# CORRIGÉ DU DEVOIR SUR LES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE SÉRIES

## Partie I : théorème général

**I.1.** Si on pose $v_n = u_n + a_n - a_{n-1}$ alors

$$v_n = \frac{\lambda_0}{n^\alpha} + \cdots + \frac{\lambda_p}{n^{\alpha+p}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{\alpha+p}}$$
$$+ \frac{\mu_0}{n^{\alpha-1}}\left[1 - \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\alpha-1}\right] + \cdots + \frac{\mu_p}{n^{\alpha+p-1}}\left[1 - \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\alpha+p-1}\right]$$

Vu le premier résultat donné alors

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\alpha+k-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha-k} = 1 - \frac{1-\alpha-k}{n} + \cdots + \frac{A_{\alpha+k,p+1-k}}{n^{p+1-k}} + \frac{\varepsilon'_{n,k}}{n^{p+1-k}}.$$

Avec $A_{\alpha+k,h} = (-1)^h \binom{1-\alpha-k}{p} = \binom{\alpha+k+h-2}{h}$.
On a alors, en écrivant tout avec des sommes (on a rassemblé les $\varepsilon'_{n,k}$)

$$\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda_k}{n^{\alpha+k}} - \sum_{i=0}^{p+1} \frac{\mu_i}{n^{\alpha+i-1}} \left(\sum_{j=1}^{p-i+1} \frac{A_{\alpha+i,j}}{n^j}\right) + \frac{\varepsilon''_n}{n^{\alpha+p}} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda_k}{n^{\alpha+k}} - \sum_{i,j} \frac{\mu_i A_{\alpha+i,j}}{n^{\alpha+i+j-1}} + \frac{\varepsilon''_n}{n^{\alpha+p}} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda_k}{n^{\alpha+k}} - \sum_{k=0}^{p} \sum_{i+j=k+1} \frac{\mu_i A_{\alpha+i,j}}{n^{\alpha+k}} + \frac{\varepsilon''_n}{n^{\alpha+p}} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n^{\alpha+k}} \left(\lambda_k - \sum_{i=0}^{k} \mu_i A_{\alpha+i,k+1-i}\right) + \frac{\varepsilon''_n}{n^{\alpha+p}}
\end{aligned}$$

Pour que $v_n = \dfrac{\varepsilon'_n}{n^{\alpha+p}}$ il suffit que l'on ait le système :

$$\begin{array}{lllll}
(\alpha-1)\mu_0 & & & & = \lambda_0 \\
\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}\mu_0 & +\alpha\mu_1 & & & = \lambda_1 \\
\quad\vdots & & \ddots & & \\
A_{\alpha,k+1}\mu_0 & +A_{\alpha+1,k}\mu_1 & +\cdots & +A_{\alpha+k,1}\mu_k & = \lambda_k
\end{array}$$

On obtient alors un <u>système triangulaire</u> ; comme $A_{\alpha+k,1} = \alpha + k - 1 \neq 0$ ($\alpha > 1$), on peut le résoudre et trouver les coefficients $\mu_0$, $\mu_1$,..., $\mu_p$ en fonction de $\lambda_0$, $\lambda_1$,..., $\lambda_p$.
Et on a la formule :

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{k} A_{\alpha+j,k+1-j}\mu_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha+k-1}{k-j+1}\mu_j = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j+1} \binom{1-\alpha-j}{1+k-j}\mu_j$$

Comme $v_n = \dfrac{\varepsilon'_n}{n^{\alpha+p}}$ on sait, d'après le cours que $r'_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \dfrac{\varepsilon''_n}{n^{\alpha+p-1}}$.

Il reste à montrer que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k - a_n$ :

par récurrence sur $p$ : $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} v_k = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k - a_n + a_{n+p}$. $\alpha > 1 \Rightarrow \lim\limits_{p\to+\infty} a_{n+p} = 0$ et comme les séries intervenant convergent, on a bien le résultat annoncé.

**I.2.** On a : $(1-x)^{1/2} = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{5}{128}x^4 + o(x^4)$ lorsque $x \to 0$ d'où

$$\begin{aligned} u_n &= 2\left[\sqrt{n} - \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{16n^3} - \frac{5}{128n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \frac{1}{4n^{3/2}} + \frac{1}{8n^{5/2}} + \frac{5}{64n^{7/2}} + o\left(\frac{1}{n^{7/2}}\right). \end{aligned}$$

Pour trouver les valeurs de $\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2$ on est amené à résoudre le système :

$$\left.\begin{array}{llll} \dfrac{\mu_0}{2} & & & = \lambda_0 \quad = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{8}\mu_0 & +\dfrac{3}{2}\mu_1 & & = \lambda_1 \quad = \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{5}{16}\mu_0 & +\dfrac{15}{8}\mu_1 & +\dfrac{5}{2}\mu_2 & = \lambda_2 \quad = \dfrac{5}{64} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{2},\ \mu_1 = -\frac{1}{24},\ \mu_2 = 0$$

i.e.

