

60.21M

SESSION 2006

---

**Filière MP**

**MATHÉMATIQUES MPI 1**

---

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

---

Durée : 6 heures

---

*L'usage de calculatrice est interdit*

**Tournez la page S.V.P.**

## NOTATIONS ET CONVENTIONS

Soit  $G$  un groupe et soit  $S$  une partie de  $G$ . On appelle sous-groupe de  $G$  engendré par  $S$  l'intersection de tous les sous-groupes de  $G$  qui contiennent  $S$ . On dit que  $S$  engendre  $G$  si le sous-groupe de  $G$  engendré par  $S$  est  $G$ .

Un élément  $g$  de  $G$  est d'ordre fini si le sous-groupe de  $G$  engendré par  $\{g\}$  est fini. On appelle alors ordre de  $g$  le cardinal de ce sous-groupe. Si  $G$  est fini, le cardinal de tout sous-groupe de  $G$  divise le cardinal de  $G$ ; en particulier, tout élément de  $G$  est d'ordre fini et son ordre divise le cardinal de  $G$ .

Dans tout le problème,  $n$  est un entier naturel non nul. Soit  $\mathbf{k}$  un corps; on note

- $\mathcal{M}_n(\mathbf{k})$  la  $\mathbf{k}$ -algèbre des matrices carrées à  $n$  lignes à coefficients dans  $\mathbf{k}$ ;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$  le groupe des éléments inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{k})$ ;
- $I_n$  l'élément neutre de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ , c'est-à-dire la matrice identité de taille  $n$ ;
- $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$  le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$  formé des matrices de déterminant 1;
- $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$  l'ensemble des matrices de  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q})$  à coefficients dans  $\mathbf{Z}$ .

Pour tous éléments distincts  $i$  et  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on note  $E_{i,j}$  l'élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$  dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne, qui vaut 1. On pose  $M_{i,j} = I_n + E_{i,j}$ ; c'est un élément de  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ .

### Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$

1. Montrer que  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$  est un sous-groupe de  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q})$  (on pourra utiliser l'expression de l'inverse d'une matrice en fonction de sa comatrice).
2. Pour tous entiers distincts  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$  et tout entier relatif  $m$ , calculer  $(M_{i,j})^m$ .
3. Soit  $M$  une matrice à  $n$  colonnes, non nécessairement carrée, à coefficients dans  $\mathbf{Z}$ . On appelle opération élémentaire restreinte sur les colonnes de  $M$  la multiplication à droite de  $M$  par une matrice  $(M_{i,j})^m$ , où  $m \in \mathbf{Z}$  et où  $i$  et  $j$  sont des éléments distincts de  $\{1, \dots, n\}$ . Comment s'expriment les colonnes de la matrice  $M(M_{i,j})^m$  en fonction de celles de  $M$ ?
4. On suppose  $n \geq 2$ . Soient  $a_1, \dots, a_n$  des entiers relatifs. Montrer que l'on peut, par des opérations élémentaires restreintes sur ses colonnes, transformer la matrice ligne

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

en la matrice ligne

$$(d \ 0 \ \cdots \ 0)$$

où  $d$  est le pgcd positif de  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

5. Montrer que l'ensemble des matrices  $M_{i,j}$ , pour  $i$  et  $j$  distincts dans  $\{1, \dots, n\}$ , engendre le groupe  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ .
6. Soit  $p$  un nombre premier, de sorte que  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  est un corps.

a) Montrer que la réduction modulo  $p$  des coefficients d'une matrice permet de définir un morphisme de groupes

$$\varphi_{n,p} : \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$$

b) Montrer que  $\varphi_{n,p}$  est surjectif (on pourra utiliser la question 4 et raisonner par récurrence sur  $n$ ).

