

ENS 2008, DEUXIÈME COMPOSITION

Partie I

I.1. Soit x une solution de (1) au sens 1, si $x(t_i) \neq 0$, comme x est continue alors x' admet une limite en t_i donc, grâce au théorème du prolongement dérivable, x est \mathcal{C}^1 , non nulle et vérifie (1) en t_i . Conclusion : si x est une solution au sens 1 alors on peut ne considérer que les valeurs des t_i où x s'annule et alors x est une solution au sens 2. En effet la différence entre le sens 1 et le sens 2 tient au fait que dans le cas 1, une solution $x(t)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois alors que dans le cas 2, une solution peut s'annuler une infinité de fois.

I.2. D'après le cours, $\psi_0(x) = (\phi(x)|\frac{x}{|x|}) = \frac{(x'|x)}{|x|}$ et $\chi_0(x) = \det(\phi(x), \frac{x}{|x|}) = \frac{\det(x', x)}{|x|}$.

Soit $y = \lambda x$ avec $\lambda > 0$ on sait que $\phi(y) = \phi(x)$ d'où $\phi(y)\frac{y}{|y|} = \phi(x)\frac{x}{|x|}$. De cette égalité, on en déduit l'homogénéité de ψ_0 et χ_0 , ψ_0 et χ_0 sont \mathcal{C}^∞ .

I.3. Compte tenu de l'interprétation géométrique, en posant $\frac{x}{|x|} = e^{i\theta}$ alors

$$\phi(x) = (\psi_0(x) + i\chi_0(x)) \cdot \frac{x}{|x|} = (\psi_0(e^{i\theta}) + i\chi_0(e^{i\theta})) \cdot e^{i\theta} = (\psi(\theta) + i\chi(\theta)) e^{i\theta}.$$

I.4. On a $x' = \rho' e^{i\theta} + i\rho\theta' e^{i\theta} = (\rho' + i\rho\theta') e^{i\theta} = \phi(x)$. En utilisant la question précédente, on obtient $\rho' + i\rho\theta' = \psi(\theta) + i\chi(\theta)$ soit

$$\rho' = \psi(\theta), \quad \rho\theta' = \chi(\theta).$$

I.5. Un petit calcul de dérivées composées donne

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}'(t) &= \theta'(\tau(t))\tau'(t) = \theta'(\tau(t))\rho(\tau(t)) = \chi(\theta(\tau(t))) \\ &= \chi(\tilde{\theta}(t)) \\ \tilde{\rho}'(t) &= \rho'(\tau(t))\tau'(t) = \rho'(\tau(t))\tilde{\rho}(t) \\ &= \psi(\tilde{\theta}(t))\tilde{\rho}(t). \end{aligned}$$

I.6. – (3,4) est un système différentiel autonome ($\tilde{\theta} = \chi(\tilde{\theta})$, $\rho' = \psi(\tilde{\theta})\rho$), ψ et χ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 comme composées de fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes autonomes s'applique i.e. pour toute condition initiale il existe une unique solution maximale.

Remarque : si $(I, \tilde{\theta})$ est une solution maximale de l'équation $\tilde{\theta}' = \chi(\tilde{\theta})$ et Ψ une primitive de $\psi(\tilde{\theta}(t))$ alors $\tilde{\rho}(t) = \rho_0 \exp(\Psi(t))$ est alors solution maximale sur I . Si $\rho_0 > 0$ alors $\forall t \in I$, $\tilde{\rho}(t) > 0$.

Conclusion : $\tilde{\rho}$ ne s'annule pas sur son intervalle de définition.

– Les fonctions ψ et χ sont bornées (elles sont continues et 2π -périodiques).

Soit $] \alpha, \beta[$ l'intervalle maximal sur lequel sont définies les fonctions $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\theta}$.

Supposons, par l'absurde que $\beta < +\infty$.

– $\tilde{\theta}'$ est bornée au voisinage de β donc $\tilde{\theta}$ admet une limite en β (critère de Cauchy pour les fonctions assisté de l'inégalité des accroissements finis). $\tilde{\theta}'$ admet aussi une limite car $\tilde{\theta}' = \chi(\tilde{\theta})$. On peut donc prolonger $\tilde{\theta}$ en une fonction de classe \mathcal{C}^1 à gauche de β .

– $\frac{\tilde{\rho}'}{\tilde{\rho}} = \psi(\tilde{\theta})$ est elle aussi bornée au voisinage de β donc $\ln \tilde{\rho}$ admet aussi une limite. On en déduit que $\tilde{\rho}$ admet une limite ainsi que $\tilde{\rho}'$.

On a pu ainsi prolonger $\tilde{\theta}$ et $\tilde{\rho}$ en β ce qui contredit la maximalité de l'intervalle. On a donc $\beta = +\infty$. On montre de même que $\alpha = -\infty$.

