SPÉCIALE MP* : DEVOIR LIBRE

Partie I

I.1. Question classique, on prouve par récurrence que $\chi^{(n)}(x) = \dfrac{1}{x^{2n}} P_n(x) e^{-1/x}$ pour $x > 0$ et on sait que $\chi^{(n)}(x) \to 0$ quand $x \to 0$. En utilisant le théorème du prolongement dérivable, on peut affirmer que χ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

I.2. Il suffit de prendre $\theta(x) = \chi(x - 1/2)\chi(2 - x)$ et on vérifie que θ satisfait aux conditions imposées.

I.3. Soit $0 < a < b$, $\theta(2^{-j}x)$ est nul pour tout x de $]a, b[$ ssi

$$2^{-j}a < \frac{1}{2} \text{ ou } 2^{-j}b > 2 \text{ soit } j > \frac{\ln 2a}{\ln 2} \text{ ou } j < \frac{\ln(b/2)}{\ln 2}.$$

Φ est en fait une somme finie de termes sur tout intervalle $]a, b[$ donc Φ sera de classe C^∞ sur la réunion de tous ces intervalles donc sur $\mathbb{R}$.

Pour $x > 0$, l'expression de Φ fera intervenir un ou deux termes strictement positifs, donc $\Phi(x) > 0$ pour $x > 0$.

Ensuite :

(*i*) φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞, le dénominateur ne s'annulant pas. Mais, comme $\theta(|x|)$ s'annule sur $]-1/2, 1/2[$ alors φ sera de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(*ii*) Immédiat.

(*iii*) On remarque tout d'abord que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \Phi(x) = \Phi(2^k x)$$

car cela revient à translater les indices. On en déduit que l'on peut écrire : $\varphi(2^{-j}x) = \dfrac{\theta(2^{-j}x)}{\Phi(x)}$ et donc

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \varphi(2^{-j}x) = \frac{1}{\Phi(x)} \sum_{j=0}^{+\infty} \theta(2^{-j}x) \leqslant \frac{1}{\Phi(x)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta(2^{-j}x) = 1.$$

Conclusion : comme φ est paire, on a bien $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$.

Étudions l'égalité lorsque $x > 0$: $\varphi(x) = 1$ ssi pour tout $j < 0$, on a $\theta(2^{-j}x) = 0$ ce qui est encore équivalent à : pour tout $j < 0$, $2^{-j}x \geqslant 2$ i.e. $x \geqslant 1$.

Conclusion : on a égalité ssi $|x| \geqslant 1$.

Partie II

II.1. Comme φ est nulle en dehors de $[-2, 2]$, on a en fait

$$\psi(\xi) = \int_{-2}^{2} \varphi(x) e^{ix\xi} \, \mathrm{d}x.$$

Ensuite $\psi(\xi) - \psi(\xi') = \displaystyle\int_{-2}^{2} \varphi(x)[e^{ix\xi} - e^{ix\xi'}] \, \mathrm{d}x$, or $\left|e^{ix\xi} - e^{ix\xi'}\right| = 2\left|\sin \tfrac{\xi - \xi'}{2} x\right|$ d'où

$$|\psi(\xi) - \psi(\xi')| \leqslant \int_{-2}^{2} |\varphi(x)| . 2 \sin \frac{\xi - \xi'}{2} x \, \mathrm{d}x \leqslant 2|\xi - \xi'| \int_{-2}^{2} |\varphi(x)| \, \mathrm{d}x$$

en utilisant la majoration $|\sin x| \leqslant |x|$.

