SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE MINES MATHS 2 2006

Quelques propriétés des racines de P_n'

1 On applique le théorème de Rolle, $P_n(k) = P_n(k+1) = 0$ donc il existe $x_{n,k} \in]k, k+1[$ tel que $P_n'(x_{n,k}) = 0$. On trouve alors n racines, $x_{n,k}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$ et P_n' est un polynôme de degré n donc on a toutes ses racines.
Conclusion : P_n' admet exactement une racine $x_{n,k}$ dans chacun des intervalles $]k, k+1[$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

2 On a $P_n(X) = X^{n+1} - \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{n(n+1)/2}\Big) X^n + Q_{n-1}(X)$ où Q_{n-1} est un polynôme de degré $n-1$

d'où $P_n'(X) = (n+1)X^n - \dfrac{n^2(n+1)}{2} X^{n-1} + Q_{n-1}'(X)$. On utilise alors les relations entre coefficients et racines pour trouver $\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} = \dfrac{n^2}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} = \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{(n-1)n}{2} = \dfrac{n}{2}$.

3 En dérivant la relation $P_n(n - X) = (-1)^{n+1} P_n(X)$ on a $P_n'(n-X) = (-1)^n P_n'(X)$ ce qui donne $P_n'(n - x_{n,k}) = 0$. Or $n - x_{n,k} \in]n-k-1, n-k[$ et par unicité, vu la question **1**, on en déduit que $n - x_{n,k} = x_{n,n-k-1}$.
On a ainsi $x_{n,k} + x_{n,n-k-1} = n$.

4 Immédiat : on écrit $\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-k-1} = x_{n,k} - k + x_{n,n-k-1} - (n-k-1) = 1$.

5 Les racines de P_n' sont simples donc pour chaque $x_{n,k}$, P_n' change de signe. On obtient alors les tableaux de variation suivants :

Si n est pair

x	$-\infty$		0		x_{n_0}		1		x_{n_1}	$\dots$	$2k$		$x_{n,2k}$		$2k{+}1$		$x_{n,2k+1}$		$2k{+}2$	$\dots$
$P_n'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0			$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		
$P_n(x)$		↗	0	↗		↘	0	↘			0	↗		↘	0	↘		↗	0	

Si n est impair

x	$-\infty$		0		x_{n_0}		1		x_{n_1}	$\dots$	$2k$		$x_{n,2k}$		$2k{+}1$		$x_{n,2k+1}$		$2k{+}2$	$\dots$
$P_n'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0			$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		
$P_n(x)$		↘	0	↘		↗	0	↗			0	↘		↗	0	↗		↘	0	

6 Le signe de $(-1)^{n-k} P_n(x_{n,k})$ est constant et vaut 1 (distinguer les cas n pair et n impair).

7 On dérive la relation $P_n(X) = (X-n)P_{n-1}(X)$: $P_n'(X) = P_{n-1}(X) + (X-n)P_{n-1}'(X)$ et en appliquant ceci à $x_{n-1,k}$ on obtient $P_n'(x_{n-1,k}) = P_{n-1}(x_{n-1,k})$ et, en utilisant la question **6**, on en déduit que $(-1)^{n-k} P_{n-1}'(x_{n-1,k}) = (-1) \times (-1)^{n-1-k} P_{n-1}(x_{n-1,k}) < 0$ pour $k \in [\![0, n-2]\!]$.

8 Par convention, on pose $x_{n,-1} = -\infty$ et $x_{n,n} = +\infty$. On a ainsi

$$x_{n,k-1} < k < x_{n,k} < k+1 < x_{n,k+1} \text{ et } k < x_{n-1,k} < k+1 \text{ pour } k \in [\![0, n-2]\!].$$

On a par conséquent $x_{n-1,k} \in]x_{n,k-1}, x_{n,k}[$ ou $x_{n-1,k} \in]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$ mais, comme à la question **5** on avait $(-1)^{n-k} P_n'(x) < 0$ sur $]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$ alors $x_{n-1,k}$ est dans ce dernier intervalle vu la question **7**.
Conclusion : on a $x_{n-1,k} > x_{n,k}$ pour $k \in [\![0, n-2]\!]$.

9 On dérive la relation $P_n(X) = XP_{n-1}(X-1)$: $P_n'(X) = P_{n-1}(X-1) + XP_{n-1}'(X-1)$ et, en substituant $1 + x_{n-1,k-1}$ à X, on trouve $P_n'(1 + x_{n-1,k-1}) = P_{n-1}(1 + x_{n-1,k-1})$. La question **6** nous donne alors $(-1)^{n-k}P_n'(1 + x_{n-1,k-1}) > 0$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

10 On procède par encadrement comme à la question **8**.

11 On a donc, en rassemblant les résultats des questions **8** et **10** :

$$\underbrace{x_{n-1,k}}_{\alpha_{n-1,k}+k} > \underbrace{x_{n,k}}_{\alpha_{n,k}+k} > \underbrace{1 + x_{n-1,k-1}}_{1+\alpha_{n-1,k-1}+k-1}$$

soit $\alpha_{n-1,k} > \alpha_{n,k} > \alpha_{n-1,k-1}$ donc $(\alpha_{n,k})_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est croissante.