- I.7.** a. $\phi(\lambda x) = \frac{\lambda x}{\|\lambda x\|} = \frac{\lambda x}{\lambda \|x\|} = \phi(x)$ donc ϕ est bien homogène de degré 0. Le champ de vecteur est constitué de vecteurs unitaires portés par des demi-droites passant par l'origine.
- b. Ici on a $\psi_0(x) = 1$ et $\chi_0(x) = 0$ i.e. $\rho' = 1$ et $\rho\theta' = 0$.
 – Si $x(t_i) \neq 0$ alors $\rho(t) = \rho(t_i) + t - t_i$ et $\theta(t) = \theta(t_i) = \theta$ (constante) d'où

$$x(t) = e^{i\theta}(\rho(t_i) + t - t_i) = x(t_i) + (t - t_i)e^{i\theta} = x(t_i) + (t - t_i)\frac{x(t_i)}{\|x(t_i)\|}.$$
 – Si $x(t_i) = 0$ alors $x(t) = (t - t_i)e^{i\theta}$ où θ est arbitraire.
- c. L'origine est un point répulsif. Si $x(a) \neq 0$ alors $\forall t \geq a$, $x(t) \neq 0$. Les solutions maximales au sens 1 sont donc de la forme $x(t) = (t - a)e^{i\theta}$, $t > a$ (et $x(t)$ ne peut être défini pour $t \leq a$).
- d. On a les mêmes solutions maximales qui se prolongent par 0 si $t \leq a$.

- I.8.** $\psi(x)\frac{\bar{x}}{x} = \sin(\cos \theta)$ donc $\psi_0(x) = \sin(\cos \theta)$ et $\chi_0(x) = 0$ (pour $x = \rho e^{i\theta}$). On en déduit que $\psi(\alpha) = \sin(\cos \alpha)$ et $\chi(\alpha) = 0$ soit $\rho' = \sin(\cos \theta)$, $\rho\theta' = 0$ (là aussi θ est constant).

a. On distingue plusieurs cas :

* $\theta = \frac{\pi}{2}[\pi]$ alors ρ est constant, $x(t) = (0, \pm\rho)$ est solution sur \mathbb{R} , $\rho \in \mathbb{R}^*$.

* $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (modulo 2π), $\sin(\cos \theta) > 0$, on est dans le cas du **7.c** : $x(t) = (t - a)\sin(\cos \theta)e^{i\theta}$, $t \geq a$.

* $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ (modulo 2π), $\sin(\cos \theta) < 0$, alors : $x(t) = (t - b)\sin(\cos \theta)e^{i\theta}$, $t \leq b$.

On aura les solutions maximales sur \mathbb{R} en choisissant $\theta_1 \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et $\theta_2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $a \in \mathbb{R}$ et

en définissant $x(t) = \begin{cases} (t - a)\sin(\cos \theta_1)e^{i\theta_1} & \text{si } t \leq a \\ (t - a)\sin(\cos \theta_2)e^{i\theta_2} & \text{si } t \geq a \end{cases}$

b. On a les solutions maximales suivantes ($a \leq b$ et $\theta_1 \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, $\theta_2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$)

$$x(t) = \begin{cases} (t - a)\sin(\cos \theta_1)e^{i\theta_1} & \text{si } t \leq a \\ (t - b)\sin(\cos \theta_2)e^{i\theta_2} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

I.9. Posons $y(t) = \lambda x(t/\lambda)$ alors

$$y'(t) = x'(t/\lambda) = \phi(x(t/\lambda)) = \phi(\lambda x(t/\lambda)) = \phi(y(t))$$

donc y est solution de (1). Puis, si x est solution sur $]a, b[$, y est solution sur $]\lambda a, \lambda b[$ et $y(t)$ est de classe C^1 non nulle sur les intervalles $]\lambda a, \lambda t_1[$, $]\lambda t_1, \lambda t_2[$, \dots , $]\lambda t_N, \lambda b[$.

Les familles de courbes intégrales se déduisent les une des autres par homothétie.

Partie II

II.1. a. Soit $]\alpha, \beta[$ l'intervalle maximal, $\tilde{\theta}(]a, b[)$ est un intervalle I (T.V.I.). Comme χ ne s'annule pas sur I , χ garde un signe constant sur I , il en est de même pour $\tilde{\theta}'$ par conséquent $\tilde{\theta}$ est strictement monotone.

b. Supposons que $\tilde{\theta}$ soit croissante (et, ce qui va avec, $\chi > 0$).

Si $\tilde{\theta}$ est bornée par A alors $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{\theta} \in [\tilde{\theta}(0), A]$. Soit $m = \inf_{u \in [\tilde{\theta}(0), A]} \chi(u) > 0$ alors

$$\tilde{\theta}(t) = \int_0^t \chi(\tilde{\theta}(u)) du + \tilde{\theta}(0) \geq tm + \tilde{\theta}(0)$$

et comme $\tilde{\theta}$ est définie sur \mathbb{R} , $\tilde{\theta}(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ ce qui est contradictoire.

