SPÉCIALE MP* : DEVOIR LIBRE

Vu les commentaires des jurys des concours, on demande dans ce premier devoir de faire

- un effort de présentation :
  - écrire lisiblement,
  - mettre en évidence les résultats (les souligner ou les encadrer, les dégager),
- un effort de rédaction :
  - bien justifier les théorèmes utilisés,
  - bien structurer les arguments (revenir à la ligne pour chacun d'entre eux),
- et aussi un effort de concision.

On pourra admettre les résultats d'une question à condition de le mentionner explicitement.

Préliminaires

Soir $z \in \mathbb{C}$, on dit que z est un nombre algébrique si, et seulement si, il existe un polynôme non nul $A(X)$ élément de $\mathbb{Z}[X]$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, tel que $A(z) = 0$. Dans le cas contraire, on dira que z est un nombre transcendant. Le but de ce problème est de faire démontrer que les nombres e et π sont transcendants (résultats dus respectivement à Hermite et Lindemann).

Soit $B(X) \in \mathbb{Z}(X)$ un polynôme unitaire (c'est à dire dont le coefficient dominant vaut 1) de racines $\beta_1, \ldots, \beta_r$, comptées avec leur ordre de multiplicité.

On admettra les deux résultats suivants notés R_1 et R_2.

R_1 Pour tout entier $k \geqslant 0$, la quantité $S_k = \sum_{j=1}^{r} \beta_j^k$ appartient à $\mathbb{Z}$.

R_2 Soit t un entier quelconque appartenant à $\{1, \ldots, r\}$, $\xi_{J_t} = \sum_{j \in J_t} \beta_j$ où $J_t \in \mathcal{P}_t$ famille des parties à t éléments de $\{1, 2, \ldots, r\}$ alors $B_t(X) = \prod_{J_t \in \mathcal{P}_t} (X - \xi_{J_t})$ est un polynôme unitaire appartenant à $\mathbb{Z}[X]$.

Première partie

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P(X) \in \mathbb{C}[X]$. On pose $Q(X) = \sum_{k \geqslant 0} P^{(k)}(X)$ (où $P^{(k)}(X)$ désigne la dérivée d'ordre k de $P(X)$).

I.1. Établir que la formule définissant Q a bien un sens.

I.2. Exprimer $P(X)$ en fonction de $Q(X)$ et de $Q'(X)$.

I.3. Montrer que $e^\alpha Q(0) = Q(\alpha) + R(\alpha)$ où

$$R(\alpha) = e^\alpha \int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} P(\alpha x) \, \mathrm{d}x.$$

Les parties **II** et **III** sont indépendantes mais reposent toutes deux sur la partie **I**. La partie **II** vise à établir la transcendance de e, la partie **III** celle de π.

Deuxième partie

On suppose l'existence de $A(X) \in \mathbb{Z}[X]$, avec $A(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ de degré n ($a_n \neq 0$) tel que $A(e) = 0$. Dans toute cette partie **II**, nous fixons un tel $A(X)$.

Montrer que l'on peut se ramener au cas où $a_0 \neq 0$.

II.1. Soit $P(X) = \dfrac{X^{p-1}}{(p-1)!}(X-1)^p(X-2)^p \dots (X-n)^p$ où p est un nombre entier *premier* arbitraire supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que, pour $r \geqslant p$, $P^{(r)}(X)$ est un polynôme à coefficients entiers divisibles par p (ne pas faire de calculs !).

b. Dire pourquoi $P^{(r)}(j) = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ et $r = 0, 1, \dots, p-1$ et $P^{(r)}(0) = 0$ pour $r = 0, 1, \dots, p-2$ et calculer $P^{(p-1)}(0)$.

II.2. Soit $Q(X)$ (et $R(\alpha)$) définis à partir de $P(X)$ comme dans la partie **I**. Calculer $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j Q(j)$ en fonction des quantités a_j et $R(j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$.

