SPÉCIALE MP* : DEVOIR LIBRE

Développements asymptotiques de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes. Applications à la formule de Stirling et à la constante d'Euler.

Dans le problème on utilisera les résultat suivants :
Pour tout réel $x \in]-1,1[$, tout réel α alors

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\binom{\alpha}{k}}{k!}x^k + \cdots$$

où $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\ldots)(\alpha-k+1)}{k!}$ désigne le coefficient binomial généralisé
et

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots .$$

Partie I

Développements asymptotiques de restes de séries convergentes, théorème général

I.1. Soient :

(ε_n) une suite de limite 0 lorsque $n \to +\infty$,

p un entier fixe positif ou nul et $p+1$ réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ fixés,

α un réel strictement supérieur à 1.

On pose, si $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{\lambda_0}{n^{\alpha}} + \frac{\lambda_1}{n^{\alpha+1}} + \cdots + \frac{\lambda_p}{n^{\alpha+p}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{\alpha+p}}.$$

La série de terme général u_n est convergente, soit :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Montrer qu'il existe des réels fixes $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p$ tels que :

$$r_n = \frac{\mu_0}{n^{\alpha-1}} + \frac{\mu_1}{n^{\alpha}} + \cdots + \frac{\mu_p}{n^{\alpha+p-1}} + \frac{\varepsilon'_n}{n^{\alpha+p-1}},$$

(ε'_n) désignant une nouvelle suite de limite 0 lorsque $n \to +\infty$.
On pourra pour cela poser :

$$a_n = \frac{\mu_0}{n^{\alpha-1}} + \frac{\mu_1}{n^{\alpha}} + \cdots + \frac{\mu_p}{n^{\alpha+p-1}},$$

et déterminer les coefficients $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p$ de façon que, si l'on pose :

$$v_n = u_n + a_n - a_{n-1},$$

on ait :

$$v_n = \frac{\varepsilon'_n}{n^{\alpha+p}}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0.$$

On donnera les équations explicites fournissant les λ_k en fonction des μ_i.

I.2. *A*pplication numérique :

Posons :

$$u_n = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Calculer $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que :

$$u_n = \frac{\lambda_0}{n^{3/2}} + \frac{\lambda_1}{n^{5/2}} + \frac{\lambda_2}{n^{7/2}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{7/2}} \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Déterminer ensuite μ_0, μ_1, μ_2 tels que :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \frac{\mu_0}{n^{1/2}} + \frac{\mu_1}{n^{3/2}} + \frac{\mu_2}{n^{5/2}} + \frac{\varepsilon'_n}{n^{5/2}} \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0.$$

Partie II
Développement asymptotique de $n!$, formule de Stirling généralisée

On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}},$$
$$b_n = \ln a_n.$$

II.1. On pose, les notations étant celles de la partie I,

$$a'_n = \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}}, \quad b'_n = \ln a'_n.$$

On a donc, d'après les résultats de la partie I,

$$\lim_{n\to+\infty} b'_n = 0.$$

Montrer que :

$$b'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t_k.$$

II.2. En utilisant la partie I, montrer que b'_n admet un développement limité à n'importe quel ordre selon les puissances de $\frac{1}{n}$. Calculer les réels μ_0, μ_1, μ_2 tels que :

$$b'_n = \frac{\mu_0}{n} + \frac{\mu_1}{n^2} + \frac{\mu_2}{n^3} + \frac{\varepsilon'_n}{n^3} \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0.$$

En déduire que :

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{\mu_0}{n} + \frac{\mu_1}{n^2} + \frac{\mu_2}{n^3} + \frac{\varepsilon'_n}{n^3}$$

et donner le développement asymptotique de $n!$ avec un maximum de termes exacts.

