X, Première composition MP 2010

Corrigé rédigé par Denis Choimet

Préliminaires

1.a) Si β est nulle, alors α l'est aussi et le résultat est évident avec $\lambda = 0$. Dans le cas contraire, on peut choisir un vecteur b de $\mathbb{R}^n$ tel que $\beta(b) = 1$. En posant $\lambda = \alpha(b)$, on voit que les formes linéaires $\lambda\beta$ et α coïncident sur $\ker \beta$ et sur $\mathbb{R}b$, donc sur $\mathbb{R}^n$ puisque $\mathbb{R}^n = \ker \beta \oplus \mathbb{R}b$.

$$\boxed{\text{Il existe donc } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \alpha = \lambda\beta.}$$

1.b) Raisonnons par récurrence sur $r \geq 1$ comme le suggère l'énoncé.

- Si $r = 1$, le résultat relève de la question **1.a)**.
- Soit $r \geq 2$, supposons le résultat vrai au rang $r-1$, et soit $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $\bigcap_{i=1}^{r} \ker \beta_i \subset \ker \alpha$.

  Posons $F = \bigcap_{i=1}^{r-1} \ker \beta_i$, et notons $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta_r}$ les restrictions de α et β_r à F. On a alors

  $$\ker \widehat{\beta_r} = F \cap \ker \beta_r = \bigcap_{i=1}^{r} \ker \beta_i \subset \ker \alpha.$$

  Comme $\ker \widehat{\beta_r}$ est également contenu dans F, on a en réalité

  $$\ker \widehat{\beta_r} \subset F \cap \ker \alpha = \ker \widehat{\alpha}.$$

  D'après la question **1.a)**, il existe un réel λ_r tel que

  $$\widehat{\alpha} = \lambda_r \widehat{\beta_r},$$

  ce qui signifie que la forme linéaire $\alpha - \lambda_r\beta_r$ est nulle sur F. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

  $$\alpha - \lambda_r\beta_r = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \beta_i \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R},$$

  d'où le résultat.

Remarque 1. On peut aussi raisonner par dualité, en notant que l'hypothèse peut s'écrire

$$(\mathrm{Vect}\,(\beta_1, \ldots, \beta_r))_{\perp} \subset (\mathbb{R}\alpha)_{\perp},$$

d'où $\left((\mathrm{Vect}\,(\beta_1, \ldots, \beta_r))_{\perp}\right)^{\perp} \supset \left((\mathbb{R}\alpha)_{\perp}\right)^{\perp}$, soit (dimension finie !)

$$\mathbb{R}\alpha \subset \mathrm{Vect}\,(\beta_1, \ldots, \beta_r).$$

Première partie

2. On a alors $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \|\gamma(t)\|^2 = 1$ pour $|t| < 1$. En dérivant cette identité, on obtient l'égalité $\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$, d'où

$$\boxed{\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \text{ pour } |t| < 1.}$$

3. Définissons tout naturellement l'application $\gamma :]-1, 1[\to \mathbb{R}^n, t \mapsto \dfrac{x + tv}{\|x + tv\|}$. On observe tout d'abord que γ est bien définie, car la famille (x, v) est libre. En écrivant

$$\gamma(t) = \frac{x + tv}{\left(\|x + tv\|^2\right)^{1/2}} = \frac{x + tv}{\left(1 + t^2\|v\|^2\right)^{1/2}},$$

on voit que γ est de classe C^1. Bien évidemment, $\gamma(0) = \frac{x}{\|x\|} = x$. Enfin on a, lorsque $t \to 0$:

$$\gamma(t) = (1 + o(t))(x + tv) = x + tv + o(t),$$

d'où $\gamma'(0) = v$. En définitive,

$$\boxed{\gamma \text{ est } C^1,\ \|\gamma(t)\| = 1 \text{ pour } |t| < 1,\ \gamma(0) = x \text{ et } \gamma'(0) = v.}$$

Remarque 2. L'interprétation géométrique des questions **2.** et **3.** est la suivante : l'espace (affine) tangent à la sphère S^{n-1} au point x est l'hyperplan affine $x + x^{\perp}$.

