SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR LIBRE

Partie I

I.1. Si $n = \deg P$ alors $P^{(n+1)} = 0$ donc la sommation étant finie, elle est parfaitement définie.

I.2. On a immédiatement $P = Q - Q'$.

I.3. On remarque ensuite que $\alpha e^{-\alpha x}(Q(\alpha x) - Q'(\alpha x)) = [e^{-\alpha x}Q(\alpha x)]'$. Or $Q - Q' = P$ donc, après intégration, on obtient

$$\boxed{R(\alpha) = e^{\alpha}Q(0) - Q(\alpha).}$$

Partie II

Si $A(X) = X^p A_1(X)$ alors $A_1(e) = 0$, si on choisit pour p la valuation de A alors $A_1(0) \neq 0$ ce qui revient à supposer que $a_0 \neq 0$.

II.1. a. On a $P(X) = \dfrac{1}{(p-1)!}\sum\limits_{m=p-1}^{np+p-1} b_m X^m$ où $b_m \in \mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau, or

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{(p-1)!}b_m X^m\right)^{(p)} &= b_m\frac{m(m-1)(\ldots)(m-p+1)}{(p-1)!}X^{m-p}\\ &= pb_m\binom{m}{p}X^{m-p}\end{aligned}$$

i.e.

$$\boxed{\text{tous les coefficients de } P^{(p)} \text{ sont entiers et divisibles par } p,}$$

il en est donc de même pour $P^{(r)}$ avec $r \geqslant p$.

b. Les nombres $j \in [1, n]$ sont racines d'ordre p de P donc $P^{(r)}(j) = 0$ pour $r \in [0, p-1]$. 0 est racine d'ordre $p-1$ de P donc, de même, $P^{(r)}(0) = 0$ pour $r \in [0, p-2]$.
On a

$$\boxed{P^{(p-1)}(0) = (-1)^{np}(n!)^p}$$

(il suffit de regarder le coefficient du terme de degré $p-1$ dans l'expression de P).

II.2. Comme $Q(j) = e^j Q(0) - R(j)$ vu la partie **I**, alors, par sommation :

$$\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) = Q(0)\sum_{j=0}^{n} a_j e^j - \sum_{j=0}^{n} a_j R(j)$$

d'où, en tenant compte de l'hypothèse $A(e) = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) = -\sum_{j=1}^{n} a_j R(j)}$$

car $R(0) = 0$.

II.3. a. On a $Q(j) = \sum\limits_{r \geqslant 0} P^{(r)}(j) = \sum\limits_{r \geqslant p} P^{(r)}(j)$ et comme chaque terme de la dernière somme est un entier multiple de p (en effet $P^{(r)}(X) = p\sum\limits_{m=p-1}^{np+p-1} b_m\dbinom{m}{p}X^{m-p} \in p\mathbb{Z}[X]$), il en est de même de la somme (finie) et donc de $Q(j)$.

Conclusion : $\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_j Q(j) \text{ est divisible par } p.}$

b. On a $a_0 P^{(p-1)}(0) = a_0(-1)^{np}(n!)^p$. Si $p > \max(n, |a_0|)$ alors p (qui est un nombre premier) est premier avec $n!$ et a_0 donc $a_0 P^{(p-1)}(0)$ n'est pas divisible par p.

Pour de telles valeurs de p, $a_0 Q(0) = a_0 P^{(p-1)}(0) + a_0 \sum_{r \geqslant p} P^{(r)}(0)$ n'est pas divisible par p car les termes de la somme sont tous multiples de p et le premier terme ne l'est pas (on sait que $P^{(r)}(0) = 0$ pour $r \leqslant p-2$).

