Corrigé X MP 2008 Maths 2

Première partie

1. $j_{n,n} = s_{n,n} = n!$ car toute injection (et toute surjection) de $[\![1\,,n]\!]$ dans lui-même est une bijection.

2. $j_{k,n}$ est le nombre de bijections de $[\![1\,,k]\!]$ dans une partie de $[\![1\,,n]\!]$ de cardinal k. Pour chaque partie I de $[\![1\,,n]\!]$ de cardinal k, on dénombre $k!$ bijections de $[\![1\,,k]\!]$ dans I, or il y a $\binom{n}{k}$ parties de $[\![1\,,n]\!]$ de cardinal k, donc $j_{k,n} = \displaystyle\binom{n}{k} k!$.

3.a) Soit I une partie de $[\![1\,,n]\!]$ de cardinal q. Il y a $s_{k,q}$ applications de $[\![1\,,k]\!]$ dans $[\![1\,,n]\!]$ dont l'image est égale à I, car ce sont exactement les surjections de $[\![1\,,k]\!]$ dans I. Comme il y a $p_{q,n}$ parties de $[\![1\,,n]\!]$ de cardinal q, on obtient $s_{k,q}p_{q,n}$ applications de $[\![1\,,k]\!]$ dans $[\![1\,,n]\!]$ dont l'image est de cardinal q. En faisant varier q de 1 à n, on réalise une partition de l'ensemble des applications de $[\![1\,,k]\!]$ dans $[\![1\,,n]\!]$ en fonction du cardinal q de leurs images, ce qui donne en passant aux cardinaux :

$$n^k = \sum_{q=1}^{n} s_{k,q} p_{q,n} = \sum_{q=1}^{n} s_{k,q} \binom{n}{q} .$$

3.b) La formule précédente indique que $A(r) = S(r)P(r)$. Or $S(r)$ est triangulaire inférieure, donc $\det S(r) = \prod\limits_{n=1}^{r} s_{n,n} = \prod\limits_{n=1}^{r} n!$ et $P(r)$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1 donc $\det P(r) = 1$. On en déduit que

$$\det A(r) = \det S(r) \det P(r) = \prod_{n=1}^{r} n! .$$

Remarque : Après avoir mis n en facteur sur la colonne n de $A(r)$, pour tout n variant de 1 à r, on tombe sur le déterminant classique de Vandermonde associé aux valeurs $1, 2 \ldots, r$, que l'on peut calculer par une autre méthode, et on obtient $\prod_{1\leqslant k<n\leqslant r}(n-k)$. Après simplification, ce produit est égal à $1!2!\cdots(r-1)!$, donc en multipliant par $r!$, on retrouve bien que $\det A(r) = \prod_{n=1}^{r} n!$ (évidemment, cette façon de procéder n'est pas dans l'esprit de l'énoncé).

Deuxième partie

4.a) $(X+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$ donc $T_{k,n} = \begin{cases} \binom{n}{k} \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
La matrice T est triangulaire supérieure, et on a $T_{k,n} = p_{k,n}$.

4.b) L'application $P(X) \mapsto P(X-1)$ est un endomorphisme de E_d dont la composée avec T est égale à l'identité, donc T est inversible et $T^{-1}(P)(X) = P(X-1)$.
Comme $(X-1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} X^k$, on a $(T^{-1})_{k,n} = \begin{cases} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

4.c) $\forall n \in [\![0\,,d]\!],\ a_n = \sum\limits_{q=0}^{d} b_q T_{q,n}$ donc $a = b \cdot T$, d'où $b = a \cdot T^{-1}$, soit $b_q = \sum\limits_{n=0}^{q} (-1)^{q-n} a_n \binom{q}{n}$.

4.d) D'après la question 3a, on a $n^k = \sum\limits_{q=1}^{n} s_{k,q} \binom{n}{q}$. On en déduit par 4c (avec $a_0 = 0$) que

$$s_{k,n} = \sum_{q=1}^{n} (-1)^{n-q} q^k \binom{n}{q}.$$

5. Comme $\deg N_k = k$, la famille $(N_k)_{0 \leqslant k \leqslant d}$ est échelonnée en degrés dans E_d, donc en constitue une base.

6.

$$\begin{aligned} T(N_k) - N_k &= \frac{(X+1)\cdots(X+k) - X\cdots(X+k-1)}{k!} \\ &= \frac{(X+1)\cdots(X+k-1)(X+k-X)}{k!} \\ &= \frac{(X+1)\cdots(X+k-1)}{(k-1)!} = T(N_{k-1})\,. \end{aligned}$$

7.a) Par récurrence finie sur q et en utilisant 6, on montre que $T(N_q) = N_q + N_{q-1} + \cdots + N_0$, donc la matrice $\tilde{T}$ est triangulaire supérieure et $\tilde{T}_{k,q} = 1$ pour $k \leqslant q$.