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2n^{1/2}} - \frac{1}{24n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right).}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + r_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + r_n$$

d'où, en posant $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} - \alpha + \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{24n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)$$

(ce qui correspond à la formule d'Euler Mac-Laurin).

## Partie II : développement asymptotique de $n!$

**II.1.** Comme $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} t_k = b'_n - b'_{n+p}$ alors, en prenant la limite quand $p \to +\infty$, $\boxed{b'_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} t_k}$.

**II.2.** $t_n$ admet un développement limité à n'importe quel ordre :

$$\begin{aligned} t_n &= -1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \cdots + \frac{1}{pn^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right] \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2k(k+1)n^k} \end{aligned}$$

et en utilisant le résultat du **II.2**, on peut affirmer que
<u>$b'_n$ admet un D.L. à n'importe quel ordre</u> ;

pour avoir le D.L. de $b'_n$ à l'ordre 3, cherchons celui de $t_n$ à l'ordre 4 :
$t_n = -1 + \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\left[\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + \dfrac{1}{4n^4} + \dfrac{1}{5n^5}\right]$ d'où

$$\boxed{t_n = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^3} + \frac{3}{40n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)}$$

Il faut maintenant résoudre le système du **II.2** :

$$\mu_0 = \frac{1}{12},\ \mu_0 + 2\mu_1 = \frac{1}{12} \text{ et } \mu_0 + 3\mu_1 + 3\mu_2 = \frac{3}{40} \Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{12},\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = -\frac{1}{360}$$

donc

$$\boxed{b'_n = \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$

et :

$$\boxed{\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$

et pour conclure :

$$\boxed{n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]}$$

## Partie III : calcul de $\gamma$

**III.1.** On sait que $u_n \to \gamma$ (cf. cours). $u_k - u_{k-1} = \frac{1}{k} - \ln k + \ln(k-1) = \ln(1 - \frac{1}{k}) + \frac{1}{k} = O(\frac{1}{k^2})$ admet un développement limité en $\frac{1}{k}$ à tout ordre et $\gamma - u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(u_k - u_{k-1})$ donc, en vertu du théorème général de la première partie, $\gamma - u_n$ admet un développement asymptotique à tout ordre.

**III.2. a.** Évident.

**b.** C'est la méthode de Richardson...
On prouve les propriétés suivantes :

($i$) Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle de degré $m$, $\Delta F(X) = F(X+1) - F(X)$ alors $\deg(\Delta F) \leqslant m - 1$.

($ii$) On a $\Delta^p F(X) = \sum\limits_{i=1}^{p}\dbinom{p}{i}(-1)^{p+i}F(X+i)$.

Dém : ($i$) On écrit $\Delta F(X) = \dfrac{P(X+1)Q(X) - P(X)Q(X+1)}{Q(X)Q(X+1)}$ or les termes de plus haut degré de $P(X+1)Q(X) - P(X)Q(X+1)$ se simplifient par conséquent $\deg(\Delta F) \leqslant \deg P + \deg Q - 1 - 2\deg Q = m - 1$.
($ii$) Soit $\tau\ : F(X) \mapsto F(X+1)$ alors $\Delta = \tau - \mathrm{Id}$ et on utilise le binôme de Newton dans l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.
On remarque alors que si $F$ est un polynôme de degré $m < p$ alors $\Delta^p F = 0$ et si $F$ est une fraction rationnelle de degré $m$, $\deg \Delta^p F \leqslant m - p$.
Il reste à prouver que $\Delta^p X^p = p!$ : pour cela, on utilise la base de Hilbert définie par $E_i = \dfrac{X(X-1)(X-i+1}{i!}$. On remarque que $\Delta E_i = E_{i-1}$ et en écrivant que $X^p = p!E_p + R$ où $\deg R < p$ on obtient $\Delta^p X^p = p!\Delta^p E_p = p!$.

