SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR LIBRE

Première partie : idéaux de $\mathcal{L}(V)$

I.1. a. $\underline{\Delta_f \text{ est un idéal à droite}}$ car Δ_f est un s.e.v. de $\mathcal{L}(V)$ et $(f\psi)\varphi = f(\psi\varphi) \in \Delta_f$. On montre de même que $\underline{\Gamma_f \text{ est un idéal à droite.}}$

b. On a $J_W = \{f \in \mathcal{L}(V) \mid f(V) \subset W\}$: J_W est un s.e.v. de $\mathcal{L}(V)$ et $f\varphi(V) \subset f(V) \subset W$ et donc $\underline{J_W \text{ est un idéal à droite.}}$
Comme $K_W = \{f \in \mathcal{L}(V) \mid \operatorname{Ker} f \supset W\}$: K_W est un s.e.v. de $\mathcal{L}(V)$ et si $x \in W$, $f(x) = 0 \Rightarrow \varphi f(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker}(\varphi f) \supset W$ d'où $\underline{K_W \text{ est un idéal à gauche.}}$

I.2. a. L'application $\Phi : f \in J_W \mapsto f^{|W} \in \mathcal{L}(V, W)$ est un isomorphisme de J_W sur $\mathcal{L}(V, W)$:
- Φ est évidemment linéaire,
- Φ est injective : si $\Phi(f) = 0$ alors $\Phi(f)(x) = 0$ dans W donc $f = 0$,
- Φ est surjective : si g est une application de V dans $W \subset V$ alors on peut définir de manière unique $f \in J_W$ telle que $f^{|W} = g$.

On déduit de ceci que

$$\boxed{\dim J_W = \dim V \times \dim W.}$$

De même si W' est un supplémentaire de W (i.e. $W \oplus W' = V$) alors l'application $\Psi : f \in K_W \mapsto f_{|W'} \in \mathcal{L}(W', V)$ est un isomorphisme de K_W sur $\mathcal{L}(W', V)$ donc

$$\boxed{\dim K_W = (\dim V - \dim W) \dim V.}$$

b. Soit $F : g \in \mathcal{L}(V) \mapsto fg \in \Delta_f$ alors $\operatorname{Im} F = \Delta_f$ et $\operatorname{Ker} F = \mathcal{L}(V, \operatorname{Ker} f)$ en effet

$$\operatorname{Ker} F = \{g \in \mathcal{L}(V) \mid fg = 0\} = \{g \in \mathcal{L}(V) \mid \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f\} = J_{\operatorname{Ker} f}.$$

Or, par la formule du rang, on a

$$\begin{aligned}\dim \Delta_f &= \dim \mathcal{L}(V) - \dim \operatorname{Ker} F = \dim V^2 - \dim V. \dim \operatorname{Ker} f \\ &= \dim V. \operatorname{Rg} f.\end{aligned}$$

Avec $G : g \in \mathcal{L}(V) \mapsto gf \in \Gamma_f$ on obtient

$$\boxed{\dim \Gamma_f = \dim V \operatorname{Rg} f = \dim \Delta_f.}$$

c. Choisissons $f \in \mathcal{L}(V)$ telle que $f(V) = W$ (on peut prendre par exemple une projection sur W en écrivant $V = W \oplus W'$ et $f : x = y + y' \mapsto y \in W$). On a $\dim \Delta_f = \dim J_W$ et $\Delta_f \subset J_W$ car $\operatorname{Im} f\varphi \subset \operatorname{Im} f$ donc

$$\boxed{\Delta_f = J_W.}$$

De même, si on prend $g \in \mathcal{L}(V)$ telle que $\operatorname{Ker} g = W$ alors $\dim \Gamma_g = \dim K_W$ et $\Gamma_g \subset K_W$ car $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} \varphi g$ donc

$$\boxed{\Gamma_g = K_W.}$$

I.3. a. On a l'équivalence suivante :

$$f(V) \subset W \text{ et } f(V) \subset W' \Leftrightarrow f(V) \subset W \cap W'$$