ψ est continue donc localement intégrable, on fait alors des intégrations par parties

$$\begin{aligned}
\xi^3\psi(\xi) &= \left[-i\xi^2\varphi(x)e^{ix\xi}\right]_{-2}^{2} + i\xi^2\int_{-2}^{2}\varphi'(x)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= i\xi^2\int_{-2}^{2}\varphi'(x)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= -i\int_{-2}^{2}\varphi'''(x)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}x \quad \text{en intégrant deux fois par parties}
\end{aligned}$$

donc $|\xi\psi(\xi)| \leqslant \dfrac{K}{\xi^2}$ où on a posé $K = \displaystyle\int_{-2}^{2}|\varphi'''(x)|\,\mathrm{d}x$. On a donc bien la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|.|\psi(\xi)|\,\mathrm{d}\xi$ car $\displaystyle\int_{-X}^{X}|\xi|.|\psi(\xi)|\,\mathrm{d}\xi$ est une fonction de X croissante et majorée par $\displaystyle\int_{-1}^{1}|\xi|.|\psi(\xi)|\,\mathrm{d}\xi + \int_{|\xi|\geqslant 1}\frac{K}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi$.

II.2. **a.** La fonction L est bien 2π-périodique car changer x en $x+2\pi$ revient à remplacer k par $k+1$ dans la sommation sur $\mathbb{Z}$ (sommation qui d'ailleurs est finie). Comme pour la fonction φ on pourra alors en déduire que L est C^∞.

b. On calcule les coefficients de Fourier de L sachant que pour $x \in [0, 2\pi]$, la somme sera finie. On a donc

$$\begin{aligned}
\widehat{L}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi\left(\frac{x/2\pi+k}{N}\right)e^{i(x/2\pi+k)t}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\varphi\left(\frac{x/2\pi+k}{N}\right)e^{i(x/2\pi+k)t}\,\mathrm{d}x \text{ car la somme est finie} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\varphi\left(\frac{y}{2\pi N}\right)e^{i(t/2\pi-n)y}\,\mathrm{d}y \text{ en posant } y = x+2k\pi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{y}{2\pi N}\right)e^{i(t/2\pi-n)y}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Enfin, en posant $y = 2\pi N u$, on a $\widehat{L}(n) = N\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)e^{i(t-2\pi n)Nu}\,\mathrm{d}u = N\psi(N(t-2n\pi))$.

c. Vu que L est C^∞, L est égale à sa série de Fourier en application du théorème de Dirichlet. On a alors

$$\begin{aligned}
L(0) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{L}(n) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} N\psi(N(t+2k\pi)) \text{ on a changé } k \text{ en } -k \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi\left(\frac{k}{N}\right)e^{ikt} \text{on remplace } L(0) \text{ par son expression}
\end{aligned}$$

II.3. En appliquant cette égalité pour $N = 2^n$, on a

$$I_n = \int_0^{2\pi}|h(t)|.|\psi_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2^n\int_0^{2\pi}|h(t)|\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\psi(2^n(t+2k\pi))|\,\mathrm{d}t$$

(La série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi(2^n(t+2k\pi))|$ est absolument convergente car L étant $\mathcal{C}^\infty$, $\sum |\widehat{L}(n)|$ converge.)

On utilise alors l'inégalité du début de cette partie pour $k \notin \{0, \pm 1\}$:

$$|h(t)|.|\psi(2^n(t+2k\pi))| \leqslant \frac{Mkt^\alpha}{2^{3n}|t+2k\pi|^3} \leqslant \frac{K(2\pi)^\alpha}{(2^{3n}2\pi||k|-1|^3} = \frac{K'}{||k|-1|^3}$$

qui nous permet d'affirmer la convergence uniforme de la série et permet d'intégrer terme à terme, d'où :

$$\begin{aligned}
I_n &\leqslant 2^n \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |h(t)|.|\psi(2^n(t+2k\pi))|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2^n \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)|.|\psi(2^n u)|\,\mathrm{d}u \text{ en posant } t+2k\pi = u\ (h(t)=h(u)) \\
&\leqslant 2^n M \int_{-\infty}^{\infty} |u|^\alpha |\psi(2^n u)|\,\mathrm{d}u \text{ avec l'hypothèse} \\
&\leqslant M 2^{-n\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^\alpha |\psi(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \quad (\xi = 2^n u).
\end{aligned}$$

et on sait que cette dernière intégrale converge pour $0 < \alpha \leqslant 1$.

