une constante C_0 telle que, lorsque $t \to +\infty$,

$$\tilde{\theta}(t) = \theta_2 + C_0 \exp\big(\chi'(\theta_2)t\big) + O\Big(\exp\big(2\chi'(\theta_2)t\big)\Big).$$

6) On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique de $x(t)$.

6a) Donner un équivalent de $\tilde{\rho}(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

6b) Donner un équivalent de $\tau(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

6c) Donner un équivalent de $x(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Retrouver directement ce résultat.