On peut donc conclure que $\tilde{\theta}$ n'est pas bornée et comme elle est croissante, $\tilde{\theta}(t) \rightarrow +\infty$. Grâce au T.V.I. on sait qu'il existe T_0 tel que $\tilde{\theta}(T_0) = \tilde{\theta}(0) + 2\pi$ (le cas $\chi < 0$ est similaire). Soit $\tilde{\theta}_1(t) = \tilde{\theta}(t) + 2\pi$: $\tilde{\theta}'_1(t) = \tilde{\theta}'(t) = \chi(\tilde{\theta}(t)) = \chi(\tilde{\theta}(t) + 2\pi) = \chi(\tilde{\theta}_1(t))$. $\tilde{\theta}(T_0 + t)$ vérifie la même équation différentielle que $\tilde{\theta}_1$ avec la même condition initiale donc, par unicité, $\tilde{\theta}(T_0 + t) = \tilde{\theta}_1(t) = \tilde{\theta}(t) + 2\pi$. On a alors $e^{i\tilde{\theta}(t+T_0)} = e^{i\tilde{\theta}(t)+i2\pi} = e^{i\tilde{\theta}(t)}$ c.q.f.d.

c. Vu que ψ est aussi 2π -périodique on a

$$\psi(\tilde{\theta}(t + T_0)) = \psi(\tilde{\theta}(t) + 2\pi) = \psi(\tilde{\theta}(t))$$

et comme $\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = \psi(\tilde{\theta}(t))$ alors $\frac{\rho'}{\rho}$ est T_0 -périodique.

$$\ln \frac{\rho(t + T_0)}{\rho(t)} = \int_t^{t+T_0} \frac{\rho'(u)}{\rho(u)} du = \int_0^{T_0} \frac{\rho'(u)}{\rho(u)} du$$

car l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas des bornes.

On peut alors conclure que $\frac{\rho(t + T_0)}{\rho(t)} = \gamma$ est indépendant de t .

II.2. a. Comme x ne s'annule pas, ρ est de classe \mathcal{C}^1 (théorème du relèvement) donc il existe des solutions à l'équation différentielle $\tau' = \rho(\tau)$.

b. – Si $\gamma < 1$ alors $\max_{t \in [0, T_0]} \tilde{\rho}(t + T_0) = \gamma \max_{t \in [0, T_0]} \tilde{\rho}(t) = \gamma M$ en posant $M = \max_{t \in [0, T_0]} \tilde{\rho}(t)$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\max_{t \in [0, T_0]} \tilde{\rho}(t + nT_0) = \gamma^n M$ d'abord pour $n \in \mathbb{N}$

puis on étend cette égalité à \mathbb{Z} .

On a alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\rho}(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\rho}(t) = +\infty$. On en déduit tout d'abord que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tau(t) = -\infty$ puis que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = b$. Donc x est défini sur $] -\infty, b[$.

– Si $\gamma > 1$, la situation est inversée, x est défini sur $]a, +\infty[$.

– Si $\gamma = 1$ alors $\tilde{\theta}$ et $\tilde{\rho}$ sont T_0 -périodiques, $\tilde{\rho}$ est bornée donc τ est définie sur \mathbb{R} , x est défini sur un intervalle $]a, b[$.

c. Pour $\gamma > 1$ ou $\gamma < 1$ on obtient des courbes semblables à celles ci

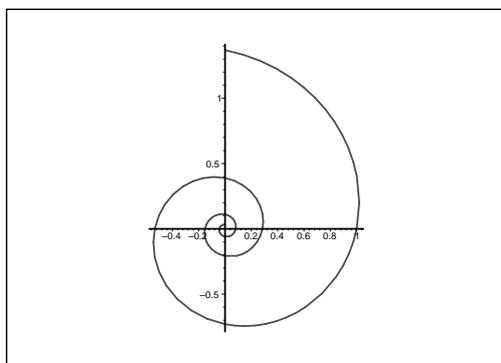


FIG. 1. $\gamma > 1$

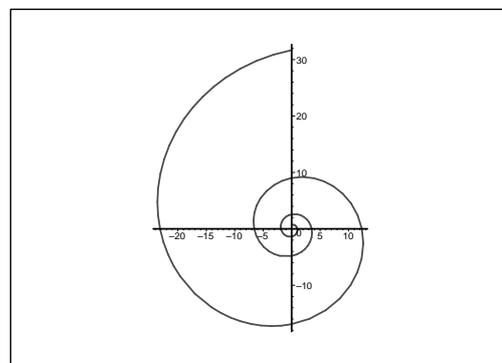


FIG. 2. $\gamma < 1$

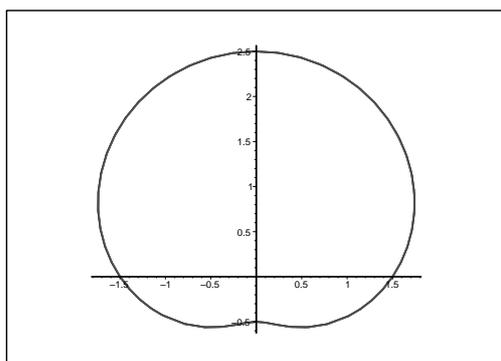


FIG. 3. $\gamma = 1$

et pour $\gamma = 1$, si $\tau(\mathbb{R})$ contient un intervalle fermé de longueur supérieure ou égale à T_0 , on obtient une courbe fermée.

d. Ici, on suppose que $a > -\infty$.

