CORRIGÉ X-2006, MP, SECONDE ÉPREUVE

Première partie

(1) Une matrice symétrique et antisymétrique est nulle : si ${}^tA = A$ et ${}^tA = -A$ alors $A = 0$. Donc le sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et le sous-espace des matrices antisymétriques sont en somme directe. Leur somme vaut $M_n(\mathbb{R})$ car toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, s'écrivant $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$, est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

(2) On a pour toute matrice antisymétrique B, $(Bx|x) = 0$ (car $(Bx|y) = -(x|By)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$). Donc $(Ax|x) = (A_s x|x)$, et A est s-positive est équivalent à A_s est positive (en tant que matrice symétrique).
On sait alors que A_s est diagonalisable dans une base orthonormée (e_i). On a alors

$$(A_s x|x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2,\ (A_s e_i|e_i) = \lambda_i$$

d'où A_s est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

Seconde partie

(3) Soient A s-positive et $\lambda > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a

$$\|(\lambda I + A)x\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(Ax|x) + \|Ax\|^2 > 0.$$

D'où $\mathrm{Ker}(\lambda I + A) = \{0\}$ et l'inversibilité de $(\lambda I + A)$.

(4) a) $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^2$, $R_\lambda(A) = \frac{1}{\lambda^2+1}\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$,
$\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda(A) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $(= A^{-1})$ et $\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda(A) = 0$.
b) En notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on obtient $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(e_2)$, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$, $R_\lambda(A) = \begin{pmatrix}\frac{\lambda}{\lambda^2+1} & 0 & -\frac{1}{\lambda^2+1}\\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0\\ \frac{1}{\lambda^2+1} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\end{pmatrix}$.
$R_\lambda(A)$ n'admet pas de limite quand λ tend vers 0, mais $\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda(A) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(5) a) $R_\lambda(A)$ commute avec $(\lambda I + A) = R_\lambda(A)^{-1}$ donc avec A : d'où $AR_\lambda(A) = R_\lambda(A)A$. Par ailleurs, $(A + \lambda I)R_\lambda(A) = I$ donne immédiatement $AR_\lambda(A) = I - \lambda R_\lambda(A)$.
b) $(I - \lambda R_\lambda(A))R_\mu(A) = AR_\lambda(A)R_\mu(A) = R_\lambda(A)AR_\mu(A) = R_\lambda(A)(I - \mu R_\mu(A))$, d'où

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A).$$

(6) Comme $R_\lambda(A)$ est inversible, on a égalité entre

$$E = \{\tfrac{\|R_\lambda(x)\|}{\|x\|},\ x \neq 0\} \text{ et } F = \{\tfrac{\|y\|}{\|(\lambda I+A)(y)\|},\ y \neq 0\|\}$$

donc $\|R_\lambda(A)\| = \sup E = \sup F = \dfrac{1}{\inf\{\frac{\|(\lambda I+A)(y)\|}{\|y\|}\}}$. Or

$$\|\lambda y + Ay\|^2 = \lambda^2\|y\|^2 + \underbrace{2\lambda(y|Ay)}_{\geqslant 0} + \|Ay\|^2 \geqslant \lambda^2\|y\|^2$$

donc $\inf\{\frac{\|(\lambda I+A)(y)\|}{\|y\|},\ y \neq 0\} \geqslant \lambda$.

Si $\det A = 0$ alors il existe $y \neq 0$ tel que $Ay = 0$ donc $\inf\{\frac{\|(\lambda I+A)(y)\|}{\|y\|}\} = \lambda$ d'où l'égalité.

Réciproquement, $\inf\{\frac{\|(\lambda I+A)(y)\|}{\|y\|},\ y \neq 0\} = \inf\{\|\lambda y + Ay\|,\ \|y\| = 1\}$, par compacité de la sphère unité et continuité de $\lambda I + A$, on en déduit que la borne inférieure est un minimum donc il existe y de norme 1 tel que $\lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(y|Ay) + \|Ay\|^2 = \lambda^2$ donc $2\lambda(y|Ay) + \|Ay\|^2 = 0$ soit $Ay = 0$ i.e. A non inversible et $\det A = 0$.