donc $\boxed{J_W \cap J_{W'} = J_{W\cap W'}.}$

De même, comme $\operatorname{Ker} f$ est un espace vectoriel

$$\operatorname{Ker} f \supset W \text{ et } \operatorname{Ker} f \supset W' \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Vect}(W + W')$$

et donc $\boxed{K_W \cap K_{W'} = K_{W+W'}.}$

b. Si $f = g + h$ où $g(V) \subset W$ et $h(V) \subset W'$ alors $f(V) \subset W + W'$ par conséquent $J_W + J_{W'} \subset J_{W+W'}$. On raisonne alors sur les dimensions : on pose $n = \dim V$, $p = \dim W$, $p' = \dim W'$ et $p'' = \dim W \cap W'$ et, en utilisant la formule générale $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$, on a

$$\begin{aligned}
\dim(J_W + J_{W'}) &= \dim J_W + \dim J_{W'} - \dim(J_W \cap J_{W'})\\
&= np + np' - np'' \qquad \text{car } J_W \cap J_{W'} = J_{W\cap W'} \text{ (cf. } \mathbf{a.}\text{)}\\
&= n(\dim W + \dim W' - \dim(W \cap W')) = n \dim(W + W')\\
&= \dim J_{W+W'}.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{J_W + J_{W'} = J_{W+W'}.}$

Ensuite, si $f = g + h$ où $\operatorname{Ker} g = W$ et $\operatorname{Ker} h = W'$ alors $\operatorname{Ker} f \supset W \cap W'$ donc $K_W + K_{W'} \subset K_{W\cap W'}$. On raisonne alors sur les dimensions comme ci-dessus et on utilise le **2.a.** et le **3.a.** :

$$\begin{aligned}
\dim(K_W + K_{W'}) &= \dim K_W + \dim K_{W'} - \dim(K_W \cap K_{W'})\\
&= n(n - p) + n(n - p') - n(n - \dim(W + W') \qquad \text{car } K_W \cap K_{W'} = K_{W+W'}\\
&= n(n - p - p' + \dim(W + W')) = n(n - \dim(W \cap W'))\\
&= \dim K_{W\cap W'}.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{K_W + K_{W'} = K_{W\cap W'}}$.

I.4. a. On remarque tout d'abord que, si $f \in M$ alors $\Delta_f \subset M$ soit encore $J_{f(V)} \subset M$.
Soit $A = \{\dim W \mid W \subset V \text{ et } J_W \subset M\}$. A est un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$, il possède un plus grand élément donc $\exists W$ tel que $\dim W = \max A$, $J_W \subset M$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $g \in M$ telle que $g \notin J_W$ alors $g(V) + W = W_1$ avec $\dim W_1 > \dim W$ (sinon $g(V)$ serait contenu dans W). Or, le **3.b.** nous indique que $J_{W_1} = J_{g(V)} + J_W$ et comme $J_{g(V)} \subset M$, $J_W \subset M$ on a $J_{W_1} \subset M$ ce qui contredit la maximalité de W.
On a prouvé par l'absurde que $M \subset J_W$ d'où

$$\boxed{M = J_W}$$

vu l'hypothèse faite sur W.

b. Il faut ici renverser les inclusions et utiliser la remarque suivante : si $f \in M$ alors $\Gamma_f = K_{\operatorname{Ker} f} \subset M$.
Soit W un sous-espace vectoriel de V tel que $K_W \subset M$ et, si $\dim W' < \dim W$ alors $K_{W'} \not\subset M$ (considérer $B = \{\dim W \mid W \subset V \text{ et } K_W \subset M\}$ et $\min B$).
Supposons par l'absurde que $g \in M$ et $g \notin K_W$.
On a $\operatorname{Ker} g \cap W = W_1$ avec $\dim W_1 < \dim W$ (sinon $\operatorname{Ker} g \subset W$). Or $K_{\operatorname{Ker} g} \subset M$ et $K_W \subset M$ d'où $K_{W_1} = K_{\operatorname{Ker} g} + K_W \subset M$ ce qui est impossible donc, là aussi, on en arrive à la conclusion :

$$\boxed{M = K_W.}$$

c. En utilisant le **2.c.** et le **4.a.** on peut conclure que, si M est un idéal à droite de $\mathcal{L}(V)$ alors il existe $f \in \mathcal{L}(V)$ telle que