Sur $]a, b[$, $\rho > 0$ donc $\tau' > 0$ i.e. τ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $] - \infty, +\infty[$ sur $]a, +\infty[$ donc τ^{-1} est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $]a, +\infty[$ sur \mathbb{R} .

Soit θ une détermination de l'angle de la demi-droite Δ , on s'intéresse aux solutions de l'équation $\tilde{\theta}(\tau^{-1}(t)) = \theta[2\pi]$.

– On suppose qu'il existe $t_0 > a$, plus petite des solutions de cette équation, on a donc $\tilde{\theta}(\tau^{-1}(t_0)) = \theta$ et t_j vérifie $\tilde{\theta}(\tau^{-1}(t_j)) = \theta + 2j\pi$ soit $\tau^{-1}(t_j) = \tau^{-1}(t_0) + jT_0$, si on pose

$$u_0 = \tau^{-1}(t_0), \text{ ceci s'écrit } t_j = \tau(u_0 + jT_0). \text{ On a } \frac{\rho(t_{j+1})}{\rho(t_j)} = \frac{\tilde{\rho}(u_0 + (j+1)T_0)}{\tilde{\rho}(u_0 + jT_0)} = \gamma \text{ (ce qui}$$

permet d'affirmer que les $x(t_j)$ sont effectivement distincts).

– Si l'équation $\tilde{\theta}(\tau^{-1}(t)) = \theta[2\pi]$ n'a pas de plus petite solution alors les solutions seront indicées par \mathbb{Z} .

Finalement

$$\begin{aligned} \tau(u_0 + (j+1)T_0) - \tau(u_0 + jT_0) &= \int_{u_0 + jT_0}^{u_0 + (j+1)T_0} \tilde{\rho}(v) dv = \int_{u_0 + (j-1)T_0}^{u_0 + jT_0} \tilde{\rho}(v + T_0) dv \\ &= \gamma \int_{u_0 + (j-1)T_0}^{u_0 + jT_0} \tilde{\rho}(v) dv = \gamma(\tau(u_0 + jT_0) - \tau(u_0 + (j-1)T_0)) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{t_{j+1} - t_j}{t_j - t_{j-1}} = \gamma.$$

Partie III

III.1. a. C'est toujours la même histoire : posons $\tilde{\theta}(t_0) \in]\theta_1 + 2k\pi, \theta_2 + 2k\pi[$. On suppose par l'absurde qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\theta}(t) \notin]\theta_1 + 2k\pi, \theta_2 + 2k\pi[\pmod{2\pi}$, par exemple $\tilde{\theta}(t) \leq \theta_1 + 2k\pi$. Grâce au T.V.I., on en déduit l'existence de $t_1 \in [t_0, t]$ tel que $\tilde{\theta}(t_1) = \theta_1 + 2k\pi$. La fonction $\tilde{\theta}_1$ constante égale à $\theta_1 + 2k\pi$ est solution de l'équation différentielle (3) et par unicité, on a $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_1$ d'où $\tilde{\theta}(t_0) = \theta_1 + 2k\pi$ ce qui est contradictoire.

Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{\theta}(t) \in]\theta_1 + 2k\pi, \theta_2 + 2k\pi[$ (ce qui est plus précis que le résultat demandé).

Compte tenu des hypothèses, χ' est positive à droite de θ_1 et à gauche de θ_2 et comme χ ne s'annule pas sur $] \theta_1, \theta_2 [$, elle garde un signe constant qui est > 0 . On suppose par la suite que $k = 0$ pour simplifier l'écriture.

Supposons encore par l'absurde que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\theta}(t) = A < \theta_2$, on procède comme au **II.1.b** : sur $[\tilde{\theta}(0), A]$, χ est une fonction continue strictement positive donc elle est minorée par $m > 0$, dans ce cas

$$\tilde{\theta}(t) = \int_0^t \chi(\tilde{\theta}(u)) du + \tilde{\theta}(0) \geq tm + \tilde{\theta}(0)$$

et donc $\tilde{\theta}(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ ce qui est contradictoire. Ainsi $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\theta}(t) = \theta_2$, de même $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\theta}(t) = \theta_1$.

Ensuite $\frac{\tilde{\rho}'(t)}{\tilde{\rho}(t)} \rightarrow \psi(\theta_2)$ quand $t \rightarrow +\infty$ donc $\int_0^t \frac{\tilde{\rho}'(u)}{\tilde{\rho}(u)} du \rightarrow \varepsilon \infty$ où ε est le signe de $\psi(\theta_2)$.

On en déduit que $\ln \frac{\tilde{\rho}(t)}{\tilde{\rho}(0)} \rightarrow \varepsilon \infty$.