Ainsi, l'égalité $\|R_\lambda(A)\| = \dfrac{1}{\lambda}$ équivaut à $\det(A) = 0$.

(7) a) Soit $x \in \mathrm{Im}(A)$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = Ay$.
Alors $\lambda R_\lambda(A)x = \lambda R_\lambda(A)Ay = \lambda(I - \lambda R_\lambda(A))y$ d'où, puisque $\|R_\lambda(A)y\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|y\|$, $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda(A)x = 0$.

b) De $I = R_\lambda(A)A + \lambda R_\lambda(A)$, on déduit, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(A)$, $x = \lambda R_\lambda(A)x$. Si de plus $x \in \mathrm{Im}(A)$, on a $x = 0$ d'après la question précédente. Donc $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont en somme directe et, puisque la somme de leurs dimensions vaut n, ce sont des supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

c) Soit $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \mathrm{Im}\,A$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}\,A$ alors

$$\lambda R_\lambda(A)(x) = x - R_\lambda(A)Ax = \underbrace{\lambda R_\lambda(A)(x_1)}_{\to 0} + x_2$$

donc, ponctuellement, $\lim\limits_{\lambda\to\to 0} \lambda R_\lambda(A)(x) = x_2$. Pour une application linéaire en dimension finie, la convergence ponctuelle entraîne la convergence des applications. En effet, on a convergence pour les vecteurs d'une base et, en prenant la norme infinie dans cette base (toutes les normes sont équivalentes), on aura la convergence en norme des applications linéaires.

(8) Puisque $R_\lambda(A) = \frac{1}{\det(\lambda I+A)}{}^t\mathrm{Com}(\lambda I + A)$, les coefficients de $R_\lambda(A)$ sont des fractions rationnelles en λ (dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$). Ce sont par conséquent des fonctions continues sur $]0, +\infty[$, ainsi que $\Phi\ : \lambda \mapsto R_\lambda(A)$.

On sait (question **5.b**) que $\dfrac{\Phi(\mu) - \Phi(\lambda)}{\mu - \lambda} = -\Phi(\lambda)\Phi(\mu)$ et comme Φ est continue alors $\lim\limits_{\mu\to\lambda} \dfrac{\Phi(\mu) - \Phi(\lambda)}{\mu - \lambda}$ existe et vaut $-\Phi(\lambda)^2$ donc Φ est dérivable et $\Phi' = -\Phi^2$.

Prouvons maintenant par récurrence que Φ est de classe $\mathcal{C}^p$ et que $\Phi^{(p)} = (-1)^p p!\Phi^{p+1}$: cette propriété est vraie à l'ordre $p = 1$, on la suppose vraie à l'ordre p. Comme Φ est dérivable alors $\Phi^{(p)}$ est aussi dérivable et, par dérivation, on obtient

$$\Phi^{(p+1)} = (-1)^p p!(p + 1)\Phi^p\Phi' = (-1)^{p+1}(p + 1)!\Phi^{p+2}$$

ce qui achève la récurrence.

Troisième partie

(9) On remplace μ par 1 dans (ii), on obtient $F(\lambda) - F(1) = (1 - \lambda)F(\lambda)F(1)$ pour tout $\lambda > 0$, d'où

$$F(\lambda)(I + (\lambda - 1)F(1)) = F(1).$$

$F(1)$ étant inversible, $F(\lambda)$ aussi et en plus $F(\lambda)^{-1} = F(1)^{-1} + (\lambda - 1)I$.

(10) a) Immédiat, on multiplie à gauche par $F(\lambda)^{-1}$ et à droite par $F(\mu)^{-1}$, on obtient alors

$$F(\lambda)^{-1} - F(\mu)^{-1} = (\lambda - \mu)I.$$

b) $F(\lambda)^{-1} = F(1)^{-1} + (\lambda - 1)I$ tend vers $A = F(1)^{-1} - I$ quand λ tend vers 0. On a bien $F(\lambda)^{-1} = A + \lambda I$.