$$\boxed{M = \Delta_f.}$$

En utilisant le **2.c.** et le **4.b.** on peut conclure que, si M est un idéal à gauche de $\mathcal{L}(V)$ alors il existe $f \in \mathcal{L}(V)$ telle que

$$\boxed{M = \Gamma_f.}$$

I.5. a. Soit W' un supplémentaire de W ($W \oplus W' = V$), on définit l'application linéaire $\varphi\ : f \in J_U \cap K_W \mapsto f_{|W'} \in \mathcal{L}(W', U)$.
- φ est injective car si $\varphi(f) = 0$ alors f est nulle sur W (par définition) et sur W' donc sur $W \oplus W' = V$ et $f = 0$.
- φ est surjective car connaissant $g \in \mathcal{L}(W', U)$ on peut définir $f \in J_U \cap K_W$ en posant $f(x+x') = g(x')$ où $x + x'$ est la décomposition d'un élément de V selon la somme directe $W \oplus W'$.

φ est donc un isomorphisme, on peut alors conclure :

$$\boxed{\dim(J_U \cap K_W) = \dim \mathcal{L}(W', U) = \dim W' \times \dim U = (\dim V - \dim W) \times \dim U.}$$

b. Si M est un idéal bilatère alors il existe (U, W) sous-espaces vectoriels de V tels que $M = J_U = K_W$. Soit $p = \dim U$ et $r = \dim W$ (toujours avec $n = \dim V$) alors, comme $J_U = K_W = K_W \cap J_U$ on a

$$\begin{aligned} \dim J_U = np &= \dim K_W = (n-r)n \\ &= \dim J_U \cap K_W = (n-r)p \qquad \text{vu le } \mathbf{5.a.} \end{aligned}$$

d'où les relations $(n-r)(n-p) = 0$ et $n = p + r$. On distingue alors deux cas
- $n = r$, $p = 0$ alors $M = \{0\}$.
- $n = p$, $r = 0$ alors $M = \mathcal{L}(V)$.

Réciproquement, on vérifie que $\underline{\{0\} \text{ et } \mathcal{L}(V) \text{ sont bien les seuls idéaux bilatères.}}$

Deuxième partie : bases stables

II.1. On a $f_{ij}f_{kl}(e_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ f_{ij}(e_k) & \text{si } j = k \end{cases}$ donc $f_{ij}f_{kl} = \delta_{jk}f_{il}$.

La base des (f_{ij}) est une base stable.

II.2. Soit $g \in S$ et $f \in S'$. On sait que $\mathrm{Rg}(gf) \leqslant \mathrm{Rg}\, f = r$ donc soit $gf = 0$ soit $gf \in S$ et $\mathrm{Rg}(gf) = r$ ce qui entraîne que $gf \in S'$.

Pour fg, le raisonnement est identique après avoir remarqué que $\mathrm{Rg}(fg) \leqslant \mathrm{Rg}\, f$.

Soit $M = \mathrm{Vect}(S')$, montrons que M est un idéal bilatère :
- $M \neq \emptyset$ (évident).
- Si $g \in S$ et $f = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k \in M$ (où $f_k \in S'$) alors $gf = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k g f_k \in M$ car on sait que $gf_k \in S'$ ou $gf_k = 0$. On a de même $fg \in M$.
Comme S est une base, on en déduit que $\forall g \in \mathcal{L}(V)$, $\forall f \in M$, $fg \in M$ et $gf \in M$.
- Enfin, grâce aux propriétés des espaces vectoriels, $\forall (f, g) \in M^2$, $f - g \in M$.

