

SPÉCIALE MP* : DEVOIR LIBRE

PARTIE I

I.1. Question classique, on prouve par récurrence que $\chi^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{2n}} P_n(x) e^{-1/x}$ pour $x > 0$ et on sait que $\chi^{(n)}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. En utilisant le théorème du prolongement dérivable, on peut affirmer que χ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

I.2. Il suffit de prendre $\theta(x) = \chi(x - 1/2)\chi(2 - x)$ et on vérifie que θ satisfait aux conditions imposées.

I.3. Soit $0 < a < b$, $\theta(2^{-j}x)$ est nul pour tout x de $]a, b[$ ssi

$$2^{-j}a < \frac{1}{2} \text{ ou } 2^{-j}b > 2 \text{ soit } j > \frac{\ln 2a}{\ln 2} \text{ ou } j < \frac{\ln(b/2)}{\ln 2}.$$

Φ est en fait une somme finie de termes sur tout intervalle $]a, b[$ donc Φ sera de classe C^∞ sur la réunion de tous ces intervalles donc sur \mathbb{R} .

Pour $x > 0$, l'expression de Φ fera intervenir un ou deux termes strictement positifs, donc $\Phi(x) > 0$ pour $x > 0$.

I.4. Ensuite :

(i) φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ , le dénominateur ne s'annulant pas. Mais, comme $\theta(|x|)$ s'annule sur $] - 1/2, 1/2[$ alors φ sera de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

(ii) Immédiat.

(iii) On remarque tout d'abord que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \Phi(x) = \Phi(2^k x)$$

car cela revient à translater les indices. On en déduit que l'on peut écrire : $\varphi(2^{-j}x) = \frac{\theta(2^{-j}x)}{\Phi(x)}$ et donc

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \varphi(2^{-j}x) = \frac{1}{\Phi(x)} \sum_{j=0}^{+\infty} \theta(2^{-j}x) \leq \frac{1}{\Phi(x)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta(2^{-j}x) = 1.$$

Conclusion : comme φ est paire, on a bien $0 \leq \varphi(x) \leq 1$.

Étudions l'égalité lorsque $x > 0$: $\varphi(x) = 1$ ssi pour tout $j < 0$, on a $\theta(2^{-j}x) = 0$ ce qui est encore équivalent à : pour tout $j < 0$, $2^{-j}x \geq 2$ i.e. $x \geq 1$.

Conclusion : on a égalité ssi $|x| \geq 1$.

PARTIE II

II.1. Comme φ est nulle en dehors de $[-2, 2]$, on a en fait

$$\psi(\xi) = \int_{-2}^2 \varphi(x) e^{ix\xi} dx.$$

Ensuite $\psi(\xi) - \psi(\xi') = \int_{-2}^2 \varphi(x) [e^{ix\xi} - e^{ix\xi'}] dx$, or $|e^{ix\xi} - e^{ix\xi'}| = 2 \left| \sin \frac{\xi - \xi'}{2} x \right|$ d'où

$$|\psi(\xi) - \psi(\xi')| \leq \int_{-2}^2 |\varphi(x)| \cdot 2 \left| \sin \frac{\xi - \xi'}{2} x \right| dx \leq 2|\xi - \xi'| \int_{-2}^2 |x| \cdot |\varphi(x)| dx$$

en utilisant la majoration $|\sin x| \leq |x|$.

ψ est continue donc localement intégrable, on fait alors des intégrations par parties

$$\begin{aligned}\xi^3 \psi(\xi) &= [-i\xi^2 \varphi(x) e^{ix\xi}]_{-2}^2 + i\xi^2 \int_{-2}^2 \varphi'(x) e^{ix\xi} dx \\ &= i\xi^2 \int_{-2}^2 \varphi'(x) e^{ix\xi} dx \\ &= -i \int_{-2}^2 \varphi'''(x) e^{ix\xi} dx \quad \text{en intégrant deux fois par parties}\end{aligned}$$

donc $|\xi \psi(\xi)| \leq \frac{K}{\xi^2}$ où on a posé $K = \int_{-2}^2 |\varphi'''(x)| dx$. On a donc bien la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |\xi| \cdot |\psi(\xi)| d\xi$ car $\int_{-X}^X |\xi| \cdot |\psi(\xi)| d\xi$ est une fonction de X croissante et majorée par $\int_{-1}^1 |\xi| \cdot |\psi(\xi)| d\xi + \int_{|\xi| \geq 1} \frac{K}{\xi^2} d\xi$.

- II.2. a.** La fonction L est bien 2π -périodique car changer x en $x + 2\pi$ revient à remplacer k par $k + 1$ dans la sommation sur \mathbb{Z} (sommation qui d'ailleurs est finie). Comme pour la fonction φ on pourra alors en déduire que L est C^∞ .
- b.** On calcule les coefficients de Fourier de L sachant que pour $x \in [0, 2\pi]$, la somme sera finie. On a donc

$$\begin{aligned}\widehat{L}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{x/2\pi + k}{N}\right) e^{i(x/2\pi + k)t} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \varphi\left(\frac{x/2\pi + k}{N}\right) e^{i(x/2\pi + k)t} dx \quad \text{car la somme est finie} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \varphi\left(\frac{y}{2\pi N}\right) e^{i(t/2\pi - n)y} dy \quad \text{en posant } y = x + 2k\pi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{y}{2\pi N}\right) e^{i(t/2\pi - n)y} dy\end{aligned}$$

Enfin, en posant $y = 2\pi Nu$, on a $\widehat{L}(n) = N \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{i(t-2\pi n)Nu} du = N\psi(N(t-2n\pi))$.