Un développement asymptotique

12 $h_x(t) \underset{0}{\sim} t^{x-1}$ intégrable au voisinage de 0 ssi $x > 0$ et $t^2 h_x(t) \to 0$ en $+\infty$ donc $h_x(t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Conclusion : $\mathcal{E} =]0, +\infty[$.

13 On a (par exemple) $\Gamma(x) \geqslant \displaystyle\int_1^2 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t > 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction continue (h_x) strictement positive.

14 On applique le théorème de Leibniz en posant $f(x,t) = h_x(t)$: si $x \in [a,b] \subset]0, +\infty[$ alors, pour $i \in \{1, 2\}$, on a

- $\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) = (\ln t)^i t^{x-1}e^{-t}$ est continue séparément par rapport à x et t sur $]0, +\infty[$,
- $\left|\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\right| \leqslant |\ln t|^i e^{-t}\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = \varphi(t)$. $\varphi(t) \underset{0}{\sim} |\ln t|e^{-t}t^{a-1}$ est intégrable au voisinage de 0 car $t^{1-a/2}\varphi(t) \to 0$ et $1 - a/2 > -1$, $t^2\varphi(t) \to 0$ en $+\infty$ donc φ est aussi intégrable au voisinage de $+\infty$ donc φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On peut donc conclure : Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout segment de $]0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$ puis

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ et } \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

15 C'est une simple application du théorème d'intégration par parties :
soit $0 < \varepsilon < T$ alors, en dérivant t^x et en intégrant e^{-t}, on a

$$\int_\varepsilon^T t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x e^{-t}\right]_\varepsilon^T + x\int_\varepsilon^T t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

or $T^x e^{-T} \to 0$ en $+\infty$ et $\varepsilon^x e^{-\varepsilon} \to 0$ en 0 et comme les fonctions intégrées sont intégrables sur $]0, +\infty[$ alors on peut prendre la limite quand $T \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ pour obtenir finalement $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

16 Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ (rapport de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, le dénominateur ne s'annulant pas) donc il suffit de prouver que $\Psi'(x) > 0$ pour $x \in]0, +\infty[$:

$$\Psi'(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{\Gamma(x)^2}.$$

On utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty} |\ln t|t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \times \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

en écrivant $|\ln t|t^{x-1}e^{-t} = |\ln t|^{1/2}t^{(x-1)/2}e^{-t/2} \times t^{(x-1)/2}e^{-t/2} = f(t)g(t)$. L'inégalité est stricte car le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est réalisé que si les 2 fonctions f et g sont proportionnelles. Comme $f(t) = |\ln t|g(t)$, on peut affirmer que ce n'est pas le cas et donc on a bien $\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2 > 0$ ce qui permet de conclure.

17 Immédiat, en effet on a $\Psi(x+1) = \dfrac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \dfrac{\Gamma(x)+x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ et donc $\Psi(x+1) = \dfrac{1}{x} + \Psi(x)$.

18 On a

$$\phi(n+1)-\phi(n) = \underbrace{\Psi(n+1)-\Psi(n)}_{=1/n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln(1+1/n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série aux différences $\sum \phi(n+1)-\phi(n)$ converge.

19 Comme $\phi(n) = \sum_{k=1}^{n-1}[\phi(k+1)-\phi(k)] + \phi(1)$, on en déduit que la suite $(\phi(n))$ converge.

20 Comme Ψ est strictement croissante (cf. question **16**) alors $\Psi(n) \leqslant \Psi(x) \leqslant \Psi(n+1)$ pour $x \in [n, n+1]$ donc $\underbrace{\Psi(n) - \ln x}_{=\phi(n)+\ln(\frac{n}{x})} \leqslant \phi(x) \leqslant \underbrace{\Psi(n+1) - \ln x}_{=\phi(n+1)+\ln(\frac{n+1}{x})}$ par conséquent $\phi(x)$ admet une limite en $+\infty$ qui vaut aussi C.

21 C'est le théorème (maintenant hors programme) d'intégration des équivalents que l'on demande de redémontrer dans ce cas particulier :
soit $\varepsilon > 0$ alors il existe X tel que $t \geqslant X \Rightarrow |C - \phi(t)| \leqslant |C|\dfrac{\varepsilon}{2}$ on a donc, pour $x \geqslant X$,

$$\left|\int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t - Cx\right| \leqslant \underbrace{\left|\int_1^X \phi(t)\,\mathrm{d}t - CX\right|}_{=A} + \underbrace{\int_X^x |\phi(t) - C|\,\mathrm{d}t}_{\leqslant (x-X)|C|\varepsilon/2 \leqslant x|C|\varepsilon/2}.$$

Comme on a supposé que $C \neq 0$ alors $Cx \to \infty$ quand $x \to +\infty$ donc $\dfrac{A}{Cx} \to 0$ quand $x \to +\infty$. On choisit alors $X_1 \geqslant X$ tel que $\left|\dfrac{A}{Cx}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \geqslant X_1$ par conséquent $\left|\displaystyle\int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t - Cx\right| \leqslant \varepsilon|C|x$ ce qui signifie exactement $\displaystyle\int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} Cx$.