Conclusion : M est un idéal bilatère et comme $M \neq \{0\}$, on en déduit que $M = \mathcal{L}(V)$. $S' \subset S$ est une famille génératrice extraite d'une base, c'est une base, par conséquent $\mathrm{Card}\, S' = \mathrm{Card}\, S$ et donc $\boxed{S = S'.}$

II.3. a. Si $r = n$ alors tous les éléments de S sont bijectifs donc $\forall (f, g) \in S$, $\mathrm{Rg}(fg) = n$ d'où $fg \in S$ car $fg \neq 0$. $f \mapsto fg$ pour $g \in S$ est une permutation des éléments de S (en tant qu'application injective d'un ensemble fini dans lui-même) donc

$$\varphi g = \sum_{f \in S} fg = \sum_{f' \in S} f' = \varphi$$

et en utilisant la symétrie du raisonnement, on peut conclure

$$\boxed{g\varphi = \varphi = \varphi g.}$$

b. L'égalité $\varphi g = g\varphi$ étant vraie sur les éléments d'une base, on peut l'étendre par linéarité à tous les éléments de $\mathcal{L}(V)$. On en déduit que $\mathrm{Vect}(\varphi)$ est un idéal à droite et à gauche.
Comme $\dim \mathrm{Vect}(\varphi) \leqslant 1$, $\mathrm{Vect}(\varphi) \neq \mathcal{L}(E)$ qui est de dimension 4 au moins donc $\varphi = 0$. On en déduit alors que $\sum\limits_{f \in S} f = 0$: impossible car les éléments f de S sont libres.
Conclusion : $\boxed{r < n.}$

II.4. a. $\mathrm{Vect}(S_U) \subset J_U$ et $\mathrm{Vect}(S_U)$ est un idéal à droite :

- Soit $f \in S_U$ et $g \in S$ alors $fg = 0$ ou $fg \in S$.
  Si $fg \neq 0$ alors $\mathrm{Im}(fg) \subset \mathrm{Im}\, f = U$. Comme tous les éléments de S ont même rang, on en déduit que $\mathrm{Rg}(fg) = \mathrm{Rg}\, f$ donc $\mathrm{Im}(fg) = \mathrm{Im}\, f = U$ par égalité des dimensions.
- Si $g \in \mathcal{L}(E)$, on écrit $g = \sum\limits_{i=1}^{n^2} \lambda_i f_i$ (décomposition dans la base S). On a ainsi $fg = \sum\limits_{i=1}^{n^2} \lambda_i f f_i \in \mathrm{Vect}(S_u)$.

Conclusion : $\mathrm{Vect}(S_U)$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par multiplication à droite est bien un idéal à droite.
Il existe donc U' sous-espace vectoriel de V tel que $\mathrm{Vect}(S_U) = J_{U'}$. Par construction $U \subset U'$ (en effet il existe $f \in \mathrm{Vect}(S_U)$ telle que $\mathrm{Im}\, f \subset U \subset U'$) et comme $J_{U'} \subset J_U$ on a aussi $U' \subset U$ donc $U = U'$ soit

$$\boxed{\mathrm{Vect}(S_U) = J_U.}$$

$\mathrm{Vect}(S^W) \subset K_W$ et comme $\mathrm{Vect}(S^W)$ est un idéal à gauche alors $\mathrm{Vect}(S^W) = K_{W'}$. Par construction $W' \subset W$ et $K_{W'} \subset K_W$ alors $W = W'$, soit

$$\boxed{\mathrm{Vect}(S^W) = K_W.}$$

Enfin $\forall f \in S$, $\mathrm{Rg}\, f = r$ alors $\dim \mathrm{Ker}\, f = n - r$ donc $\dim(K_W \cap J_U) = r^2$ (cf. **I.5.a.**). Comme $r \neq 0$ alors $K_W \cap J_U \neq \{0\}$.
Soit $h \in K_W \cap J_U = \mathrm{Vect}(S_U) \cap \mathrm{Vect}(S^W)$, $h \neq 0$. On peut décomposer h dans les bases S_U et S^W :

$$h = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = \sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j.$$

Comme $h \neq 0$, il existe i_0 tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$ et, compte tenu de l'unicité de la décomposition de h dans la base S, il existe j_0 tel que $\lambda_{i_0} f_{i_0} = \mu_{j_0} g_{j_0}$. On a alors $f_{i_0} = g_{j_0} = f \in S_U \cap S^W \neq$ donc $S_U \cap S^W \neq \emptyset$.

b. Comme $\{S_U,\ U \in \mathcal{J}\}$ réalise une partition de S on a

$$\mathcal{L}(V) = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} \mathrm{Vect}(S_U) = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} J_U.$$

