SPÉCIALE MP* : DEVOIR LIBRE

On utilisera les propriétés suivantes des sommes directes (E espace vectoriel de dimension finie) :

- si $E = E_1 + E_2$ alors $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow \dim E = \dim E_1 + \dim E_2$ (qui se généralise à un nombre fini de sous-espaces vectoriels),
- si $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E, $\{I, J\}$ une partition de $[\![1,n]\!]$ et si $E_1 = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$, $E_2 = \mathrm{Vect}(e_j)_{j\in J}$, alors $E = E_1 \oplus E_2$ (là aussi on a une généralisation à toute partition de $[\![1,n]\!]$).

Notations : soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (sous-corps de $\mathbb{C}$) et V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. On note

- $\mathcal{L}(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V,
- Id l'application identique de V,
- fg le produit des éléments f et g de $\mathcal{L}(V)$,
- f^q le produit de q éléments de $\mathcal{L}(V)$ identiques à f, et, par convention, $f^0 = \mathrm{Id}$.

Première partie : idéaux de $\mathcal{L}(V)$

On dit que la partie M de $\mathcal{L}(V)$ est un idéal à gauche lorsque M est un *sous-espace vectoriel* de $\mathcal{L}(V)$ et que

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(V),\ \forall f \in M,\ \varphi f \in M.$$

On dit que la partie M de $\mathcal{L}(V)$ est un idéal à droite lorsque M est un *sous-espace vectoriel* de $\mathcal{L}(V)$ et que

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(V),\ \forall f \in M,\ f\varphi \in M.$$

Soit W un sous-espace vectoriel de V, on note J_W l'ensemble des endomorphismes de V dont l'image est contenue dans W et K_W l'ensemble des endomorphismes de V dont le noyau contient W.

Soit f un élément de $\mathcal{L}(V)$, on note Δ_f l'ensemble des $f\varphi$ où φ décrit $\mathcal{L}(V)$, et Γ_f l'ensemble des φf où φ décrit $\mathcal{L}(V)$.

I.1. **a.** Soit f un élément de $\mathcal{L}(V)$. Montrer que Δ_f est un idéal à droite et Γ_f un idéal à gauche.

b. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Montrer que J_W est un idéal à droite et K_W un idéal à gauche.

I.2. **a.** Soit W un sous-espace vectoriel de V, montrer que J_W est isomorphe à $\mathcal{L}(V, W)$. Exprimer $\dim J_W$ et $\dim K_W$ en fonction de $\dim V$ et $\dim W$.

b. Soit f un endomorphisme de V. Exprimer $\dim \Delta_f$ et $\dim \Gamma_f$ en fonction de $\mathrm{Rg}\, f$ et $\dim V$ (on pourra utiliser l'application $F\ : g \in \mathcal{L}(V) \mapsto fg \in \Delta_f$).

c. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Montrer qu'il existe f dans J_W telle que $\Delta_f = J_W$ et g dans K_W telle que $\Gamma_g = K_W$.

I.3. Soit W, W' des sous-espaces vectoriels de V.

a. Montrer que $J_W \cap J_{W'} = J_{W\cap W'}$ et $K_W \cap K_{W'} = K_{W+W'}$.

b. Montrer que $J_W + J_{W'} = J_{W+W'}$ et $K_W + K_{W'} = K_{W\cap W'}$.

I.4. **a.** Soit M un idéal à droite de $\mathcal{L}(V)$. Montrer qu'il existe W un sous-espace vectoriel de V tel que $J_W \subset M$ et tel qu'aucun sous-espace W' de V ne vérifie $J_{W'} \subset M$ et $\dim W' > \dim W$. Montrer alors que $J_W = M$.

b. Soit M un idéal à gauche de $\mathcal{L}(V)$. Montrer de même qu'il existe un sous-espace vectoriel W de V tel que $K_W = M$.

c. Conclure de cette étude que, pour tout idéal à droite M de $\mathcal{L}(V)$, il existe f dans $\mathcal{L}(V)$ telle que $\Delta_f = M$ et que, pour tout idéal à gauche M de $\mathcal{L}(V)$ il existe g dans $\mathcal{L}(V)$ telle que $\Gamma_g = M$.

I.5. **a.** Soit U et W des sous-espaces vectoriels de V. Calculer $\dim(J_U \cap K_W)$.

b. Montrer que $\{0\}$ et $\mathcal{L}(V)$ sont les seules parties de $\mathcal{L}(V)$ qui sont à la fois idéal à gauche et idéal à droite.

Deuxième partie : bases stables de $\mathcal{L}(V)$

On suppose ici que la dimension de V est un entier n, au moins égal à 2.