En $-\infty$ on aura $\ln \frac{\tilde{\rho}(t)}{\tilde{\rho}(0)} \rightarrow -\varepsilon' \infty$ où ε' est du signe de $\psi(\theta_1)$.

Conclusion : on a ainsi 4 cas

	$\psi(\theta_1) > 0$	$\psi(\theta_1) < 0$
$\psi(\theta_2) > 0$	$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\rho}(t) = +\infty$	$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\rho}(t) = +\infty$
	$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\rho}(t) = 0$	$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\rho}(t) = +\infty$
$\psi(\theta_2) < 0$	$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\rho}(t) = 0$	$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\rho}(t) = 0$
	$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\rho}(t) = 0$	$\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\rho}(t) = +\infty$

b. Si $\tilde{\theta}(0) = \theta_1$ alors, compte tenu du raisonnement fait ci-dessus, $\tilde{\theta}(t) = \theta_1$ (fonction constante) et $\frac{\tilde{\rho}'(t)}{\tilde{\rho}(t)} = \psi(\theta_1)$ soit $\tilde{\rho}(t) = \exp[t\psi(\theta_1)]$. C'est pareil avec $\tilde{\theta}(0) = \theta_2$.

Si $\tilde{\theta}(0) \notin [\theta_1, \theta_2] \pmod{2\pi}$ alors on peut reprendre l'étude du **1.a** avec $]\theta_2, 2\pi + \theta_1[$ et on aura les mêmes conclusions en prenant $\theta'_1 = \theta_2$ et $\theta'_2 = 2\pi + \theta_1$ mais comme $\tilde{\theta}$ est décroissante alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\theta}(t) = \theta_2$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\theta}(t) = \theta_1 + 2\pi$.

III.2. – En fait, il s'agit de 2 demi-droites d'angle θ_1 et θ_2 . Si x_0 est sur l'une de ces demi-droites, alors on se retrouve dans les cas traités à la question précédente, $\tilde{\theta}$ est constante et vaut θ_1 ou θ_2 .

– Si $\tilde{\theta}(0)$ ne prend pas l'une de ces 2 valeurs (modulo 2π) alors $\tilde{\rho}(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \pm\infty$ vu le tableau fait au **1.a**. Comme $\tau'(t) = \tilde{\rho}(t)$ et que $\rho > 0$ et continue, il existe $m > 0$ tel que $\tau' \geq m$ ce qui entraîne que τ réalise un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

On peut donc affirmer que $x(t)$ ne passe jamais par l'origine et est définie sur \mathbb{R} en entier.

– Pour déterminer les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$, il suffit d'étudier les limites de $\tilde{\rho}(t) \sin(\tilde{\theta}(t) - \theta_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$.

$\frac{\tilde{\rho}'(t)}{\tilde{\rho}(t)} \rightarrow \psi(\theta_i)$ donc, par intégration, on obtient $\ln \tilde{\rho}(t) \sim t\psi(\theta_i)$ (déjà vu au **1.a**). Ensuite

$\tilde{\theta}'(t) = \chi(\tilde{\theta}(t)) = (\tilde{\theta}(t) - \theta_i)\chi'(\theta_i) + o(\tilde{\theta}(t) - \theta_i)$ soit $\frac{\tilde{\theta}'(t)}{\tilde{\theta}(t) - \theta_i} = \chi'(\theta_i) + o(1)$. Alors, en

intégrant, on obtient

$$\int_0^t \frac{\tilde{\theta}'(t) dt}{\tilde{\theta}(t) - \theta_i} = t\chi'(\theta_i) + o(t)$$

d'où $|\tilde{\theta}(t) - \theta_i| = C e^{t\chi'(\theta_i) + o(t)}$.

Finalement $\tilde{\rho}(t) \sin(|\tilde{\theta}(t) - \theta_i|) = e^{t(\psi(\theta_i) + \chi'(\theta_i) + o(1))} C$ et on admettra que cette quantité tend vers 0 (...).

Les asymptotes seraient alors les demi-droites d'angle θ_1 et θ_2 . On obtient alors les courbes suivantes

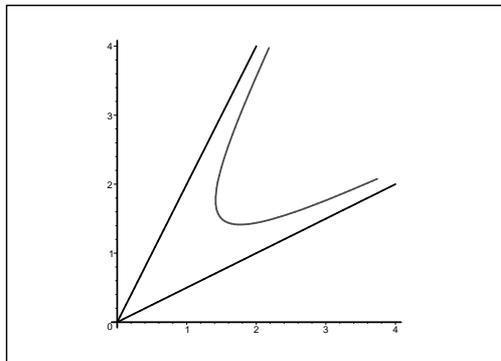


FIG. 4

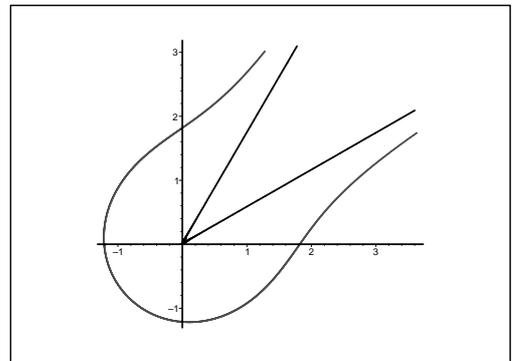


FIG. 5

III.3. On suppose toujours que x_0 n'est pas sur les demi-droites d'angle θ_1 ou θ_2 , on obtient alors les courbes