Comme $\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j)$ est un entier non divisible par p, il est non nul et, pour p grand

$$\boxed{\left|\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j)\right| \geqslant 1.}$$

II.4. a. On sait que $R(j) = je^j \int_0^1 e^{-jx} P(jx)\,\mathrm{d}x$ et donc, avec $j \leqslant n$ et $e^{-jx} \leqslant 1$ on obtient

$$\forall j \leqslant n,\ |R(j)| \leqslant ne^n \int_0^1 |P(jx)|\,\mathrm{d}x.$$

Majorons $|P(jx)|$: si $L(t) = (t-1)(t-2)(\ldots)(t-n)$ alors $P(t) = \dfrac{(tL(t))^{p-1}L(t)}{(p-1)!}$.

Pour $t \in [k, k+1]$ (où $k \in [0, n-1]$), comme $\begin{cases} |t-i| \leqslant k+1-i & \text{si } k-i \geqslant 0 \\ |t-i| \leqslant i-k & \text{si } k-i \leqslant -1 \end{cases}$ on a

$$\begin{aligned} |tL(t)| &\leqslant (k+1).(\ldots).2.1.1.2.(\ldots).(n-k) \\ &= (k+1)!(n-k)! \\ &= \frac{(n+1)!}{\dbinom{n+1}{k+1}} \end{aligned}$$

et, vu que $\dbinom{n+1}{k+1} \geqslant n+1$ pour $k \in [0, n-1]$ on obtient $|tL(t)| \leqslant n!$. Cette majoration étant indépendante de k elle est valable pour $t \in [0, n]$. On a de même $|L(t)| \leqslant n!$ d'où

$$\forall j \in [1, n],\ \forall x \in [0, 1],\ |P(jx)| \leqslant \frac{(n!)^{p-1} n!}{(p-1)!}$$

et donc, en revenant à l'inégalité du début,

$$\boxed{R(j) \leqslant ne^n \frac{(n!)^p}{(p-1)!}.}$$

b. On a donc

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=1}^{n} a_j R(j)\right| &\leqslant ne^n \frac{(n!)^p}{(p-1)!} \sum_{j=1}^{n} |a_j| \\ &= A_n \frac{(n!)^p}{(p-1)!} = \alpha_p \end{aligned}$$

où $A_n = ne^n \sum\limits_{j=1}^{n} |a_j|$. n est un entier fixé et comme $\dfrac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} = \dfrac{n!}{p} \to 0$ on sait que $\alpha_p \to 0$ et donc, à partir d'un certain rang p_0, vu que l'ensemble des nombres premiers est infini, on a

$$\boxed{\left|\sum_{j=1}^{n} a_j R(j)\right| \leqslant \alpha_p < 1.}$$

c. Comme $R(0) = 0$ alors, en reprenant l'égalité du **II.2.** on a

$$1 \leqslant \left|\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_j R(j)\right| < 1$$

ce qui est contradictoire. Conclusion :

$$\boxed{e \text{ est transcendant.}}$$

Partie III

III.1. a. Soit z un nombre algébrique et $A = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j X^j$ un polynôme annulateur de z. Soit $B(z) = A(-iz) = \sum\limits_j a_{2j}(-1)^j z^{2j} - i\sum\limits_j a_{2j+1} z^{2j+1}$ alors $B(iz) = 0$ mais les coefficients du polynôme B ne sont pas dans $\mathbb{Z}$. Cependant,

$$\left(\sum_j a_{2j}(-1)^j z^{2j}\right)^2 + \left(\sum_j a_{2j+1} z^{2j+1}\right)^2 = B(z).\left(\sum_j a_{2j}(-1)^j z^{2j} + i\sum_j a_{2j+1} z^{2j+1}\right)$$

est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ annulateur de iz donc

$$\boxed{iz \text{ est algébrique.}}$$

b. Si $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ est un polynôme annulateur de z alors le polynôme $X^n + a_{n-1}a_n X^{n-1} + \cdots + a_0 a_n^n$ est

$$\boxed{\text{un polynôme unitaire annulateur de } a_n z.}$$

c. Ceci est une conséquence immédiate des deux questions précédentes. En effet, d'après le a., vu l'hypothèse faite sur π, $i\pi$ est algébrique et d'après le b., il existe $c \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ et $B \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $B(ic\pi) = 0$.