4. La fonction f est continue (car de classe C^1) sur $\mathbb{R}^n$, de sorte que g l'est sur S^{n-1}. D'autre part, la sphère S^{n-1} est compacte car $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie. Cela prouve que

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ admet des extrema.}}$$

Soit $x \in S^{n-1}$ un point en lequel g atteint un extremum. Fixons $v \in x^{\perp}$ non nul. En conservant les notations de la question précédente, définissons l'application

$$\phi :]-1, 1[\to \mathbb{R}, t \mapsto g(\gamma(t)) = f(\gamma(t)).$$

Elle est de classe C^1, et admet en 0 un extremum. Par suite, $\phi'(0) = 0$. Or, $\phi'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$, d'où $\phi'(0) = df_x(v)$. Ainsi, $df_x(v) = 0$ pour tout $v \in x^{\perp}$. Ou encore : $\ker\langle x, \cdot\rangle \subset \ker df_x$. D'après la question **1.**, il existe un réel λ tel que

$$\boxed{df_x(h) = \lambda\langle x, h\rangle \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}^n.}$$

5. La fonction f est de classe C^1, car polynomiale. Pour calculer sa différentielle, on fixe $x \in \mathbb{R}^n$ et on écrit, pour $h \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x + h) - f(x) = \langle x, Ah\rangle + \langle h, Ax\rangle + \langle h, Ah\rangle = \underbrace{2\langle Ax, h\rangle}_{\text{linéaire (et continu) en } h} + \langle h, Ah\rangle,$$

la dernière égalité ayant lieu parce que A est symétrique. Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle h, Ah\rangle| \leq \|A\|_{\text{sub}} \cdot \|h\|^2$, si bien que $\langle h, Ah\rangle = o(\|h\|)$ quand $h \to 0$. On a donc prouvé que

$$\boxed{df_x(h) = 2\langle Ax, h\rangle \text{ pour } h \in \mathbb{R}^n.}$$

5.b) Soit x un vecteur en lequel la restriction de f à S^{n-1} présente un extremum. D'après les questions précédentes, il existe un réel λ tel que $2\langle Ax, h\rangle = \lambda\langle x, h\rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Comme le produit scalaire est non dégénéré, cela oblige $Ax = \frac{\lambda}{2}x$. Comme x est de plus non nul,

$$\boxed{x \text{ est un vecteur propre de } A.}$$

Deuxième partie

6.a) Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\operatorname{tr}({}^tMM) = \sum_{j=1}^{n} [{}^tMM]_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}^2,$$

d'où

$$\boxed{q(M) = \operatorname{tr}({}^tMM).}$$

6.b) La linéarité « à droite » provient de la linéarité de la trace. La symétrie se voit en écrivant

$$\operatorname{tr}({}^tAB) = \operatorname{tr}\left({}^t({}^tAB)\right) = \operatorname{tr}({}^tBA).$$

Enfin, le caractère défini positif découle de la question précédente.
6.c) La fonction q est de classe C^1 car polynomiale. Pour calculer sa différentielle, on fixe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on écrit, pour $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$q(M+H) - q(M) = \operatorname{tr}({}^tMH) + \operatorname{tr}({}^tHM) + \operatorname{tr}({}^tHH) = 2\operatorname{tr}({}^tMH) + \|H\|^2,$$

en notant $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire défini à la question **6.b)**. On a donc, lorsque $H \to 0$:

$$q(M+H) - q(M) = \underbrace{2\operatorname{tr}({}^tMH)}_{\text{linéaire en } H} + o(\|H\|),$$

ce qui prouve que

$$\boxed{dq_M(H) = 2\operatorname{tr}({}^tMH) \text{ pour } H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