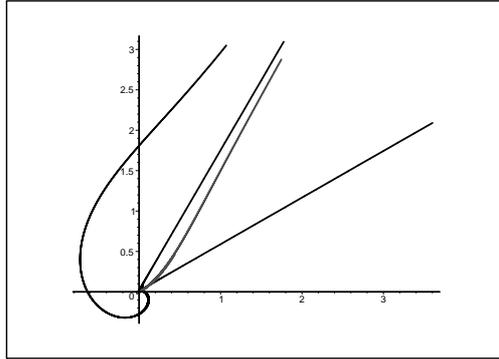


FIG. 6

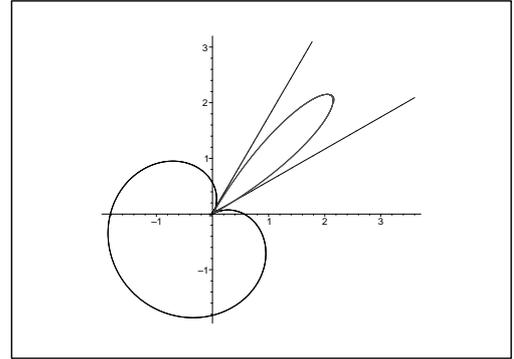


FIG. 7

La figure 6 correspond au cas où $\psi(\theta_1) \cdot \psi(\theta_2) > 0$: les deux valeurs sont de même signe et les cas $\theta_1 < \theta < \theta_2$, $\theta_2 < \theta < \theta_1 + 2\pi$ sont tout à fait semblables. Il n'y a qu'une seule asymptote et les intervalles de définition des solutions maximales sont de la forme $[a, +\infty[$ où $]-\infty, b]$.

La figure 7 traite le cas où $\psi(\theta_1) > 0$ et $\psi(\theta_2) < 0$: il n'y a pas d'asymptote et les intervalles de définition des solutions maximales sont de la forme $[a, b]$.

III.4. a. Avec $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$, on prend $\chi(\theta) = \sin \theta$ et $\psi(\theta) = \cos \theta$ ce qui donne $\phi(x) = \frac{x^2}{|x|^2}$ en complexes.

b. On résout alors les équations $\tilde{\theta}' = \sin \tilde{\theta}$ et $\tilde{\rho}' = \cos \tilde{\theta} \cdot \tilde{\rho}$:

– Sur $]0, \pi[$ on peut écrire $\frac{\tilde{\theta}'}{\sin \tilde{\theta}} = 1$ équation différentielle à variables séparables ce qui donne par intégration $\tilde{\theta} = 2 \operatorname{Arctan} e^t$, $t \in \mathbb{R}$ (à une translation du paramètre près).

– On résout maintenant $\frac{\tilde{\rho}'}{\tilde{\rho}} = \cos(2 \operatorname{Arctan} e^t) = \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}} = -\operatorname{th} t$ ce qui donne $\tilde{\rho}(t) = \frac{C}{\operatorname{ch} t}$, $C > 0$.

– On intègre alors $\tau'(t) = \tilde{\rho}(t) = \frac{C}{\operatorname{ch} t}$ d'où $\tau(t) = C 2 \operatorname{Arctan} e^t = C \tilde{\theta}$.

– On pose $u = \tau(t)$ soit $\tilde{\theta}(t) = \frac{u}{C}$ et $\theta(u) = \tilde{\theta}(t)$ ce qui donne $\rho(\theta) = 2C \sin \theta$ soit encore

$$x(u) = 2C \sin \frac{u}{C} e^{iu/C}, \quad u \in [0, C\pi]$$

On revient alors à la variable t ($u \rightarrow t$), les solutions de (1) au sens 1 seront données par

$$x(t) = 2 \frac{t_{i+1} - t_i}{\pi} \sin \frac{\pi(t - t_i)}{t_{i+1} - t_i} e^{i\pi(t - t_i)/(t_{i+1} - t_i)}, \quad t \in]t_i, t_{i+1}[$$

avec $t_0 = a$, $t_N = b$.

c. Dans ce cas, les solutions au sens 2 se distinguent des solutions au sens 1 par le fait qu'il peut y avoir une infinité de t_i .

Partie IV

IV.1. On utilise ici la formule intégrale de Taylor :

$$\chi(\theta_2 + \alpha) - \underbrace{\chi(\theta_2)}_{=0} - \alpha \chi'(\theta_2) = \int_{\theta_2}^{\theta_2 + \alpha} (\alpha + \theta_2 - t) \chi''(t) dt = \alpha^2 \int_0^1 (1 - u) \chi''(\alpha u + \theta_2) du$$

en posant $t - \theta_2 = \alpha u$.