Partie III
Recherche d'un développement asymptotique de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$

III.1. Montrer que u_n admet un développement asymptotique de la forme :

$$u_n = \gamma + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots + \frac{\alpha_p}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right).$$

III.2. Pour améliorer la convergence de la suite u_n, on cherche un algorithme qui, à partir des valeurs u_n, u_{n+1},..., u_{n+p}, permet d'obtenir une nouvelle suite v_n qui converge plus rapidement vers γ (sans avoir pour cela à calculer les coefficients successifs du développement asymptotique de u_n).

a. On pose $R^1(u_n) = -nu_n + (n+1)u_{n+1}$, montrer que $R^1(u_n) = \gamma + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b. On pose $R^p(u_n) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+p}\dfrac{(n+i)^p}{i!(p-i)!}u_{n+i}$. Prouver que $R^p(u_n) = \gamma + O\left(\dfrac{1}{n^{p+1}}\right)$.

c. Écrire l'algorithme permettant de calculer les valeurs de $R^3(u_{10})$, $R^3(u_{20})$, $R^3(u_{1000})$ et présenter les résultats obtenus; que remarque-t-on ?
(On précisera la machine utilisée et la précision des calculs.)

Partie IV

Calcul de γ avec la suite

$$\boxed{v_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \ln(n + 1/2)}$$

IV.1. On pose $w_{n,r} = v_n - \sum_{i=1}^{r}\dfrac{\alpha_i}{(n+1/2)^{2i}}$.

a. Montrer que $\dfrac{1}{(n-1/2)^{2i}} - \dfrac{1}{(n+1/2)^{2i}} = \dfrac{1}{n^{2i}}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2(i+k)}{2k+1}\dfrac{1}{2^{2k}n^{2k+1}}$.

b. En déduire que $w_{n-1,r} - w_{n,r} = \sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{a_p}{(2p+1)2^{2p}n^{2p+1}}$ avec $a_p = 1-(2p+1)\sum_{i=1}^{\min(r,p)} b_{i,p}\alpha_i$ et l'on demande de donner la valeur des $b_{i,p}$.

c. Montrer qu'il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ uniques tels que $w_{n-1,r} - w_{n,r} = O\left(\frac{1}{n^{2r+3}}\right)$.

d. En déduire alors que pour les (α_i) calculés ci-dessus, on a

$$v_n = \gamma + \sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i}{(n+1/2)^{2i}} + O\left(\frac{1}{n^{2r+2}}\right).$$

IV.2. On veut maintenant utiliser une méthode analogue à celle de Romberg (utilisée pour le calcul d'intégrales) pour calculer une valeur approchée de γ.

a. Donner en fonction des α_i, $i \in [1, r]$ le développement asymptotique de $\dfrac{9v_{3n+1} - v_n}{8}$.

b. Soit k_n la suite définie par $k_0 = 0$ et $k_{n+1} = 3k_n + 1$; donner l'expression de k_n en fonction de n.

c. On pose alors $t_{n,1} = v_{k_n}$, $t_{n,2} = \dfrac{9t_{n+1,1} - t_{n,1}}{8}$ et par récurrence :

$$t_{n,k+1} = \frac{3^{2k}t_{n+1,k} - t_{n,k}}{3^{2k} - 1}.$$

Écrire le développement en $\dfrac{1}{3^{2k}}$ de $t_{n,1}$, $t_{n,2}$ jusqu'au terme en $\dfrac{1}{3^{2rn}}$.
En déduire par récurrence sur k que

$$t_{n,k} = \gamma + \frac{\alpha_k^{(k)}}{3^{2kn}} + \frac{\alpha_{k+1}^{(k)}}{3^{2(k+1)n}} + \cdots + \frac{\alpha_r^{(k)}}{3^{2rn}} + O\left(\frac{1}{3^{(2r+2)n}}\right).$$

On ne demande pas de calculer les $\alpha_p^{(k)}$!

d. Écrire enfin un algorithme permettant de calculer les $t_{n,k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant 4$ et $1 \leqslant n \leqslant 4 - k + 1$ et présenter les résultats dans un tableau.