7. Nous noterons M_{ij} le cofacteur d'indice (i,j) de la matrice M. Rappelons que ce cofacteur est égal à $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, où Δ_{ij} désigne le déterminant de la matrice obtenue à partir de M en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne. En développant $\det(M+tE_{ij})$ selon sa j-ième colonne, on obtient

$$\det(M+tE_{ij}) = (m_{ij}+t)M_{ij} + \sum_{k\neq i} m_{kj}M_{kj} = \boxed{\det M + tM_{ij}.}$$

En particulier, $\frac{\det(M+tE_{ij})-\det M}{t} \to M_{ij}$ quand $t \to 0$. Cela prouve que $df_M(E_{ij}) = M_{ij}$.
Ensuite, si $H = \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{ij}E_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$df_M(H) = \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{ij}\,df_M(E_{ij}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{ij}M_{ij},$$

soit

$$\boxed{df_M(H) = \operatorname{tr}({}^t\widetilde{M}\,H).}$$

8. La fonction f est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0\})$. Cela prouve que

$$\boxed{\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \text{ est un fermé de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Malheureusement, $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas du tout compact ! En revanche, comme la fonction q est positive, on peut certainement poser

$$\mu = \inf\{q(M), M \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})\},$$

et il existe une suite $(M_k)_{k\geq 1}$ de matrices de $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$q(M_k) \to \mu. \tag{1}$$

Or, la fonction $\sqrt{q}$ est une norme ! Ainsi, la suite $(M_k)_{k\geq 1}$ est bornée. Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une extraction φ et une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M_{\varphi(k)} \to M.$$

Comme $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a en réalité $M \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$. La continuité de q donne alors

$$q(M_{\varphi(k)}) \to q(M). \tag{2}$$

En définitive, (1) et (2) donnent $q(M) = \mu$, autrement dit :

$$\boxed{\text{la restriction } g \text{ de } q \text{ à } \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \text{ possède un minimum.}}$$

9. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'idée est de trigonaliser M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On écrit donc $M = PTP^{-1}$, où $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ et T est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux (disons) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Les λ_j sont les valeurs propres, distinctes ou non, de M. On a alors, pour $N \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{M^k}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{T^k}{k!}\right) P^{-1},$$

d'où, en laissant N tendre vers $+\infty$: $\exp M = P(\exp T)P^{-1}$ par continuité du produit matriciel. On en déduit en particulier que

$$\det(\exp M) = \det(\exp T).$$

Or, la matrice $\sum_{k=0}^{N} \frac{T^k}{k!}$ est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont les $\sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda_j^k}{k!}$. La matrice $\exp T$ est donc elle aussi triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont les e^{λ_j}. Tout cela donne

$$\det(\exp T) = \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda_j} = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right) = \exp(\operatorname{tr} M).$$

En définitive,

$$\boxed{\det(\exp M) = \exp(\operatorname{tr} M).}$$

10. La fonction γ est de classe C^1 d'après un fait rappelé dans le préambule. De plus, d'après la question précédente, on a $\det \gamma(t) = \det M \cdot \det \exp(tM^{-1}H) = \exp(t \cdot \operatorname{tr}(M^{-1}H))$. Or, par hypothèse, $df_M(H) = 0$, soit $\operatorname{tr}({}^t\widetilde{M}\, H) = 0$, soit encore $\operatorname{tr}(M^{-1}H) = 0$ puisque $\det M = 1$. Cela donne

$$\boxed{\gamma(t) \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \text{ pour } |t| < 1.}$$

D'autre part, on a bien sûr $\gamma(0) = M$, et

$$\boxed{\gamma'(t) = M \cdot M^{-1}H = H.}$$

11.a) On raisonne comme à la question **4.**, en définissant la fonction

$$\phi :]-1, 1[\to \mathbb{R}, t \mapsto g(\gamma(t)) = q(\gamma(t)).$$

Elle est de classe C^1 et présente un extremum en 0. Sa dérivée en 0 est donc nulle, ce qui donne

$$\boxed{dq_M(H) = 0.}$$

11.b) Explicitons cette condition grâce à la question **6.c)** :

$$\operatorname{tr}({}^tMH) = 0 \text{ pour tout } H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \operatorname{tr}(M^{-1}H) = 0.$$