(11) On a donc $\lambda F(\lambda) + AF(\lambda) = I$ soit $AF(\lambda) = I - \lambda F(\lambda)$ d'où

$$(x|AF(\lambda)(x)) = \|x\|^2 - \underbrace{\lambda(x|F(\lambda)(x))}_{\leqslant \|x\|^2} \geqslant 0$$

donc $AF(\lambda)$ est s-positive.
On pose ensuite $x = F(\lambda)(y)$, alors

$$\|y\|^2 = \|Ax + \lambda x\|^2 = \|Ax\|^2 + 2\lambda(Ax|x) + \lambda^2\|x\|^2$$

d'où $\|Ax\|^2 + 2\lambda(Ax|x) = \|y\|^2 - \lambda^2\|F(\lambda)(y)\|^2 \geqslant 0$ car $\|\lambda F(\lambda)\| \leqslant 1$.
Il en résulte $(Ax|x) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\|Ax\|^2 + 2\lambda(Ax|x)}{2\lambda} \geqslant 0$.

Quatrième partie

(12) Rappelons que $\exp(t+s)A = \exp(tA)\exp(sA)$.
(i) $\Rightarrow$ (ii) : on suppose (i), pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \leqslant s$ réels, on a

$$\begin{aligned}\|\exp(-sA)x\| &= \|\exp(-(s-t)A)\exp(-tA)x\| \leqslant \|\exp(-(s-t)A)\|\|\exp(-tA)x\| \\ &\leqslant \|\exp(-tA)x\|\end{aligned}$$

donc $t \mapsto \|\exp(-tA)x\|$ est décroissante, il en est de même de $t \mapsto \|\exp(-tA)\|^2$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) : pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\exp(-tA)x\| \leqslant \|\exp(-0A)x\| = \|x\|$, donc $\|\exp(-tA)\| \leqslant 1$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) : la fonction étant décroissante, on sait que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\exp(-tA)x\|^2 \leqslant 0$ or $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\exp(-tA)x\|^2 = -2(\exp(-tA)Ax|\exp(-tA)x)$ donc, en $t = 0$ on obtient $(Ax|x) \geqslant 0$.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons (iii), alors $(Ay|y) \geqslant 0$ et on l'applique à $y = \exp(-tA)x$ donc $t \mapsto \|\exp(-tA)x\|^2$ est décroissante.

(13) D'après **12i**, $t \mapsto \exp(-tA)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Donc, grâce à l'équivalence des normes en dimension finie, chaque fonction $t \mapsto (\exp(-tA))_{i,j}$ est bornée et $t \mapsto e^{-\lambda t}(\exp(-tA))_{i,j}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (donc l'intégrale "converge", c'est-à-dire que $u \mapsto \int_0^u e^{-\lambda t}(\exp(-tA))_{i,j}\,\mathrm{d}t$ admet une limite quand $u \to +\infty$).

(14) Il suffit de faire une intégration avec les fonctions vectorielles :

$$\begin{aligned}(A + \lambda I)\rho(\lambda) &= \int_0^{+\infty} (A + \lambda I)e^{-t(\lambda I + A)}\,\mathrm{d}t = -\left[e^{-t(\lambda I + A)}\right]_{t=0}^{+\infty} \\ &= I\end{aligned}$$

donc $\rho(\lambda) = R_\lambda(A)$.

(15) Soit $\mathcal{S} = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\right\}$ l'algèbre des matrices de similitude et $\Psi : \mathbb{C} \to \mathcal{S}$ définie par $\Psi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Ψ est un isomorphisme d'algèbre et un homéomorphisme. En particulier, $\Psi(e^z) = \exp(\Psi(z))$ par un simple passage à la limite.

On a alors $-tA = \Psi(it)$, $\exp(-tA) = \Psi(e^{it}) = \Psi(\cos(t) + i\sin(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned}\rho(\lambda) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\Psi\left(e^{it}\right) \mathrm{d}t = \Psi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{it} \,\mathrm{d}t\right) = \Psi\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{it} \,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{i-\lambda}\Psi\left(\left[e^{(i-\lambda)t}\right]_0^{+\infty}\right) = \Psi\left(\frac{1}{\lambda - i}\right) = \Psi\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1} + \frac{i}{\lambda^2+1}\right).\end{aligned}$$

On retrouve ainsi $R_\lambda(A) = \rho(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2+1}\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.