En effet si $f \in S_{u_0} \cap S_{U_1}$ alors $\operatorname{Im} f = U_0$ et $\operatorname{Im} f = U_1$ donc $U_0 = U_1$ et par contraposée, si $U_0 \neq U_1$ alors $S_{U_0} \cap S_{U_1} = \emptyset$.

c. Écrivons $\mathrm{Id} = f_{U_1} + \cdots + f_{U_p}$, en multipliant à droite par f_{U_1} on arrive à

$$\underbrace{f_{U_1}}_{\in J_{U_1}} = \underbrace{f_{U_1}^2}_{\in J_{U_1}} + \underbrace{f_{U_2} f_{U_1}}_{\in J_{U_2}} + \cdots + \underbrace{f_{U_p} f_{U_1}}_{\in J_{U_p}}$$

et comme la somme des J_U est directe, on en déduit que $f_{U_1} = f_{U_1}^2$, $f_{U_i} f_{U_1} = 0$. Les f_{U_j} sont des projecteurs sur des sous-espaces en somme directe.

Conclusion : $\boxed{V = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} U.}$

On pouvait remarquer que, comme $J_U \cap J_{U'} = J_{U \cap U'}$ alors, par récurrence sur p, on peut prouver que, si la somme $\bigoplus_{i=1}^{p} J_{U_i}$ est directe alors la somme $\bigoplus_{i=1}^{p} U_i$ est directe.

On peut aussi raisonner sur les dimensions : on a $\sum_{U \in \mathcal{J}} U \subset V$ et on utilise l'égalité $n^2 = \dim \mathcal{L}(V) = \sum_{U \in \mathcal{J}} \dim J_u = \sum_{U \in \mathcal{J}} n \dim U$.

II.5. a. $\{S_U,\ U \in \mathcal{J}\}$ est une partition de S donc $\{S_U \cap S^W,\ U \in \mathcal{J}\}$ réalise une partition de S^W. Comme $\mathrm{Vect}(S^W) = K_W$ alors

$$\boxed{K_W = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} \mathrm{Vect}(S_U \cap S^W)}$$

b. On sait (cf. **II.4.b.**) que $K_W = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} K_W \cap J_U$ ($(S_U \cap S^W)_{U \in \mathcal{J}}$ réalise une partition de S^W et $\mathrm{Vect}(S^W) = K_W$), comme $\mathrm{Vect}(S_U \cap S^W) \subset K_W \cap J_U$ on a

$$\dim K_W = \sum_{U \in \mathcal{J}} \dim \mathrm{Vect}(S_U \cap S^W) \leqslant \sum_{U \in \mathcal{J}} \dim(K_W \cap J_U) = \dim K_W$$

donc on a égalité à tous les niveaux i.e. $\dim(S_U \cap S^W) = \dim(K_W \cap J_U)$, conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(S_U \cap S^W) = K_W \cap J_U = \mathrm{Vect}(S^W) \cap \mathrm{Vect}(S_U).}$$

II.6. a. Montrons que, si $f^2 \neq 0$ alors $f^2 \in S_U \cap S^W$.
Or $f^2(V) \subset U$ et $\mathrm{Ker}\, f^2 \supset W$ donc $f^2 \in J_U \cap K_W = \mathrm{Vect}(S_U \cap S^W)$. Comme $f^2 \in S$ alors $f^2 \in S_U \cap S^W$, $\mathrm{Rg}\, f^2 = r = \dim U$ donc $f^2(V) = U$ soit $f^2 \in S_U$.
De même $\mathrm{Ker}\, f^2 \supset \mathrm{Ker}\, f$ et, en raisonnant sur les dimensions, $\mathrm{Ker}\, f^2 = W$ et $f^2 \in S^W$.
Conclusion : on a

$$\boxed{f^2 = 0 \text{ ou } f^2 \in S_U \cap S_W.}$$

b. Si $f \in S_U \cap S^W$ et si $f^2 = 0$ alors $\boxed{U = \mathrm{Im}\, f \subset W = \mathrm{Ker}\, f.}$
Si $f^2 \neq 0$ alors $f^2 \in S_U \cap S^W$. Soit $y \in U \cap W$, $y = f(x)$ car $y \in U$ et $f(y) = f^2(x) = 0$ car $y \in W$ donc $x \in \mathrm{Ker}\, f^2 = W$ soit $y = 0$. Comme $\dim U + \dim W = \dim V$ (théorème du rang) alors on peut conclure