Ainsi $f(\alpha) = \int_0^1 (1 - u) \chi''(\alpha u + \theta_2) du$. On utilise alors le théorème de continuité et de dérivabilité sous le signe intégral :

- $u \in [0, 1] \mapsto (1 - u) \chi''(\alpha u + \theta_2)$ est continue (pour la continuité),
- $u \in [0, 1] \mapsto u(1 - u) \chi'''(\alpha u + \theta_2)$ est continue (pour la dérivée),
- $\alpha \in [0, 1] \mapsto (1 - u) \chi''(\alpha u + \theta_2)$ est continue (pour la continuité),

- $\alpha \in [0, 1] \mapsto u(1-u)\chi'''(\alpha u + \theta_2)$ est continue (pour la dérivée),
- $|(1-u)\chi''(\alpha u + \theta_2)|$ est borné (fonction continue sur un compact), hypothèse de domination (pour la continuité),
- $|u(1-u)\chi'''(\alpha u + \theta_2)|$ est borné (fonction continue sur un compact), hypothèse de domination (pour la dérivée).

Alors, f est bien de classe \mathcal{C}^1 (et vu que χ est \mathcal{C}^∞ , il en sera de même de $f \dots$).

- IV.2.** $u'(t) = \tilde{\theta}'(t) = \chi(\tilde{\theta}(t)) = \chi(u(t) + \theta_2)$ qui donne l'équation différentielle vérifiée par u , mais on peut aussi faire intervenir f et le résultat précédent ce qui donne

$$u'(t) = u(t)\chi'(\theta_2) + u(t)^2 f(u(t))$$

qui est peut-être l'équation attendue...

On a vu au **III.1.a** que, s'il existe t_0 tel que $\tilde{\theta}(t_0) \in]\theta_1, \theta_2[$ alors $\tilde{\theta}(t) \in]\theta_1, \theta_2[$ pour tout t et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\theta}(t) = \theta_2$ soit $u(t) \rightarrow 0$ et $u(t) < 0$.

De même, s'il existe t_0 tel que $\tilde{\theta}(t_0) \in]\theta_2, \theta_1 + 2\pi[$ alors $\tilde{\theta}(t) \in]\theta_2, \theta_1 + 2\pi[$ pour tout t et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\theta}(t) = \theta_2$ soit $u(t) \rightarrow 0$ et $u(t) > 0$.

- IV.3.** On réécrit l'équation vérifiée par $u : u' = u[\chi'(\theta_2) + uf(u)]$ or $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\chi'(\theta_2) + uf(u)) = \chi'(\theta_2)$ donc, pour $t \geq t_0$ assez grand, on aura $\chi'(\theta_2) + uf(u) < \frac{3}{4}\chi'(\theta_2)$ (ne pas oublier que $\chi'(\theta_2) < 0$). Posons provisoirement $\gamma = \frac{3}{4}\chi'(\theta_2)$ alors $(e^{-\gamma t} u)' = e^{-\gamma t} (u' - \gamma u) < 0$ donc, en intégrant, $e^{-\gamma t} u(t) \leq e^{-\gamma t_0} u(t_0)$ soit $u(t) \leq e^{\frac{3(t-t_0)\chi'(\theta_2)}{4}} u(t_0) = K e^{\frac{3t}{4}\chi'(\theta_2)}$.

- IV.4.** On déduit de ceci que $0 < u(t) e^{-\chi'(\theta_2)t} \leq e^{-\frac{1}{4}\chi'(\theta_2)t} e^{-\frac{3}{4}t_0\chi'(\theta_2)} u(t_0)$ mais cela ne permet pas de conclure car la dernière quantité tend vers $+\infty$. Il faut faire encore un petit effort : en effet, si on note M un majorant de f (fonction continue définie sur un segment)

$$\begin{aligned} u(t) e^{-\chi'(\theta_2)t} - u(t_0) &= \int_{t_0}^t \left(e^{-\chi'(\theta_2)v} u(v) \right)' dv = \int_{t_0}^t e^{-\chi'(\theta_2)v} [u'(v) - \chi'(\theta_2)u(v)] dv \\ &= \int_{t_0}^t e^{-\chi'(\theta_2)v} u^2(v) f(u(v)) dv \quad \text{en utilisant l'équation du IV.2} \\ &\leq \int_{t_0}^t e^{-\chi'(\theta_2)v} u^2(v) M dv \quad \text{car } f(u(v)) \leq M \end{aligned}$$

or $0 < e^{-\chi'(\theta_2)v} u^2(v) M \leq e^{-\chi'(\theta_2)v} K^2 e^{\frac{3t}{2}\chi'(\theta_2)} M = MK^2 e^{\frac{1}{2}\chi'(\theta_2)t}$ qui est intégrable donc il existe C_0 tel que $u(t) e^{-\chi'(\theta_2)t} \rightarrow C_0$.