## Sous-groupes finis de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$

7. Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ .

a) Montrer que tout élément  $M$  de  $G$  est diagonalisable sur  $\mathbf{C}$  et que

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M^{-1}) \quad |\mathrm{Tr}(M)| \leq n$$

Quels sont les éléments de  $G$  de trace  $n$ ? Quels sont ceux de trace  $-n$ ?

b) Montrer que la matrice

$$U = \sum_{M \in G} {}^t M M$$

est symétrique définie positive.

c) On munit  $\mathbf{R}^n$  du produit scalaire de matrice  $U$  dans la base canonique. Montrer que les endomorphismes de  $\mathbf{R}^n$  dont la matrice dans la base canonique est un élément de  $G$  sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

8. Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ .

a) Montrer que le groupe  $G$  est cyclique (on pourra utiliser la question 7.c).

b) Montrer que le cardinal de  $G$  est 1, 2, 3, 4 ou 6.

c) Déterminer tous les éléments de  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$  d'ordre 2.

d) Caractériser les éléments de  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$  d'ordre 3, puis 4, puis 6, à l'aide de leur trace.

e) Pour chaque  $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ , donner un exemple de sous-groupe de  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$  de cardinal  $g$ .

9. Soit  $M$  un élément de  $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$  d'ordre fini. Déterminer les valeurs possibles de sa trace et déterminer l'ordre de  $M$  en fonction de celle-ci.

10. Considérons des matrices carrées, à coefficients dans un corps  $\mathbf{k}$ , dont les lignes et les colonnes sont indexées par un ensemble fini  $I$  pas nécessairement ordonné. Si  $M = (a_{i,j})_{i,j \in I}$  et  $N = (b_{i,j})_{i,j \in I}$  sont de telles matrices, on définit la trace de  $M$  comme  $\sum_{i \in I} a_{i,i}$ , la somme  $M + N$  comme la matrice  $(a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j \in I}$  et le produit  $MN$  comme la matrice  $(c_{i,j})_{i,j \in I}$ , où  $c_{i,j} = \sum_{k \in I} a_{i,k} b_{k,j}$ . On définit ainsi une  $\mathbf{k}$ -algèbre; on notera  $\mathcal{M}_I(\mathbf{k})$  cette algèbre et  $\mathrm{GL}_I(\mathbf{k})$  le groupe de ses éléments inversibles. Si  $I$  est de cardinal  $n$ , le choix d'une bijection entre  $I$  et  $\{1, \dots, n\}$  induit un isomorphisme de  $\mathbf{k}$ -algèbres entre  $\mathcal{M}_I(\mathbf{k})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbf{k})$ . On identifiera en particulier  $\mathrm{GL}_{\{1, \dots, n\}}(\mathbf{k})$  et  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ .

Soient  $I$  et  $I'$  des ensembles finis, soit  $M = (a_{i,j})_{i,j \in I}$  un élément de  $\mathcal{M}_I(\mathbf{R})$  et soit  $M' = (b_{i',j'})_{i',j' \in I'}$  un élément de  $\mathcal{M}_{I'}(\mathbf{R})$ . On définit un élément  $M \star M' = (c_{(i,i'),(j,j')})$  de  $\mathcal{M}_{I \times I'}(\mathbf{R})$  en posant

$$c_{(i,i'),(j,j')} = a_{i,j} b_{i',j'}$$

pour tous  $i, j \in I$  et  $i', j' \in I'$ .

Enfin, pour tout entier  $r$  strictement positif, on définit un élément  $M^{*r}$  de  $\mathcal{M}_I(\mathbf{R})$  par récurrence sur  $r$  en posant  $M^{*1} = M$  et  $M^{*r} = M^{*(r-1)} \star M$ .

a) Calculer la trace de  $M \star M'$  en fonction de celles de  $M$  et de  $M'$ .

b) Soient  $N$  un élément de  $\mathcal{M}_I(\mathbf{R})$  et  $N'$  un élément de  $\mathcal{M}_{I'}(\mathbf{R})$ . Exprimer la matrice  $(MN) \star (M'N')$  en fonction des matrices  $M \star M'$  et  $N \star N'$ .

c) Soit  $r$  un entier strictement positif. Montrer qu'en associant à  $M$  la matrice  $M^{*r}$ , on définit un morphisme de groupes

$$\psi_r : \mathrm{GL}_I(\mathbf{R}) \rightarrow \mathrm{GL}_{I^r}(\mathbf{R})$$

11. Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$  de cardinal  $g$ . On pose

$$S = \sum_{M \in G} M$$

a) Montrer que la trace de  $S$  est un entier divisible par  $g$  (on pourra calculer  $S^2$ ).