Maintenant, on dispose de tous les outils pour conclure : on écrit

$$(n+i)^p u_{n+i} = \sum_{k=0}^{p} \alpha_{p-k}(n+i)^k + \sum_{h=1}^{p} \frac{\alpha_{p+h}}{(n+i)^h} + O\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

avec $\alpha_0 = \gamma$. D'où, en posant $P = \sum_{k=0}^{p} \alpha_{p-k}X^k$ et $F = \sum_{h=1}^{p} \frac{\alpha_{p+h}}{X^h}$, on obtient

$$R^p(u_n) = \frac{1}{p!}\left[\Delta^p P(n) + \Delta^p F(n) + O\left(\frac{1}{n^p}\right)\right] \qquad = \gamma + O\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

**c.** En fait, on prouve la formule de récurrence suivante :

$$R^p(u_n) = \frac{1}{p}\left[(n+p)R^{p-1}(u_{n+1}) - nR^{p-1}(u_n)\right].$$

- On pose $R^0(u_n) = u_n$, la formule est vraie pour $p = 1$.
- Calculons $(n+p+1)R^p(u_{n+1}) - nR^p(u_n)$ :

$$\begin{aligned}
(n+p+1)R^p(u_{n+1}) - nR^p(u_n) &= \sum_{i=0}^{p}(n+p+1)(-1)^{i+p}\frac{(n+1+i)^p}{i!(p-i)!}u_{n+1+i} \\
&\qquad - \sum_{i=0}^{p} n(-1)^{i+p}\frac{(n+i)^p}{i!(p-i)!}u_{n+i} \\
&= (n+p+1)\frac{(n+p+1)^p}{p!}u_{n+p+1} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+p+1}\underbrace{\left(\frac{(n+p+1)(n+i)^p}{(i-1)!(p+1-i)!} + \frac{n(n+i)^p}{i!(p-i)!}\right)}_{A_{n,p}}u_{n+i} \\
&\qquad + (-1)^{p+1}\frac{n^{p+1}}{p!}
\end{aligned}$$

  où on a isolé le premier terme de la première somme, changé $i$ en $i-1$ (toujours dans cette première somme) et isolé le dernier terme de la deuxième somme.
  $A_{n,p} = \dfrac{(n+i)^p}{i!(p+1-i)!}\left[(n+p+1)i + n(p+1-i)\right] = (p+1)\dfrac{(n+i)^{p+1}}{i!(p+1-i)!}$ ce qui termine la démonstration.

On peut alors rédiger un algorithme récursif pour calculer les valeurs successives de $R^p(u_n)$.
Voici un premier programme sans utiliser la formule que je viens de démontrer

```
u:=n->sum(1/k,k=1..n)-ln(n);
Digits:=40;
R := proc (n::integer, p::integer)
local i;
 R(n,p) :=sum((-1)^(i+p)*(n+i)^p/i!/(p-i)!*u(n+i),i = 0 .. p);
 evalf(R(n,p))
end proc;
```

On trouve alors
$R(10,3) = 0.577\ 215\ 196$, $R(20,3) = 0.577\ 215\ 626$, $R(3,100) = -0.7\times 10^{17}$.
J'ai mis uniquement les chiffres intéressants (en détachant les erreurs), pour $p = 100$ les erreurs d'arrondi sont manifestes !
Avec la formule de récurrence, on peut écrire le programme suivant

```
u:=n->sum(1/k,k=1..n)-ln(n);
Digits:=40;
R1:=proc(n::integer,p::integer)
local i;
R1(n,0):=u(n);
for i from 0 to p-1 do
   R1(n,i+1):=((n+i+1)*R1(n+1,i)-n*R1(n,i))/(i+1);
od;
evalf(R1(n,p));
end;
```

On trouve alors
$R1(10,3) = 0.577\ 215\ 664\ 902$, $R1(20,3) = 0.577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 606\ 675$, $R1(3,100) = 0.577\ 215\ 664\ 823$ qui donne des résultats bien meilleurs (heureusement). On remarque (et ce n'est pas étonnant) que la deuxième formule est nettement moins sensible aux erreurs d'arrondis que la première.

## Partie IV : calcul de $\gamma$ amélioré

**IV.1. a.** Pour $|x| < 1$, on utilise la relation

$$(1+x)^{-2i} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-2i)(-2i-1)(\ldots)(-2i-h+1)}{h!} x^h = \sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \binom{2i+h-1}{h} x^h.$$

D'où

$$\frac{1}{(n-1/2)^{2i}} - \frac{1}{(n+1/2)^{2i}} = \frac{1}{n^{2i}} \left[ \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-2i} - \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{-2i} \right]$$
$$= \frac{1}{n^{2i}} \sum_{h=0}^{+\infty} \binom{2i+h-1}{h} \left[ \frac{1}{(2n)^h} - \frac{(-1)^h}{(2n)^h} \right]$$

et l'on obtient alors la formule demandée (on remarque que $\dfrac{1}{2n}$ est toujours inférieur à 1, ce qui permet de justifier les développements en séries).