D'après la question **1.**, il existe un réel λ tel que $\operatorname{tr}({}^tMH) = \lambda \cdot \operatorname{tr}(M^{-1}H)$ pour tout $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que la matrice $M - \lambda\, {}^tM^{-1}$ est orthogonale à toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, au sens du produit scalaire de la question **6.b)**. Cette matrice est donc nulle, ce qui donne $M = \lambda\, {}^tM^{-1}$, soit

$$ {}^tMM = \lambda I_n. $$

En prenant le déterminant, nous obtenons, compte tenu du fait que $\det M = 1$: $\lambda^n = 1$. De plus, la matrice ${}^tMM$ est symétrique positive, puisque $\langle {}^tMMx, x\rangle = \|Mx\|^2 \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.
Cela oblige λ à être un réel positif, et finalement on obtient $\lambda = 1$, de sorte que

$$ \boxed{\text{la matrice } M \text{ est orthogonale.}} $$

En particulier,

$$ \boxed{q(M) = n.} $$

Troisième partie

12.a) Ayant fixé $t \in \mathbb{R}$, on écrit, pour $h \in \mathbb{R}$:

$$ \begin{aligned} B(t+h) &= \big(C_1(t) + hC_1'(t) + o(h)\big)\big(C_2(t) + hC_2'(t) + o(h)\big) \\ &= B(t) + h(C_1'(t)C_2(t) + C_1(t)C_2'(t)) + o(h). \end{aligned} $$

On en déduit que

$$ \boxed{B'(t) = C_1'(t)C_2(t) + C_1(t)C_2'(t).} $$

12.b) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $D(t) = C(t)^{-1} = \frac{1}{\det C(t)} {}^t\widetilde{C(t)}$, et cette égalité prouve que la fonction D est de classe C^1, car les coefficients de $D(t)$ sont des fonctions rationnelles des coefficients de $C(t)$. On écrit alors $C(t)D(t) = I_n$, et on dérive cette identité ; cela donne $C'(t)D(t) + C(t)D'(t) = 0$, d'où

$$ \boxed{D'(t) = -C(t)^{-1}C'(t)C(t)^{-1}.} $$

13.a) Il suffit de poser

$$ \boxed{A(t) = I_n + t(\alpha C_1'(0) + \beta C_2'(0)) \text{ ou } A(t) = C_1(\alpha t)C_2(\beta t) \text{ pour } t \in \mathbb{R}.} $$

Remarque 3. L'intérêt de cette question ne saute pas aux yeux...

13.b) Cela résulte de la continuité des fonctions C_1 et C_2 et de l'ouverture du groupe linéaire dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
13.c) On pose $L(s,t) = C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}$ pour $s, t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. On a, grâce aux questions **12.a)** et **12.b)** :

$$ \frac{\partial L}{\partial t}(s,t) = C_1(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1} - C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}C_2'(t)C_2(t)^{-1}, $$

puis

$$ \begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(s,t) &= C_1'(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1} - C_1(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_1'(s)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1} \\ &\quad - C_1'(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}C_2'(t)C_2(t)^{-1} \\ &\quad + C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_1'(s)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}C_2'(t)C_2(t)^{-1}. \end{aligned} $$

En particulier,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(0,0) = C_1'(0)C_2'(0) - C_2'(0)C_1'(0) - C_1'(0)C_2'(0) + C_1'(0)C_2'(0)$$

d'où finalement

$$\boxed{\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(0,0) = C_1'(0)C_2'(0) - C_2'(0)C_1'(0).}$$

14.a) Soit $X, X' \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. On a, pour $Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\Phi(X) \circ \Phi(X')(Y) = \Phi(X)(X'YX'^{-1}) = XX'YX'^{-1}X^{-1} = (XX')Y(XX')^{-1} = \Phi(XX')(Y).$$