22 On a

$$\begin{aligned}\int_1^n \phi(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^n \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t \\ &= \ln\Gamma(n) - n\ln n + n - 1 = \ln n! - (n+1)\ln n + n - 1\end{aligned}$$

d'où, en utilisant la formule de Stirling,

$$\begin{aligned}&= \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1+o(1)) - (n+1)\ln n + n - 1 \\ &= n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n - (n+1)\ln n + n + O(1) = -\frac{1}{2}\ln n + O(1)\end{aligned}$$

Conclusion : $\displaystyle\int_1^n \phi(t)\,\mathrm{d}t = o(n)$ ce qui est contradictoire avec le résultat de la question **21** donc $C = 0$.

23 La conclusion devient alors immédiate. En effet, par une récurrence simple, on a

$$\begin{aligned}\Psi(x+m+1) &= \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{x+j} + \Psi(x) = \phi(x+m+1) - \ln(x+m+1) \\ &= -\ln m + \underbrace{\phi(x+m+1)}_{\to 0} - \underbrace{\ln[(x+m+1)/m]}_{\to 0}\end{aligned}$$

donc on a bien $\lim\limits_{m\to+\infty}\left[\sum\limits_{j=0}^{m}\dfrac{1}{x+j}+\Psi(x)-\ln m\right]=0$.

Comportement asymptotique des $\alpha_{n,k}$

24 La décomposition de la fraction rationnelle $\dfrac{P_n'}{P_n}$ donne $\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)}=\sum\limits_{j=0}^{n}\dfrac{1}{x-j}$. On prend alors $x=x_{n,k}=k+\alpha_{n,k}$ qui annule P_n' d'où

$$\frac{P_n'(x_{n,k})}{P_n(x_{n,k})}=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\alpha_{n,k}+k-j}=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\alpha_{n,k}+k-j}+\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{\alpha_{n,k}+k-j}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{\alpha_{n,k}+i}-\sum_{i=0}^{n-k-1}\frac{1}{(1-\alpha_{n,k})+i}=0$$

en posant $i=k-j$ dans la première somme et $i=j-k-1$ dans la deuxième.

25 On utilise les questions **23** et **24** mais il faut adapter la question **23** : on a

$$\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{x+j}+\Psi(x)-\ln m=\phi(x+m+1)-\ln\frac{x+m+1}{m}$$

et on encadre chacune de ces quantités :

$$\underbrace{\Psi(m+1)-\ln(m+2)}_{=\phi(m+1)+\ln\frac{m+1}{m+2}}\leqslant\phi(x+m+1)=\Psi(x+m+1)-\ln(x+m+1)\leqslant\underbrace{\Psi(m+2)-\ln(m+1)}_{=\phi(m+2)+\ln\frac{m+2}{m+1}}$$

et $\left|\ln\dfrac{x+m+1}{m}\right|\leqslant\ln\dfrac{m+2}{m}$ ce qui permet de dire que la limite dans la question **23** est uniforme par rapport à $x\in]0,1[$. Ensuite

$$\Psi(u_n)-\Psi(1-u_n)+\underbrace{\sum_{j=0}^{[nt]}\frac{1}{u_n+j}-\sum_{j=0}^{n-[nt]-1}\frac{1}{1-u_n+j}}_{=0}-\ln[nt]+\ln(n-[nt]-1)\to 0$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}[nt]=+\infty$. Or $\ln(n-[nt]-1)-\ln[nt]=\ln\dfrac{1-k_n-1/n}{k_n}$ où $k_n=\dfrac{[nt]}{n}\to t$.
On en déduit alors la formule $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\Psi(u_n)-\Psi(1-u_n)+\ln\left(\dfrac{1-t}{t}\right)\right]=0$.

26 C'est là enfin que l'on utilise la fonction $\operatorname{Arc\,cot}$ et la formule des compléments.
Si on dérive logarithmiquement la formule des compléments, on obtient

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}-\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}=\Psi(x)-\Psi(1-x)=-\pi\cot(\pi x).$$

En reprenant la formule de la question précédente, on a

$$\Psi(u_n)-\Psi(1-u_n)=-\pi\cot(\pi u_n)=-\ln\frac{1-t}{t}+o(1)$$

soit $u_n=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arc\,cot}\left[\dfrac{1}{\pi}\ln\left(\dfrac{1-t}{t}\right)+o(1)\right]$ donc (u_n) admet une limite $F(t)$ qui vaut $\dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arc\,cot}\left[\dfrac{1}{\pi}\ln\left(\dfrac{1-t}{t}\right)\right]$.