b) Soit  $r$  un entier strictement positif. Décrire le noyau de la restriction à  $G$  du morphisme de groupes

$$\psi_r : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathrm{GL}_{\{1, \dots, n\}^r}(\mathbf{R})$$

défini dans la question 10.c) (on pourra étudier la trace des éléments de ce noyau).

c) Montrer que pour tout entier naturel  $r$ , la somme  $\sum_{M \in G} \mathrm{Tr}(M)^r$  est un entier divisible par  $g$ .

12. Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$  de cardinal  $g$ .

a) Soit  $\{t_0, t_1, \dots, t_s\}$  l'ensemble des traces (distinctes) des éléments de  $G$ , avec  $t_0 = n = \mathrm{Tr}(I_n)$ . Montrer que

$$(n - t_1) \cdots (n - t_s)$$

est un entier divisible par  $g$  (on pourra poser  $P(X) = (X - t_1) \cdots (X - t_s)$  et considérer la somme  $\sum_{M \in G} P(\mathrm{Tr}(M))$ ).

b) En déduire que  $g$  divise  $(2n)!$  et que si  $n$  est impair,  $g$  divise  $(2n - 1)!$ .

c) Si  $n = 3$ , montrer que  $g$  divise 24 (on pourra utiliser la question 9).

13. a) Construire pour chaque entier  $n \geq 2$  un sous-groupe de  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$  de cardinal  $2^{n-1}n!$  (si  $T$  est l'ensemble des vecteurs colonnes à  $n$  lignes dont tous les coefficients sont nuls sauf un qui vaut  $\pm 1$ , on pourra considérer les matrices qui appliquent l'ensemble  $T$  dans lui-même).

b) En déduire le cardinal maximal d'un sous-groupe fini de  $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ .

14. Soit  $p$  un nombre premier et soit  $M$  un élément de  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$  d'ordre  $p$ . On note  $m$  le pgcd positif de tous les coefficients de  $M - I_n$ .

a) Montrer que  $m$  divise  $p$  (on pourra écrire  $M = I_n + mN$  et développer  $(I_n + mN)^p$ ).

b) Montrer que soit  $m = 1$ , soit  $m = p = 2$ .

15. Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$  de cardinal  $g$ .

a) Montrer que la restriction à  $G$  du morphisme de groupes  $\varphi_{n,3} : \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$  défini dans la question 6.a) est injective.

- b) En déduire que  $g$  divise  $\frac{1}{2}(3^n - 1)(3^n - 3) \cdots (3^n - 3^{n-1})$ .  
 c) Si  $n = 4$ , montrer que  $g$  divise 5760.
16. Montrer que tout groupe fini de cardinal  $g$  est isomorphe à un sous-groupe de  $SL_g(\mathbf{Z})$ .

### Morphismes de groupes et $SL_n(\mathbf{Z})$

17. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes surjectif

$$SL_2(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

(on pourra montrer que  $SL_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  est isomorphe à un groupe de permutations).

18. On suppose dans cette question  $n \geq 3$ .

a) Soient  $i, j$  et  $k$  des éléments deux à deux distincts de  $\{1, \dots, n\}$ . Calculer le produit

$$M_{i,j}M_{j,k}(M_{i,j})^{-1}(M_{j,k})^{-1}$$

b) Soit  $G$  un groupe commutatif. Montrer que tout morphisme de groupes  $SL_n(\mathbf{Z}) \rightarrow G$  est constant.

19. Soit  $G$  un groupe engendré par une partie finie et soit  $H$  un groupe fini.

a) Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de morphismes de groupes de  $G$  dans  $H$ .

b) Soit  $u : G \rightarrow G$  un morphisme de groupes surjectif. Montrer que pour tout morphisme de groupes  $v : G \rightarrow H$ , on a  $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v)$ .

20. En déduire que tout morphisme de groupes surjectif  $SL_n(\mathbf{Z}) \rightarrow SL_n(\mathbf{Z})$  est bijectif.