III.2. Comme il existe q tel que $\beta_q = i\pi$ et que $1 + e^{i\pi} = 0$ alors

$$\boxed{\prod_{q=1}^{n}(1 + e^{\beta_q}) = 0.}$$

En sachant que $\prod\limits_{q=1}^{n}(X+e^{\beta_q}) = X^n + X^{n-1}\sum\limits_q e^{\beta_q} + \cdots + X^{n-k}\sum\limits_{J_k} e^{\beta_{q_1}+\cdots+\beta_{q_k}} + \cdots + e^{\beta_1+\cdots+\beta_p}$ (développement d'un polynôme), si on remplace X par 1 alors on aura

$$\prod_{q=1}^{n}(1 + e^{\beta_q}) = 1 + \sum_q e^{\beta_q} + \sum_{q_1,q_2} e^{\beta_{q_1}} e^{\beta_{q_2}} + \cdots + e^{\beta_1+\cdots+\beta_p}$$

qui est de la forme

$$\boxed{E + \sum_{i=1}^{s} e^{\alpha_i}}$$

(si l'une des sommes $\beta_{q_1}+\cdots+\beta_{q_k}$ est nulle, on rajoute 1 à E), les α_i étant des sommes des racines β_q.

III.3. a. On pose $I_t=\{j\in[\![1,s]\!] \mid \exists J_t,\ \alpha_j=\sum_{i\in J_t}\beta_i\}$ alors, si k_t désigne le nombre de fois où il existe un J_t tel que $\sum_{i\in J_t}\beta_i=0$,

$$B_t=\prod_{t=1}^{n}(X-c\xi_{J_t})=X^{k_t}\prod_{j\in I_t}(X-c\alpha_j)\in\mathbb{Z}[X]$$

d'après la propriété R_2. Donc $R_t=\dfrac{B_t}{X^{k_t}}\in\mathbb{Z}[X]$ est un polynôme unitaire et le polynôme unitaire $\prod R_t\in\mathbb{Z}[X]$ admet exactement pour racines les $c\alpha_i$.
Ce polynôme s'écrit $\prod_{i=1}^{s}(Y-c\alpha_i)$ et donc $(p-1)!P_1(Y)=Y^{p-1}\prod_{i=1}^{s}(Y-c\alpha_i)^p$ est unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$. A fortiori,

$$\boxed{\text{le polynôme } (p-1)!P(X) \text{ est aussi dans } \mathbb{Z}[X].}$$

b. Si $(p-1)!P(X)=\sum_{k=p-1}^{d}b_kX^k$ alors $(p-1)!P^{(r)}(0)=r!b_r$ et pour $r\geqslant p$

$$P^{(r)}(0)=p(p+1)(\ldots)r.b_r$$

est multiple de p vu que l'on a prouvé que les b_k étaient entiers.

c. On a $P(X)=P_1(cX)$ d'où $P^{(r)}(\alpha_j)=c^rP_1(c\alpha_j)$ et donc

$$\sum_{j=1}^{s}P^{(r)}(\alpha_j)=c^r\sum_{j=1}^{s}P_1^{(r)}(c\alpha_j).$$

Or, si on écrit

$$P_1(Y)=\frac{1}{(p-1)!}\left[Y^{ps+p-1}+u_{ps+p-2}Y^{ps+p-2}+\cdots+u_{p-1}Y^{p-1}\right]$$

alors $P_1^{(r)}(Y)$ est un polynôme à coefficients entiers divisibles par p ($r\geqslant p$)—cf. **II.1.a.**—

$$P_1^{(r)}(Y)=p\sum_{k=0}^{d}v_kY^k \text{ où } v_k\in\mathbb{Z} \text{ et}$$

$$\sum_{j=1}^{s}P_1^{(r)}(c\alpha_j)=p\sum_{k=0}^{d}v_k\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{s}(c\alpha_j)^k\right)}_{\in\mathbb{Z}}$$

car les $c\alpha_j$ sont les racines d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Conclusion : $\sum_{j=1}^{s}P^{(r)}(\alpha_j)=pc^rN$ où $N\in\mathbb{Z}$ i.e.