- c.** Vu que L est C^∞ , L est égale à sa série de Fourier en application du théorème de Dirichlet. On a alors

$$\begin{aligned}L(0) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{L}(n) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} N\psi(N(t + 2k\pi)) \quad \text{on a changé } k \text{ en } -k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikt} \quad \text{on remplace } L(0) \text{ par son expression}\end{aligned}$$

- II.3.** En appliquant cette égalité pour $N = 2^n$, on a

$$I_n = \int_0^{2\pi} |h(t)| \cdot |\psi_n(t)| dt \leq 2^n \int_0^{2\pi} |h(t)| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi(2^n(t + 2k\pi))| dt$$

(La série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi(2^n(t + 2k\pi))|$ est absolument convergente car L étant \mathcal{C}^∞ , $\sum |\widehat{L}(n)|$ converge.)

On utilise alors l'inégalité du début de cette partie pour $k \notin \{0, \pm 1\}$:

$$|h(t)| \cdot |\psi(2^n(t + 2k\pi))| \leq \frac{Mkt^\alpha}{2^{3n}|t + 2k\pi|^3} \leq \frac{K(2\pi)^\alpha}{(2^{3n}2\pi||k| - 1|^3)} = \frac{K'}{||k| - 1|^3}$$

qui nous permet d'affirmer la convergence uniforme de la série et permet d'intégrer terme à terme, d'où :

$$\begin{aligned} I_n &\leq 2^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |h(t)| \cdot |\psi(2^n(t + 2k\pi))| dt \\ &\leq 2^n \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)| \cdot |\psi(2^n u)| du \text{ en posant } t + 2k\pi = u \text{ (} h(t) = h(u)\text{)} \\ &\leq 2^n M \int_{-\infty}^{\infty} |u|^\alpha |\psi(2^n u)| du \text{ avec l'hypothèse} \\ &\leq M 2^{-n\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^\alpha |\psi(\xi)| d\xi \quad (\xi = 2^n u). \end{aligned}$$

et on sait que cette dernière intégrale converge pour $0 < \alpha \leq 1$.

PARTIE III

III.1. On fait le changement de variable $x - t = u$ et on utilise le fait que l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas des bornes.

III.2. Si $|2^{-n}k| \geq 2$ (i.e. $|k| \geq 2^{n+1}$) alors $\varphi(2^{-n}k) = 0$ donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f * \psi_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[\sum_{|k| < 2^{n+1}} \varphi(2^{-n}k) e^{ik(x-t)} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| < 2^{n+1}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\ &= \sum_{|k| < 2^{n+1}} \varphi(2^{-n}k) \widehat{f}(k) e^{ikx} \end{aligned}$$

ce qui permet aussi d'affirmer que $f * \psi_n \in E_{2^{n+1}-1}$.

III.3. a. On a

$$\widehat{f}_r(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(0) e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^r \sum_{|m| \leq 2^{n+1}} \int_0^{2\pi} \varphi(2^{-n}m) \widehat{f}(m) e^{i(m-k)x} dx.$$

Si $k \neq 0$, la première intégrale est nulle et les autres aussi s'annulent sauf celles où l'on a $m = k$ et donc

$$\widehat{f}_r(k) = \left(\sum_{n=0}^r \varphi(2^{-n}k) \right) \widehat{f}(k)$$

et, avec le résultat du I.3.(iii), on a bien $|\widehat{f}_r(k)| \leq |\widehat{f}(k)|$.

Si $k = 0$ alors, vu que si $m = 0$, $\varphi(2^{-n}m) = 0$, il ne restera qu'une intégrale et on

aura $\widehat{f}_r(0) = \widehat{f}(0)$.

On pouvait aussi écrire

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \widehat{f}(0) + \sum_{n=0}^r \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \varphi(2^{-n}k) e^{ikx} \right) \\ &= \widehat{f}(0) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \left(\sum_{n=0}^r \varphi(2^{-n}k) \right) e^{ikx} \end{aligned}$$

d'où $\widehat{f}_r(0) = \widehat{f}(0)$ et si $k \neq 0$, $\widehat{f}_r(k) = \left(\sum_{n=0}^r \varphi(2^{-n}k) \right) \widehat{f}(k)$.