$$\boxed{V = U \oplus W.}$$

c. Par l'absurde : si $\forall U \in \mathcal{I},\ U \subset W$ alors $V \subset W$ car V est somme directe des sous-espaces U, ceci est impossible donc

$$\boxed{\exists U \in \mathcal{I},\ U \oplus W = V.}$$

II.7. **a.** $\bar{f}$ est la restriction de f à U, $f \mapsto \bar{f}$ est bien linéaire. Cette application est-elle bijective ?
Déterminons son inverse : si $\bar{f} \in \mathcal{L}(U)$ on définit $f \in J_U \cap K_W$ par $\forall x \in U$, $f(x) = \bar{f}(x)$ et $\forall x \in W$, $f(x) = 0$. On prouve ainsi que $f \mapsto \bar{f}$ est bien un isomorphisme.

b. Comme $S_U \cap S^W$ est une base de $J_U \cap K_W$, son image par $f \mapsto \bar{f}$ sera une base de $\mathcal{L}(U)$ et ce sera même une base stable (cf. **6.a.**). Or le **II.3.** nous dit que, si $\dim U \geqslant 2$, $\operatorname{Rg} \bar{f} < \dim U$. Comme $\operatorname{Rg} \bar{f} = \operatorname{Rg} f^2 = \dim U$ alors $\dim U \leqslant 1$. Finalement on peut conclure que $\dim U = 1$ car $U \neq \{0\}$ et donc $\boxed{r = 1.}$

c. Le **I.5.a.** implique que $\dim(K_W \cap J_U) = 1$ donc $S_U \cap S^W$ possède un seul élément f qui vérifie $f^2 \in S_U \cap S^W$ (car $\operatorname{Im} f = U$, $\operatorname{Ker} f = W$ et $U \not\subset W$) donc $f^2 = f$ et $\operatorname{Im} f = U$, $\operatorname{Ker} f = W$ et en conclusion
$S_U \cap S^W$ a pour unique élément la projection d'image U et de noyau W.

II.8. **a.** $\dim U = 1 \Rightarrow \dim J_U = n$ et $\dim K_W = n$ donc S_U possède n éléments (ainsi que S^W).
Comme $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$ et $\{S_U,\ U \in \mathcal{I}\}$ réalise une partition de S alors $\operatorname{Card} \mathcal{I} = n$ (et de même on a $\operatorname{Card} \mathcal{N} = n$).
Enfin le **II.5.a.** nous dit que $\dim K_W = n = \sum\limits_{U \in \mathcal{I}} \dim \operatorname{Vect}(S_U \cap S^W)$. Dans cette somme on a n nombres supérieurs ou égaux à 1, ils sont donc tous égaux à 1.
Conclusion : $\boxed{S_U \cap S^W \text{ est un singleton.}}$

b. Si $U' \subset W$ alors il est évident que $\varphi_{U,W}\varphi_{U',W'} = 0$.
Si $U' \oplus W = V$ alors $\varphi_{U',W'}(V) = U'$ et $\varphi_{U,W}(U') \neq \{0\}$ car $U' \oplus W = V$ donc $\varphi_{U,W}\varphi_{U',W'} \neq 0$. Or $\varphi_{U,W}\varphi_{U',W'}(V) \subset U$ entraîne que $\varphi_{U,W}\varphi_{U',W'}(V) \in S_U$ et si $x \in W'$ alors $\varphi_{U,W}\varphi_{U',W'}(V)(x) = 0$ soit, en conclusion

$$\boxed{\varphi_{U,W}\varphi_{U',W'}(V) = \varphi_{U,W'}.}$$

c. Si $x \in \bigcap\limits_{W \in \mathcal{N}} W$ alors $\forall f \in S$, $f(x) = 0$ entraîne que $\forall f \in \mathcal{L}(V)$, $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ donc

$$\boxed{\bigcap_{W \in \mathcal{N}} W = \{0\}.}$$