Partie III

III.1. On fait le changement de variable $x - t = u$ et on utilise le fait que l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas des bornes.

III.2. Si $|2^{-n}k| \geqslant 2$ (i.e. $|k| \geqslant 2^{n+1}$) alors $\varphi(2^{-n}k) = 0$ donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
f * \psi_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[\sum_{|k|<2^{n+1}} \varphi(2^{-n}k) e^{ik(x-t)} \right] \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<2^{n+1}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{|k|<2^{n+1}} \varphi(2^{-n}k) \widehat{f}(k) e^{ikx}
\end{aligned}$$

ce qui permet aussi d'affirmer que $f * \psi_n \in E_{2^{n+1}-1}$.

III.3. **a.** On a

$$\widehat{f_r}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(0) e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{r} \sum_{|m|\leqslant 2^{n+1}} \int_0^{2\pi} \varphi(2^{-n}m) \widehat{f}(m) e^{i(m-k)x}\,\mathrm{d}x.$$

Si $k \neq 0$, la première intégrale est nulle et les autres aussi s'annulent sauf celles où l'on a $m = k$ et donc

$$\widehat{f_r}(k) = \left(\sum_{n=0}^{r} \varphi(2^{-n}k) \right) \widehat{f}(k)$$

et, avec le résultat du I.3.(*iii*), on a bien $|\widehat{f_r}(k)| \leqslant |\widehat{f}(k)|$.

Si $k = 0$ alors, vu que si $m = 0$, $\varphi(2^{-n}m) = 0$, il ne restera qu'une intégrale et on aura $\widehat{f_r}(0) = \widehat{f}(0)$.

On pouvait aussi écrire

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \widehat{f}(0) + \sum_{n=0}^{r} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\varphi(2^{-n}k)e^{ikx} \right) \\ &= \widehat{f}(0) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f} \left(\sum_{n=0}^{r} \varphi(2^{-n}k) \right) e^{ikx} \end{aligned}$$

d'où $\widehat{f_r}(0) = \widehat{f}(0)$ et si $k \neq 0$, $\widehat{f_r}(k) = \left(\sum_{n=0}^{r} \varphi(2^{-n}k)\right) \widehat{f}(k)$.

Conclusion : on a, dans tous les cas :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad |\widehat{f_r}(k)| \leqslant |\widehat{f}(k)|.$$

On utilise enfin l'égalité de Parseval :

$$\|f_r\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f_r}(k)|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2.$$

b. Soit $f \in E_N$, on sait déjà que $\widehat{f}(k) = 0$ pour $|k| > N$ et donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad (\forall x \in \mathbb{R}), \quad f * \psi_n(x) = \sum_{|k|\leqslant N} \varphi(2^{-n}k)\widehat{f}(k)e^{ikx}$$

d'où

$$\begin{aligned} (\forall r \in \mathbb{N}), \quad (\forall x \in \mathbb{R}), \quad f_r(x) &= \widehat{f}(0) + \sum_{n=0}^{r} \left(\sum_{|k|\leqslant N} \varphi(2^{-n}k\widehat{f}(k)e^{ikx} \right) \\ &= \widehat{f}(0) + \sum_{|k|\leqslant N} \left(\sum_{n=0}^{r} \varphi(2^{-n}k) \right) \widehat{f}(k)e^{ikx}. \end{aligned}$$