Conclusion : on a, dans tous les cas :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad |\widehat{f}_r(k)| \leq |\widehat{f}(k)|.$$

On utilise enfin l'égalité de Parseval :

$$\|f_r\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_r(k)|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2.$$

b. Soit $f \in E_N$, on sait déjà que $\widehat{f}(k) = 0$ pour $|k| > N$ et donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad (\forall x \in \mathbb{R}), \quad f * \psi_n(x) = \sum_{|k| \leq N} \varphi(2^{-n}k) \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

d'où

$$\begin{aligned} (\forall r \in \mathbb{N}), \quad (\forall x \in \mathbb{R}), \quad f_r(x) &= \widehat{f}(0) + \sum_{n=0}^r \left(\sum_{|k| \leq N} \varphi(2^{-n}k) \widehat{f}(k) e^{ikx} \right) \\ &= \widehat{f}(0) + \sum_{|k| \leq N} \left(\sum_{n=0}^r \varphi(2^{-n}k) \right) \widehat{f}(k) e^{ikx}. \end{aligned}$$

Si $2^r \geq N$, $|k| \leq N$ et $n \geq r+1$, on a

$$2^{-n}k \leq 2^{-(r+1)}N \leq \frac{1}{2} \text{ ce qui donne } \varphi(2^{-n}k) = 0$$

et donc, d'après le 1-3°-(iii)

$$\sum_{n=0}^r \varphi(2^{-n}k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(2^{-n}k) = 1$$

et, en reportant dans la formule ci-dessus, on arrive à

$$f_r(x) = \widehat{f}(0) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^* \\ |k| \leq N}} \widehat{f}(k) e^{ikx} = f(x).$$

c. Soit $N \in \mathbb{N}$, $S_N f \in E_N$ et donc, pour $2^r \geq N$, on a $(S_N f)_r = S_N f$. En remarquant alors que $(S_N f)_r - f_r = (S_N f - f)_r$ on a

$$f - f_r = f - S_N f + (S_N f - f)_r$$

et, pour $2^r \geq N$

$$\|f - f_r\|_2 \leq \|f - S_N f\|_2 + \|(S_N f - f)_r\|_2 \leq 2\|f - S_N f\|_2.$$

Grâce à l'égalité de Parseval, on sait que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \|f - S_N f\|_2 = 0$ on peut donc conclure :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \|f - f_r\|_2 = 0.$$

PARTIE IV

IV.1. On remarque que, si $x \in \mathbb{R}$ alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-n}k) \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = 0.$$

car on affine à une somme finie et donc

$$f * \psi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)\psi_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x-t) - f(x)]\psi_n(t) dt.$$

L'hypothèse faite sur f nous permet de dire que la fonction h définie par la relation $h(t) = f(x-t) - f(x)$ vérifie la condition du II.3, on en a alors la conclusion et donc

$$|f * \psi_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_\alpha 2^{-n\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^\alpha |\psi(\xi)| d\xi = H \|f\|_\alpha 2^{-n\alpha}.$$

La série $\sum f * \psi_n$ converge normalement pour $\|\cdot\|_\infty$ vers une fonction $g = \widehat{f}(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} f * \psi_n$ et comme on sait que l'espace E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet alors $g \in E$. Vu que $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$ dans E , $\|f_r - g\|_2$ tend vers 0, on a alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ donc $f = g$. Conclusion : la suite $(f_r)_{r \in \mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f .

IV.2. Si $0 < r < q$ sont 2 entiers naturels alors $f_q - f_r = \sum_{n=r+1}^q f * \psi_n$ donc

$$\|f_q - f_r\|_\infty \leq \sum_{n=r+1}^q \|f * \psi_n\|_\infty \leq H \|f\|_\alpha \sum_{n=r+1}^q 2^{-n\alpha} \leq H \|f\|_\alpha \frac{2^{-\alpha(r+1)}}{1 - 2^{-\alpha}}.$$

Si on fait tendre q vers l'infini, on obtient (grâce à la continuité de la norme) :

$$(\forall f \in \Lambda^\alpha), \quad (\forall r \in \mathbb{N}), \quad \|f - f_r\|_\infty \leq \frac{H \|f\|_\alpha}{1 - 2^{-\alpha}} (2^{-\alpha})^{r+1}.$$

Comme $f * \psi_n \in E_{2^{n+1}}$ on a

$$f_r = \widehat{f}(0) + \sum_{n=0}^r f * \psi_n \in E_{2^{r+1}}.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $2^{r+1} - 1 \leq N \leq 2^{r+2} - 1$ alors $f_r \in E_N$ et, en utilisant l'inégalité $N \leq 2^{r+2}$ qui donne $2^{-\alpha(r+2)} \leq N^{-\alpha}$, on obtient

$$\begin{aligned} d(f, E_N) &\leq \|f - f_r\|_\infty \leq \frac{H \|f\|_\alpha}{1 - 2^{-\alpha}} 2^{-\alpha} 2^{-r\alpha} \leq \frac{H \|f\|_\alpha}{1 - 2^{-\alpha}} 2^\alpha 2^{-\alpha(r+2)} \\ &\leq \frac{H \|f\|_\alpha}{1 - 2^{-\alpha}} 2^\alpha N^{-\alpha} \leq C \|f\|_\alpha N^{-\alpha} \end{aligned}$$

en prenant $C = \frac{2^{2\alpha} H}{2^\alpha - 1}$.

Ceci permet aussi d'affirmer au passage que Λ^α est dense dans E muni de la norme infinie (en effet, on sait déjà que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$).