- IV.5.** Si on majore $u^2(v)M$ par $C_3 e^{2\chi'(\theta_2)v}$ pour $v \geq t_0$, en vertu de la question **IV.4**, alors, en reprenant l'étude faite ci-dessus,

$$\begin{aligned} C_0 - u(t) e^{-\chi'(\theta_2)t} &= \int_t^{+\infty} \left(e^{-\chi'(\theta_2)v} u(v) \right)' dv = \int_t^{+\infty} e^{-\chi'(\theta_2)v} [u'(v) - \chi'(\theta_2)u(v)] dv \\ &= \int_t^{+\infty} e^{-\chi'(\theta_2)v} u^2(v) f(u(v)) dv \leq \int_t^{+\infty} e^{-\chi'(\theta_2)v} u^2(v) M dv \\ &\leq C_3 \int_t^{+\infty} e^{-\chi'(\theta_2)v} e^{2\chi'(\theta_2)v} dv = \frac{-C_3}{\chi'(\theta_2)} e^{\chi'(\theta_2)t} \quad \text{en majorant } u^2(v)M. \end{aligned}$$

Fort de ce résultat remarquable, on peut continuer notre petit bonhomme de chemin vers la "solution", il suffit de remplacer $u(t)$ par $\tilde{\theta}(t) - \theta_2$ et de multiplier par $e^{\chi'(\theta_2)t}$.

- IV.6.** a. On écrit le développement de ψ au voisinage de θ_2 :

$$\psi(\tilde{\theta}(t)) = \psi \left(\theta_2 + C_0 e^{\chi'(\theta_2)t} + O \left(e^{2\chi'(\theta_2)t} \right) \right) = \psi(\theta_2) + C_0 \psi'(\theta_2) e^{\chi'(\theta_2)t} + O \left(e^{2\chi'(\theta_2)t} \right)$$

puis on exprime la dérivée de $\tilde{\rho}(t) e^{-t\psi(\theta_2)}$:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\rho}(t) e^{-t\psi(\theta_2)} \right)' &= \tilde{\rho}'(t) e^{-t\psi(\theta_2)} - \tilde{\rho}(t) \psi(\theta_2) e^{-t\psi(\theta_2)} \\ &= e^{-t\psi(\theta_2)} \left[C_0 \psi'(\theta_2) \tilde{\rho}(t) + O\left(\tilde{\rho}(t) e^{2\chi'(\theta_2)t}\right) \right] \rightarrow C_0 \psi'(\theta_2). \end{aligned}$$

Si $\psi'(\theta_2) \neq 0$ alors, par intégration, on obtient $\tilde{\rho}(t) \sim C_0 \psi'(\theta_2) t e^{t\psi(\theta_2)}$,
sinon $(\tilde{\rho}(t) e^{-t\psi(\theta_2)})' = O\left(\tilde{\rho}(t) e^{2\chi'(\theta_2)t}\right)$ qui est intégrable d'où l'existence d'une constante C_4 telle que $\tilde{\rho}(t) \sim C_4 e^{t\psi(\theta_2)}$.

Remarque : ici $\tilde{\rho}(t) \sin(\tilde{\theta}(t) - \theta_2) \sim C_0 C_4 e^{t(\psi(\theta_2) + \chi'(\theta_2))}$ ce qui permet de préciser le résultat du **III.2**. En particulier, si $\psi(\theta_2) + \chi'(\theta_2) > 0$, on n'a pas d'asymptote...

b. Si $\psi'(\theta_2) \neq 0$, comme $\tau'(u) = \tilde{\rho}(u)$ alors

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \tau(0) + \int_0^t \tau'(u) du \sim C_0 \psi'(\theta_2) \int_0^t u e^{u\psi(\theta_2)} du \\ &\sim \frac{C_0 \psi'(\theta_2)}{\psi(\theta_2)} t e^{t\psi(\theta_2)}. \end{aligned}$$

Si $\psi'(\theta_2) = 0$ alors, toujours par intégration des relations de comparaison (qui est hors programme), $\tau(t) \sim \frac{C_4}{\psi(\theta_2)} e^{t\psi(\theta_2)}$.

c. On distingue toujours les 2 mêmes cas :

– Si $\psi'(\theta_2) \neq 0$ alors, comme $\tau(t) \sim \frac{C_0 \psi'(\theta_2)}{\psi(\theta_2)} t e^{t\psi(\theta_2)}$,

$$\tilde{\rho}(t) = \rho(\tau(t)) \sim C_0 \psi'(\theta_2) t e^{t\psi(\theta_2)} \sim K \tau(t)$$

soit $\rho(u) \sim \psi(\theta_2) u$ en posant $u = \tau(t)$ puis

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho(t) e^{i\theta(t)} \sim \psi(\theta_2) t e^{i\theta_2} e^{i(\theta(t) - \theta_2)} \\ &\sim \psi(\theta_2) t e^{i\theta_2}. \end{aligned}$$

– Si $\psi'(\theta_2) = 0$ on trouve en fait le même résultat.