Si $2^r \geqslant N$, $|k| \leqslant N$ et $n \geqslant r+1$, on a

$$2^{-n}k \leqslant 2^{-(r+1)}N \leqslant \frac{1}{2} \text{ ce qui donne } \varphi(2^{-n}k) = 0$$

et donc, d'après le 1-3 $^\circ$-(iii)

$$\sum_{n=0}^{r} \varphi(2^{-n}k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(2^{-n}k) = 1$$

et, en reportant dans la formule ci-dessus, on arrive à

$$f_r(x) = \widehat{f}(0) + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^* \\ |k|\leqslant N}} \widehat{f}(k)e^{ikx} = f(x).$$

c. Soit $N \in \mathbb{N}$, $S_N f \in E_N$ et donc, pour $2^r \geqslant N$, on a $(S_N f)_r = S_N f$. En remarquant alors que $(S_N f)_r - f_r = (S_N f - f)_r$ on a

$$f - f_r = f - S_N f + (S_N f - f)_r$$

et, pour $2^r \geqslant N$

$$\|f - f_r\|_2 \leqslant \|f - S_N f\|_2 + \|(S_N f - f)_r\|_2 \leqslant 2\|f - S_N f\|_2.$$

Grâce à l'égalité de Parseval, on sait que $\lim\limits_{r\to+\infty} \|f - S_N f\|_2 = 0$ on peut donc conclure :

$$\lim_{r\to+\infty} \|f - f_r\|_2 = 0.$$

Partie IV

IV.1. On remarque que, si $x \in \mathbb{R}$ alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-n}k)\int_0^{2\pi} e^{ikt}\,\mathrm{d}t = 0.$$

car on affaire à une somme finie et donc

$$f * \psi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\psi_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(x-t)-f(x)]\psi_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'hypothèse faite sur f nous permet de dire que la fonction h définie par la relation $h(t) = f(x-t) - f(x)$ vérifie la condition du II.3, on en a alors la conclusion et donc

$$|f * \psi_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_\alpha 2^{-n\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^\alpha |\psi(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = H\|f\|_\alpha 2^{-n\alpha}.$$

La série $\sum f * \psi_n$ converge normalement pour $\|.\|_\infty$ vers une fonction $g = \widehat{f}(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} f * \psi_n$ et comme on sait que l'espace E muni de la norme $\|.\|_\infty$ est complet alors $g \in E$. Vu que $\|.\|_2 \leqslant \|.\|_\infty$ dans E, $\|f_r - g\|_2$ tend vers 0, on a alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ donc $f = g$.
Conclusion : la suite $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f.

IV.2. Si $0 < r < q$ sont 2 entiers naturels alors $f_q - f_r = \sum_{n=r+1}^{q} f * \psi_n$ donc

$$\|f_q - f_r\|_\infty \leqslant \sum_{n=r+1}^{q} \|f * \psi_n\|_\infty \leqslant H\|f\|_\alpha \sum_{n=r+1}^{q} 2^{-n\alpha} \leqslant H\|f\|_\alpha \frac{2^{-\alpha(r+1)}}{1-2^{-\alpha}}.$$

Si on fait tendre q vers l'infini, on obtient (grâce à la continuité de la norme) :

$$(\forall f \in \Lambda^\alpha), \quad (\forall r \in \mathbb{N}), \quad \|f - f_r\|_\infty \leqslant \frac{H\|f\|_\alpha}{1-2^{-\alpha}}(2^{-\alpha})^{r+1}.$$

Comme $f * \psi_n \in E_{2^{n+1}}$ on a

$$f_r = \widehat{f}(0) + \sum_{n=0}^{r} f * \psi_n \in E_{2^{r+1}}.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $2^{r+1} - 1 \leqslant N \leqslant 2^{r+2} - 1$ alors $f_r \in E_N$ et

$$\mathrm{d}(f, E_N) \leqslant \|f - f_r\|_\infty \leqslant \frac{H\|f\|_\alpha}{1-2^{-\alpha}} 2^{-\alpha} 2^{-r\alpha} \leqslant C\|f\|_\alpha N^{-\alpha}$$

en prenant $C = \dfrac{H}{2^\alpha - 1}$ car $2^{-\alpha(r+2)} \leqslant N^{-\alpha}$.
Ceci permet aussi d'affirmer au passage que Λ^α est dense dans E muni de la norme infinie (en effet, on sait déjà que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $(E, \|.\|_\infty)$).