Cela prouve que $\Phi(X) \circ \Phi(X') = \Phi(XX')$, donc que

$$\boxed{\Phi \text{ est un morphisme de groupes.}}$$

En écrivant

$$XYX^{-1} = \frac{1}{\det X} XY\,{}^t\widetilde{X},$$

on voit que *les coefficients de XYX^{-1} sont des fractions rationnelles des coefficients de X et Y*. En particulier, pour chaque $Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{l'application } \Phi_Y : \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), X \mapsto XYX^{-1} = \Phi(X)(Y) \text{ est de classe } C^1. \tag{3}$$

Il s'agit d'en déduire que l'application Φ est elle-même de classe C^1, ce qui demande un minimum de soin. Fixons une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n^2}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et notons $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n^2}$ sa base duale. On a alors, pour $X \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\Phi(X)(Y) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(Y)\Phi(X)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(Y)\Phi_{e_i}(X).$$

ce qu'on peut écrire plus synthétiquement :

$$\Phi(X) = \sum_{1 \leq i,j \leq n^2} e_i^* \cdot \Phi_{e_i}(X).$$

Cette expression et la remarque (3) montrent que

$$\boxed{\Phi \text{ est de classe } C^1.}$$

14.b) Soit $X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit, on a

$$\Phi(I_n + tX)(Y) = (I_n + tX)Y(I_n + tX)^{-1}$$

Grâce aux questions **12.a)** et **12.b)**, on obtient

$$\frac{d}{dt}\Phi(I_n + tX)(Y) = XY(I_n + tX)^{-1} - (I_n + tX)Y(I_n + tX)^{-1}X(I_n + tX)^{-1},$$

d'où en particulier

$$\frac{d}{dt}\Phi(I_n + tX)(Y)\Big|_{t=0} = XY - YX,$$

soit

$$\frac{\Phi(I_n + tX) - \Phi(I_n)}{t}(Y) \to XY - YX \text{ quand } t \to 0.$$

ce qui équivaut à :

$$\boxed{d\Phi_{I_n}(X)(Y) = XY - YX.}$$

15.a) Soit $X \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}$ suffisamment petit, on a $X + tH \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, et

$$f(X + tH) = f(X)f(I_n + tX^{-1}H) = f(I_n + tX^{-1}H)f(X).$$

En dérivant en 0 cette identité, on obtient

$$\boxed{df_X(H) = f(X)df_{I_n}(X^{-1}H) = df_{I_n}(X^{-1}H)f(X).}$$

15.b) Les fonctions a et b sont de classe C^1 (pour a, cela vient du fait que f l'est). De plus, on a, d'après la question précédente

$$a'(t) = df_{\exp(tX)}(X\exp(tX)) = f(\exp(tX))df_{I_n}(X\exp(tX)\exp(-tX)) = a(t)df_{I_n}(X).$$

On en déduit immédiatement que l'application $t \mapsto a(t)\exp(-t\cdot df_{I_n}(X))$ est constante. Comme $a(0) = f(I_n) = \mathrm{id}_V$, on en déduit que

$$a(t) = \exp(t \cdot df_{I_n}(X)) \text{ pour } t \in \mathbb{R},$$

soit

$$\boxed{a = b.}$$

15.c) Choisissons dans cette question pour f l'application

$$f : \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, X \mapsto \det X.$$

C'est un morphisme de groupes de classe C^1. On peut donc appliquer le résultat de la question **15.b)**, avec $V = \mathbb{R}$ (donc $\mathbf{GL}(V) = \mathbb{R}^*$) et $t = 1$. Dans ce cas, $df_{I_n} = \mathrm{tr}$ d'après la question **7.**, d'où

$$\boxed{\det(\exp(X)) = \exp(\mathrm{tr}\, X).}$$

15.d) En appliquant le résultat de la question **15.b)** avec $f = \Phi$, $V = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $t = 1$, on obtient

$$\boxed{\Phi(\exp(X)) = \exp(\varphi(X)) \text{ pour } X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Remarque 4. À partir de la question **16.**, l'énoncé présuppose (mais sans le dire !) des résultats de régularité de l'exponentielle, sans lesquels la définition de la fonction A et de ses dérivées partielles pose problème. Le sujet aurait par exemple dû admettre clairement le caractère C^∞ de l'exponentielle, ce que nous ferons dans la suite de ce corrigé. On peut justifier sans trop de frais ce fait (non-trivial !) en utilisant la formule de Cauchy suivante[1] :

$$\exp(M) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=r} e^z(zI_n - M)^{-1}dz,$$

valable si M appartient à l'ensemble (ouvert) des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont le spectre est contenu dans le disque ouvert $D(0,r)$ du plan complexe.