**b.** On écrit alors

$$w_{n-1,r} - w_{n,r} = -\frac{1}{n} + \ln \frac{n+1/2}{n-1/2} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left[ \frac{1}{(n-1/2)^{2i}} - \frac{1}{(n+1/2)^{2i}} \right]$$
$$= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)2^{2p} n^{2p+1}} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{n^{2i}} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2(i+k)}{2k+1} \frac{1}{2^{2k} n^{2k+1}}$$

En posant $p = k + i$ dans la deuxième somme on obtient

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{n^{2i}} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2(i+k)}{2k+1} \frac{1}{2^{2k} n^{2k+1}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{n^{2i}} \sum_{p=i}^{+\infty} \binom{2p}{2(p-i)+1} \frac{1}{2^{2(p-i)} n^{2(p-i)+1}}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} 2^{2i} \alpha_i \sum_{p=1}^{+\infty} \binom{2p}{2(p-i)+1} \frac{1}{2^{2p} n^{2p+1}}$$

(on peut sommer de $p = 1$ à $+\infty$ car si $p \leqslant i-1$, $\dbinom{2p}{2(p-i)+1} = 0$)

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i}{n^{2i}}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2(i+k)}{2k+1}\frac{1}{2^{2k}n^{2k+1}}=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{r}\binom{2p}{2(p-i)+1}\alpha_i 2^{2i}\right)\frac{1}{2^{2p}n^{2p+1}}$$

en permutant une somme finie avec une somme infinie (on fait une somme finie de séries).

On rassemble alors les deux sommes sur $p$ et on trouve la formule demandée avec $a_p = 1-(2p+1)\sum_{i=1}^{\min(r,p)} 2^{2i}\binom{2p}{2(p-i)+1}\alpha_i$ car si $i>p$, $\binom{2p}{2(p-i)+1}=0$.

**c.** On veut que $a_p = 0$ pour $p\in [\![1,r]\!]$ ; ceci est effectivement possible car le système à résoudre sera un système triangulaire.

**d.** Du **c**, on déduit que $w_{n,r}=O\left(\frac{1}{n^{2r+2}}\right)$ et en remplaçant $w_{n,r}$ par son expression, on aura le développement demandé.

Remarque : grâce à l'unicité du développement limité, on peut déduire que les $\alpha_i$ ne dépendent pas de $r$.

**IV.2.** **a.** Après calculs, on obtient :

$$\frac{9v_{3n+1}-v_n}{8}=\gamma-\frac{\alpha_2}{9}\frac{1}{(n+1/2)^4}-\cdots-\frac{\alpha_r}{8}\frac{1-3^{2-2r}}{(n+1/2)^{2r}}+O\left(\frac{1}{(n+1/2)^{2r+2}}\right).$$

**b.** Immédiat : $k_n=\dfrac{3^n-1}{2}$.

**c.** On a les développements suivants

$$t_{n,1}=\gamma+\frac{4\alpha_1}{3^{(2n)}}+\frac{2^4\alpha_2}{3^{4n}}+\cdots+\frac{2^{2r}\alpha_r}{3^{2rn}}+O\left(\frac{1}{3^{(2r+2)n}}\right)$$

$$t_{n,2}=\gamma-\frac{\alpha_2}{9}\frac{2^4}{3^{4n}}-\cdots-\frac{2^{2r}\alpha_r}{8}\frac{1-3^{2-2r}}{3^{2rn}}+O\left(\frac{1}{3^{(2r+2)n}}\right).$$

Enfin, par récurrence, pour passer de l'ordre $k$ à l'ordre $k+1$, on écrira :

$$t_{n,k+1}=\gamma+\frac{1}{3^{2k}-1}\left[\left(\frac{3^{2k}}{3^{2k(n+1)}}-\frac{1}{3^{2kn}}\right)\alpha_k^{(k)}+\cdots+\left(\frac{3^{2k}}{3^{2r(n+1)}}-\frac{1}{3^{2rn}}\right)\alpha_r^{(k)}\right]+O\left(\frac{1}{3^{(2r+2)n}}\right).$$

**d.** Voici un programme qui fonctionne

```
v:=n->sum(1/k,k=1..(3^n-1)/2)-ln(3^n/2);
T:=proc(n::integer,k::integer)
local i;
T(n,1):=v(n);
for i from 1 to k-1 do
   T(n,i+1):=(3^(2*i)*T(n+1,i)-T(n,i))/(3^(2*i)-1);
od;
evalf(T(n,k));
end;
```

| $n\backslash k$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,577 346 0671 | 0,577 215 9803 | 0,577 215 6652 | 0,577 215 664 901 5 |
| 2 | 0,577 217 5863 | 0,577 215 6656 | 0,577 215 6649 | |
| 3 | 0,577 215 6893 | 0,577 215 6649 | | |
| 4 | 0,577 215 6652 | | | |

On pourra comparer les valeurs obtenues avec la suivante :

$$\boxed{\gamma\#0,577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 606\ 512\ 090\ 082\ 402\ 431\ 042\ 159\ 335\ 939\ 92}$$