II.3. **a.** Montrer que $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j Q(j)$ est divisible par le nombre premier p.

b. Montrer que, pour p assez grand, $a_0 P^{(p-1)}(0)$ n'est pas divisible par p. En déduire que

$$\left| \sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) \right| \geqslant 1.$$

II.4. **a.** Montrer que, pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x \in [0, 1]$,

$$|P(jx)| \leqslant \frac{(n!)^p}{(p-1)!} \text{ puis } |R(j)| \leqslant n e^n \frac{(n!)^p}{(p-1)!}.$$

b. n étant fixé, montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout nombre premier $p \geqslant p_0$, on a

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j R(j) \right| < 1.$$

c. En conclure que e est transcendant.

Troisième partie

III.1. **a.** Montrer que, si $z \in \mathbb{C}$ est algébrique, alors iz est également algébrique.

b. Montrer que, si $z \in \mathbb{C}$ est algébrique, alors il existe un entier relatif c non nul et un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $B(X)$ tel que $B(cz) = 0$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que π est algébrique.

c. Vérifier qu'il existe $c \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ et $B(X) \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré n tel que $B(ic\pi) = 0$. On notera $c\beta_q$ (avec $1 \leqslant q \leqslant n$), les racines de $B(X)$ comptées avec leur ordre de multiplicité.

III.2. Montrer que

$$\prod_{q=1}^{n} (1 + e^{\beta_q}) = 0.$$

Montrer que $\prod\limits_{q=1}^{n} (1 + e^{\beta_q})$ s'écrit sous la forme $E + e^{\alpha_1} + \cdots + e^{\alpha_s}$ où E est un entier strictement positif et $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ des nombres complexes non nuls qui s'expriment en fonction des nombres β_q.

Dire pourquoi E n'est pas forcément égal à 1.

III.3. Soit $P(X) = \dfrac{(cX)^{p-1}}{(p-1)!}\displaystyle\prod_{j=1}^{s}(cX - c\alpha_j)^p$ où p est un nombre *premier* arbitraire et c introduit au **III.1.c**.

a. Soit $P_1(Y) = P(\frac{Y}{c})$, montrer que $(p-1)!P_1(Y)$ est un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$. En déduire que $(p-1)!P(X)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
On remarque, comme au **II.1.b.**, que $P^{(r)}(j)$ s'annule pour $j = 0$ si $0 \leqslant r < p-1$, et s'annule pour $j = \alpha_k$, $1 \leqslant k \leqslant s$, si $0 \leqslant r < p$.

b. Montrer que, pour $r \geqslant p$, $P^{(r)}(0)$ est divisible par p.

c. Montrer que $\sum_{j=1}^{s} P^{(r)}(\alpha_j)$ est, pour $r \geqslant p$, un entier divisible par p.

III.4. On définit $Q(X)$ (et $R(\alpha)$) à partir de $P(X)$ comme dans la partie **I**. Calculer

$$EQ(0) + \sum_{j=1}^{s} Q(\alpha_j)$$

en fonction des quantités $R(\alpha_j)$, $1 \leqslant j \leqslant s$.

III.5. Calculer $P^{(p-1)}(0)$ et montrer que, pour p assez grand, $EP^{(p-1)}(0)$ est un entier non divisible par p. En déduire que

$$\left| EQ(0) + \sum_{j=1}^{s} Q(\alpha_j) \right| \geqslant 1.$$

III.6. **a.** Montrer que, pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant s$ on a

$$|R(\alpha_j)| \leqslant He^H \left| \frac{(cH)^{p-1}(2cH)^{ps}}{(p-1)!} \right|$$

où $H = \sup_{1 \leqslant j \leqslant s} |\alpha_j|$.

b. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout p nombre premier plus grand que p_0, on a

$$\left| \sum_{j=1}^{s} R(\alpha_j) \right| < 1.$$

c. En déduire que π est transcendant.