16.a) On a bien sûr $A(1,0) = \exp(-X)\frac{\partial u}{\partial t}(1,0)$. Or,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(1,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(u(1,t) - u(1,0)\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\exp(X+tY) - \exp(X)\right) = d\exp_X(Y).$$

[1] Voir J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, 2000.

On a donc montré que

$$\boxed{A(1,0)=\exp(-X)d\exp_X(Y).}$$

16.b) On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial s}(s,t) &= -X\exp(-sX)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)+\exp(-sX)\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}(s,t)\\
&= -X\exp(-sX)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)+\exp(-sX)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}(s,t) \text{ d'après le théorème de Schwarz}\\
&= -X\exp(-sX)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)+\exp(-sX)\frac{\partial}{\partial t}\left((X+tY)\exp(s(X+tY))\right)\\
&= -X\exp(-sX)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)+\exp(-sX)Y\exp(s(X+tY))+\exp(-sX)(X+tY)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t).
\end{aligned}$$

En particulier

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) &= -X\exp(-sX)\frac{\partial u}{\partial t}(s,0)+\exp(-sX)Y\exp(sX)+\exp(-sX)X\frac{\partial u}{\partial t}(s,0)\\
&= \exp(-sX)Y\exp(sX) \text{ car } X \text{ et } \exp(-sX) \text{ commutent}\\
&= \Phi(\exp(-sX))(Y)\\
&= \exp(\varphi(-sX))(Y) \text{ grâce à la question } \textbf{15.d)}.
\end{aligned}$$

Finalement, comme φ est linéaire, on obtient

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial s}(s,0)=\exp(-s\varphi(X))(Y).}$$

16.c) On déduit de la question précédente l'égalité

$$\frac{\partial A}{\partial s}(s,0)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k s^k\frac{\varphi(X)^k}{k!}(Y) \text{ pour } s\in\mathbb{R}.$$

Fixons $s\in\mathbb{R}$. L'inégalité suivante :

$$\left\|(-1)^k u^k\frac{\varphi(X)^k}{k!}(Y)\right\|\leq\frac{\left(|s|\cdot\|\varphi(X)\|_{\text{sub}}\right)^k}{k!}\|Y\| \text{ pour } u\in[0,s]$$

prouve la convergence normale sur $[0,s]$ de la série de fonctions (de la variable u) $\sum(-1)^k u^k\frac{\varphi(X)^k}{k!}(Y)$, et légitime son intégration terme à terme sur ce même segment[2]. On en déduit que[3]

$$A(s,0)=A(0,0)+\int_0^s\partial_1 A(u,0)du=A(0,0)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k s^{k+1}\frac{\varphi(X)^k}{(k+1)!}(Y)$$

Calculons $A(0,0)$:

$$A(0,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(u(0,t)-u(0,0))=0$$

puisque $u(0,t)=I_n$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\boxed{A(s,0)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k s^{k+1}\frac{\varphi(X)^k}{(k+1)!}(Y).}$$

[2] En sortant très légèrement du cadre du programme, on peut dire plus rapidement qu'il s'agit d'une série entière de la variable u, à coefficients dans l'espace normé de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et de rayon de convergence infini.

[3] On note $\partial_1 A$ la dérivée partielle de la fonction A par rapport à sa première variable.

16.d) D'après la question **16.a)**, on a

$$d\exp_X(Y) = \exp(X)A(1,0),$$

soit

$$\boxed{d\exp_X(Y) = \exp(X)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\varphi(X)^k}{(k+1)!}(Y).}$$