7.b) D'après 6, $N_k = T^{-1}(N_k) + N_{k-1}$, d'où $T^{-1}(N_q) = N_q - N_{q-1}$ pour $1 \leqslant q \leqslant d$ et $T^{-1}(N_0) = N_0$, donc $\tilde{T}^{-1}_{k,q} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = q \\ -1 \text{ si } k = q-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

8. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $n^k = \sum\limits_{q=1}^{k} s_{k,q} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-q+1)}{q!} = \sum\limits_{q=1}^{k} s_{k,q} N_q(n-q+1)$. On en déduit que $X^k = \sum\limits_{q=1}^{k} s_{k,q} N_q(X-q+1)$ car la différence de ces deux polynômes s'annule sur $\mathbb{N}$ qui est infini, donc est le polynôme nul.

Troisième partie

9. La formule est évidente pour $n = 1$ et on retrouve la formule du binôme pour $n = 2$. Supposons la vraie au rang n.

$$\begin{aligned} (x_1 + \cdots + x_{n+1})^k &= \sum_{f \in C_{k,n}} \frac{k!}{f(1)! \cdots f(n)!} x_1^{f(1)} \cdots x_{n-1}^{f(n-1)} (x_n + x_{n+1})^{f(n)} \\ &= \sum_{\substack{f \in C_{k,n} \\ i \geqslant 0,\, j \geqslant 0,\, i+j = f(n)}} \frac{k!}{f(1)! \cdots f(n)!} x_1^{f(1)} \cdots x_{n-1}^{f(n-1)} x_n^i x_{n+1}^j \frac{f(n)!}{i!\, j!} \\ &= \sum_{\substack{f \in C_{k,n} \\ i \geqslant 0,\, j \geqslant 0,\, i+j = f(n)}} \frac{k!}{f(1)! \cdots f(n-1)!\, i!\, j!} x_1^{f(1)} \cdots x_{n-1}^{f(n-1)} x_n^i x_{n+1}^j \\ &= \sum_{f \in C_{k,n+1}} \frac{k!}{f(1)! \cdots f(n+1)!} x_1^{f(1)} \cdots x_{n+1}^{f(n+1)}\,. \end{aligned}$$

Elle est vraie au rang $n+1$.

10. Développer $(x_1+\cdots+x_n)^k$ consiste à prendre de toutes les façons possibles un terme x_i dans chaque somme $x_1+\cdots+x_n$, à les multiplier, et à ajouter tous les produits obtenus. Si on appelle $\varphi(j)$ l'indice du terme retenu dans la $j^{\text{ème}}$ somme, on obtient le développement en ajoutant tous les produits $x_{\varphi(1)}\cdots x_{\varphi(k)}$ lorsque φ décrit l'ensemble des applications de $[\![1\,,k]\!]$ dans $[\![1\,,n]\!]$, soit

$$(x_1+\cdots+x_n)^k=\sum_{\varphi\in A_{k,n}} x_{\varphi(1)}\cdots x_{\varphi(k)}\ .$$

11. D'après les questions 9 et 10, on a

$$\sum_{f\in C_{k,n}}\frac{k!}{f(1)!\cdots f(n)!}x_1^{f(1)}\cdots x_n^{f(n)}=\sum_{\varphi\in A_{k,n}} x_{\varphi(1)}\cdots x_{\varphi(k)}\ .$$

On obtient une égalité entre deux polynômes de la variable x_1. On peut donc identifier les coefficients, en particulier les coefficients constants (c'est-à-dire indépendants de x_1). En soustrayant ces coefficients constants, on obtient pour tout $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ l'égalité :

$$\sum_{\substack{f\in C_{k,n}\\ f(1)\geqslant 1}}\frac{k!}{f(1)!\cdots f(n)!}x_1^{f(1)}\cdots x_n^{f(n)}=\sum_{\substack{\varphi\in A_{k,n}\\ 1\in\varphi([\![1,k]\!])}} x_{\varphi(1)}\cdots x_{\varphi(k)}\ .$$

On recommence alors la même manipulation avec les variables $x_2,\ldots,x_n$, ce qui donne

$$\sum_{f\in D_{k,n}}\frac{k!}{f(1)!\cdots f(n)!}x_1^{f(1)}\cdots x_n^{f(n)}=\sum_{\varphi\in B_{k,n}} x_{\varphi(1)}\cdots x_{\varphi(k)}$$

En prenant toutes les variables x_i égales à 1, on trouve finalement

$$\sum_{f\in D_{k,n}}\frac{k!}{f(1)!\cdots f(n)!}=s_{k,n}\ .$$

Quatrième partie

12.