On appelle ici base de $\mathcal{L}(V)$, toute *partie* de $\mathcal{L}(V)$ à la fois libre et génératrice. Une base S de $\mathcal{L}(V)$ est dite stable lorsqu'elle vérifie :

$$\forall f, g \in S,\ fg \in S \text{ ou } fg = 0$$

Soit B la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de V. La base S de $\mathcal{L}(V)$ est dite canoniquement associée à B lorsqu'il existe une bijection $(i,j) \mapsto f_{ij}$ de $\{1, \dots, n\}^2$ sur S telle que

$$\forall i,j,k \in \{1,\dots,n\}\ f_{ij}(e_k) \begin{array}{ll} = 0 & \text{si } j \neq k \\ = e_i & \text{si } j = k \end{array}$$

II.1. Montrer que toute base de $\mathcal{L}(V)$ canoniquement associée à une base de V est stable.

Soit S une base stable de $\mathcal{L}(V)$ et soit r le minimum du rang des éléments de S. Soit S' l'ensemble des f de S telles que $\operatorname{Rg} f = r$.

II.2. Montrer que $(\forall g \in S)(\forall f \in S')(gf \in S'$ ou $gf = 0)$ et $(fg \in S'$ ou $fg = 0)$. En utilisant le **I.5.b.**, montrer que $\operatorname{Vect}(S') = \mathcal{L}(V)$ puis que $S' = S$.

Tous les éléments de S ont donc le même rang que l'on note r par la suite.

II.3. On veut montrer dans cette question que $r < n$.

a. Soit $\varphi = \sum_{f \in S} f$. Montrer que, si l'on avait $r = n$, alors on aurait

$$\forall g \in S,\ \varphi g = g\varphi = \varphi$$

b. Conclure.

On note désormais $\mathcal{J}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels U de V tels qu'il existe au moins un élément f de S vérifiant $\operatorname{Im} f = U$; on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels W de S tels qu'il existe au moins un élément f de S vérifiant $\operatorname{Ker} f = W$.

Pour tout U de $\mathcal{J}$ et pour tout W de $\mathcal{N}$, on note S_U l'ensemble des f de S telles que $\operatorname{Im} f = U$ et S^W l'ensemble des f de S telles que $\operatorname{Ker} f = W$.

II.4. **a.** Montrer que $\operatorname{Vect}(S_U)$ est un idéal à droite.
Montrer que $\operatorname{Vect}(S_U) = J_U$, $\operatorname{Vect}(S^W) = K_W$ et $S_U \cap S^W \neq \emptyset$ pour tout U de $\mathcal{J}$ et tout W de $\mathcal{N}$.

b. Montrer que $\mathcal{L}(V)$ est la somme directe des J_U, où U décrit $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{L}(V) = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} J_U$$

c. Montrer que V est la somme directe des U, où U décrit $\mathcal{J}$ (on pourra utiliser la décomposition de Id dans la somme des J_U).

II.5. **a.** Soit W un élément de $\mathcal{N}$. Montrer que K_W est la somme directe des sous-espaces vectoriels engendrés par les $S_U \cap S^W$ où U décrit $\mathcal{J}$:

$$K_W = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} \mathrm{Vect}(S_U \cap S^W).$$

b. En déduire que $\forall U \in \mathcal{J}$, $\forall W \in \mathcal{N}$, $\mathrm{Vect}(S_U \cap S^W) = K_W \cap J_U$.

II.6. **a.** Soit f un élément de $S_U \cap S^W$. Montrer que $f^2 = 0$ ou $f^2 \in S_U \cap S^W$.
b. En déduire que : $\forall W \in \mathcal{N}$ et $\forall U \in \mathcal{J}$ ou bien $U \subset W$ ou bien $U \oplus W = V$.
c. Montrer que, pour tout W de $\mathcal{N}$, il existe au moins un U de $\mathcal{J}$ tel que $U \oplus W = V$.

II.7. Soit (U, W) un élément de $\mathcal{J} \times \mathcal{N}$ tel que $U \oplus W = V$.
On définit comme suit une application $f \mapsto \overline{f}$ de $J_U \cap K_W$ dans $\mathcal{L}(U)$

$$\overline{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in U$$

a. Montrer que $f \mapsto \overline{f}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
b. En appliquant le II.3. à $S_U \cap S^W$, montrer que $r = 1$.
c. Montrer que $S_U \cap S^W$ a pour unique élément la projection d'image U et de noyau W.

II.8. **a.** Montrer que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{N}$ ont chacun n éléments et que $\forall U \in \mathcal{J}$, $\forall W \in \mathcal{N}$, $S_U \cap S^W$ est un singleton. On note $\varphi_{U,W}$ l'unique élément de $S_U \cap S^W$.
b. Montrer que :

$$\begin{aligned} \varphi_{U,W}\varphi_{U',W'} &= 0 && \text{si } U' \subset W \\ &= \varphi_{U,W'} && \text{si } U' \oplus W = V. \end{aligned}$$

c. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{W \in \mathcal{N}} W = \{O\}$.