$$\boxed{\forall r\geqslant p,\ \sum_{j=1}^{s}P^{(r)}(\alpha_j) \text{ est un entier divisible par } p.}$$

III.4. $Q(\alpha_j) = e^{\alpha_j} Q(0) - R(\alpha_j)$ donc

$$\begin{aligned} EQ(0) + \sum_{j=1}^{s} Q(\alpha_j) &= Q(0)\left(E + \sum_{j=1}^{s} e^{\alpha_j}\right) - \sum_{j=1}^{s} R(\alpha_j) \\ &= -\sum_{j=1}^{s} R(\alpha_j) \end{aligned}$$

car, d'après le **III.2.**, le facteur de $Q(0)$ est nul.

III.5. Si on revient à l'expression de P,

$$\boxed{P^{(p-1)}(0) = c^{p-1}(-1)^{sp}\left(\prod_{j=1}^{s} c\alpha_j\right)^{p}}$$

et, vu que les $c\alpha_j$ sont racines d'un polynôme unitaire, alors, d'après la propriété R_2, on sait que $\prod_{j=1}^{s} c\alpha_j = m \in \mathbb{Z}$ (on peut par exemple utiliser les relations entre coefficients et racines d'un polynôme). Donc, pour $p > \max(c, |m|)$, $P^{(p-1)}(0)$ est un entier premier avec p (puisque p est premier avec c et m).

$$EQ(0) + \sum_{j=1}^{s} Q(\alpha_j) = P^{p-1}(0) + \sum_{r \geqslant p} P^{(r)}(0) + \sum_{j=1}^{s} Q(\alpha_j)$$

est alors un entier non nul (il est premier avec p) donc

$$\boxed{\left|EQ(0) + \sum_{j=1}^{s} Q(\alpha_j)\right| \geqslant 1.}$$

III.6. **a.** Comme $P(\alpha_j x) = \dfrac{(c\alpha_j x)^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{k=1}^{s} c^p(\alpha_j x - \alpha_k)^p$ alors, avec $H = \sup_j |\alpha_j|$ on a :

$$\forall x \in [0,1],\ |\alpha_j x - \alpha_k| \leqslant |\alpha_j| + |\alpha_k| \leqslant 2H$$

et donc

$$\forall x \in [0,1],\ |P(\alpha_j x)| \leqslant \frac{(|c|H)^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{k=1}^{s}(2|c|H)^p = \frac{(|c|H)^{p-1}}{(p-1)!}(2|c|H)^{ps}$$

d'où, en utilisant le fait que $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \leqslant e^{|z|}$,

$$\begin{aligned} |R(\alpha_j)| &\leqslant \frac{(|c|H)^{p-1}}{(p-1)!}(2|c|H)^{ps}\int_0^1 |\alpha_j| e^{\alpha_j(1-x)}\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{(|c|H)^{p-1}}{(p-1)!}(2|c|H)^{ps} H e^H \end{aligned}$$

vu que $|\alpha_j(1-x)| \leqslant |\alpha_j| \leqslant H$.

b. On a donc $\left|\sum_{j=1}^{s} R(\alpha_j)\right| \leqslant \dfrac{sHe^H}{|c|H(p-1)!}[|c|H(2|c|H)^s]^p = K\dfrac{A^p}{(p-1)!}$ et comme ce dernier majorant tend vers 0 quand p tend vers l'infini, comme au **II**, il existe p_0 tel que

$$\boxed{p \geqslant p_0 \Rightarrow \left|\sum_{j=1}^{s} R(\alpha_j)\right| < 1.}$$

c. Comme au **II**, les inégalités obtenues au **III.5.** et au **III.6.** sont incompatibles (compte tenu de la relation prouvée au **III.4.**) donc on peut conclure

$$\boxed{\pi \text{ est bien transcendant.}}$$