- Soit r un réel tel que $0<r<R_1$. On choisit un réel r' tel que $r<r'<R_1$. La série $\sum a_k r'^k$ converge donc la suite $(a_k r'^k)$ est bornée, d'où $\exists M>0,\ \forall k\geqslant 1,\ |a_k r'^k|\leqslant M$. Pour tout $k\geqslant n$, on a $|\alpha_{n,k}|\leq \sum\limits_{f\in D_{k,n}} M^n r'^{-(f(1)+\cdots+f(n))}=M^n r'^{-k}\operatorname{card} D_{k,n}$.
  Si $f\in D_{k,n}$, on a $1\leqslant f(j)\leqslant k-1$ pour tout $j\in[\![1\,,n]\!]$, donc $\operatorname{card} D_{k,n}\leqslant (k-1)^n$. On en déduit que $|\alpha_{k,n}r^k|\leqslant M^n(k-1)^n(r/r')^k$. En utilisant la régle de d'Alembert (ou en remarquant que ce terme est négligeable devant $1/k^2$ quand k tend vers $+\infty$), on voit que cette série de la variable k converge, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 0}\alpha_{n,k}x^k$ est supérieur ou égal à R_1.
- En effectuant le produit de Cauchy de la série entière $\sum_{k\geqslant 1}a_k x^k$ par elle-même (licite lorsque $|x|<R_1$), on obtient que $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^k\right)^2=\sum\limits_{k=2}^{\infty}(\sum_{j=1}^{k-1}a_j a_{k-j})x^k$, en remarquant que les termes d'indice $j=0$ et $j=k$ sont nuls du fait que $a_0=0$.
  En poursuivant les produits de Cauchy par la série entière initiale, on en déduit par récurrence sur n que $\forall x\in]-R_1,R_1[$, $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^k\right)^n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}(\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_n=k\\ j_1\geqslant 1,\ldots,j_n\geqslant 1}}a_{j_1}\cdots a_{j_n})x^k$,

les indices j_p étant non nuls car $a_0 = 0$. On peut donc indexer la somme interne par l'ensemble $D_{k,n}$, ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k,n} x^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \right)^n = \varphi(x)^n \,.$$

13. Notons $(\alpha'_{n,k})$ la suite double définie à partir de la suite $(|a_k|)$ par la même formule que $\alpha_{n,k}$ à partir de a_k. Par inégalité triangulaire, on a $|\alpha_{n,k}| \leq \alpha'_{n,k}$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. On sait que la série entière $\sum |a_k| x^k$ est de rayon de convergence R_1, on notera $\varphi_1(x)$ sa somme.
On pose $u_{n,k} = b_n \alpha_{n,k} x^k$ pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-R_1, R_1[$, on a $\sum\limits_{k\geqslant 0} |u_{n,k}| = |b_n| \sum\limits_{k\geqslant 0} |\alpha_{n,k} x^k| \leqslant |b_n| \sum\limits_{k\geqslant 0} \alpha'_{n,k} |x|^k$. En appliquant la question 12 à la suite $(|a_k|)$, on obtient $\sum\limits_{k\geqslant 0} |u_{n,k}| \leqslant |b_n| \varphi_1(|x|)^n$. Or $\varphi_1(0) = 0$ et φ_1 est continue donc il existe $R > 0$ tel que $\forall x \in]-R, R[,\ \varphi_1(|x|) < R_2$, ce qui entraîne que la série $\sum_{n\geqslant 0} |b_n| \varphi_1(|x|)^n$ converge. D'après le théorème de Fubini, la série double de terme général $u_{n,k}$ converge et on a $\sum_{k\geqslant 0}(\sum_{n\geqslant 0} u_{n,k}) = \sum_{n\geqslant 0}(\sum_{k\geqslant 0} u_{n,k})$. En utilisant la question 12, on en déduit que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-R, R[$, on a

$$\sum_{k\geqslant 0} (\sum_{n\geqslant 0} b_n \alpha_{n,k}) x^k = \sum_{n\geqslant 0} b_n (\sum_{k\geqslant 0} \alpha_{n,k} x^k) = \sum_{n\geqslant 0} b_n \varphi(x)^n = \psi(\varphi(x)) \,.$$

14. Prenons $a_k = 1/k!$ pour $k \geqslant 1$ (et $a_0 = 0$), ce qui donne $R_1 = +\infty$ et $\varphi(x) = e^x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.
D'après la question 11, on a $\alpha_{n,k} = \sum\limits_{f \in D_{k,n}} \dfrac{1}{f(1)! \cdots f(n)!} = \dfrac{s_{k,n}}{k!}$.
On pose $b_n = 1/n!$ pour $n \geqslant 0$, de sorte que $R_2 = +\infty$ et $\psi(x) = e^x$ pour tout x réel.
En appliquant la question 13, on obtient au voisinage de 0 l'égalité $e^{(e^x - 1)} = \psi(\varphi(x)) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\sum\limits_{n=0}^{k} \dfrac{s_{k,n}}{n!}) \dfrac{x^k}{k!}$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\theta^{(k)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{k} \dfrac{s_{k,n}}{n!}$.