SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

Notations

Dans tout le problème, on désigne par E l'ensemble (espace vectoriel sur $\mathbb{C}$) des fonctions $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont continues par morceaux, continues à gauche et 2π-périodiques.
Si $f \in E$, on note

$$N_1(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|\,\mathrm{d}y, \quad N_2(f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|^2\,\mathrm{d}y\right)^{1/2},\ N_\infty(f) = \sup_{y\in[-\pi,\pi]} |f(y)|.$$

Q0 Montrer que les éléments de E sont des fonctions bornées.

Sommation de Césaro

En vue de l'application de cette partie aux séries de Fourier, on considère d'emblée une série $\sum c_n$ donc les termes, à valeurs complexes, sont indexées par les entiers relatifs $n \in \mathbb{Z}$. Pour une telle série, et pour $N \in \mathbb{N}$, on note

$$s_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n, \quad \sigma_N = \frac{1}{N+1}(s_0 + \cdots + s_N).$$

Q1 Montrer que si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers une limite à préciser.

Q2
1. La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles et croissante, et que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Que peut-on dire de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Q3 On suppose dans cette question que $(nc_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée : $|nc_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour $k, N \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\sigma_{N,k} = \frac{1}{k}(s_N + \cdots + s_{N+k-1})$$

1. Calculer
$$\sigma_{N,k} - \left(1 + \frac{N}{k}\right)\sigma_{N+k-1} + \frac{N}{k}\sigma_{N-1}.$$
Établir que si une suite $(k_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini, avec N/k_N tendant vers une limite finie l, alors
$$\lim_{N\to+\infty} \sigma_N = s \Rightarrow \lim_{N\to+\infty} \sigma_{N,k_N} = s.$$
2. Calculer
$$\sigma_{N,k} - s_N - \sum_{N<|n|<N+k} \left(1 + \frac{N-|n|}{k}\right) c_n.$$
Prouver que
$$|\sigma_{N,k} - s_N| \leqslant \frac{Mk}{N}.$$
3. On suppose que $(\sigma_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l. Que peut-on dire de $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$?

Séries de Fourier

Dans cette question, $c_n\ : x \mapsto c_n(x)$ est une fonction, de la forme $c_n(x) = a_n\,\mathrm{e}^{inx}$, avec $a_n \in \mathbb{C}$. La série $\sum c_n$ est donc une série trigonométrique, à laquelle on associe comme ci-dessus sa somme partielle s_N et sa somme de Césaro σ_N, qui sont éléments de E.
Lorsque $f \in E$, on lui associe ses coefficients de Fourier $\widehat{f}(n)$:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,\mathrm{e}^{-iny}\,\mathrm{d}y.$$

Si $\sum c_n$ est la série de Fourier de f, c'est-à-dire si $a_n = \widehat{f}(n)$, alors on note $S_N f = s_N$ et $T_N f = \sigma_N$.

Q4 Si $\sum a_n\,\mathrm{e}^{inx}$ est une série trigonométrique, exprimer en fonction des a_n les nombres b_n tels que

$$\sigma_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} b_n\,\mathrm{e}^{inx}.$$

Q5 Soit F une partie non vide de $\mathbb{Z}$ et soit $f \in E$. On suppose que
- pour tout $n \in F$, on a $\widehat{f}(n) = 1$,
- $N_1(f) \leqslant 1$.

Déterminer $N_1(f)$ et prouver que, pour tout $n \in F$, $x \mapsto f(x)\,\mathrm{e}^{-inx}$ est à valeurs réelles positives. En déduire que F n'a qu'un seul élément et déterminer f.

Q6 1. Soit $r, N \in \mathbb{N}$. On note

$$u(x) = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{inx}, \quad v(x) = \sum_{n=-N-r}^{N+r} \mathrm{e}^{inx}.$$

Établir une majoration de $N_1(g)$, pour $g(x) = \frac{1}{2N+1}u(x)v(x)$.

2. Étant donné un nombre réel $\varepsilon > 0$ et une partie finie F de $\mathbb{Z}$, construire une fonction $f \in E$ telle que
(a) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\widehat{f}(n) \in [0,1]$,
(b) pour tout $n \in F$, on a $\widehat{f}(n) = 1$,
(c) $N_1(f) < 1 + \varepsilon$.

Q7 Montrer que, pour tout $f \in E$, on a

$$S_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)D_N(x-y)\,\mathrm{d}y, \text{ pour } D_N(x) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

On appelle D_N le *noyau de Dirichlet* (d'ordre N).

Q8 De même, montrer que, pour tout $f \in E$, on a

$$T_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)F_N(x-y)\,\mathrm{d}y, \text{ pour } F_N(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{(N+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

On appelle F_N le *noyau de Féjer* (d'ordre N).

Q9 1. Calculer, pour $f \in E$,

$$S_N f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_N(y)\,\mathrm{d}y$$
$$T_N f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)F_N(y)\,\mathrm{d}y.$$

2. Calculer les intégrales $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,\mathrm{d}x, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\,\mathrm{d}x.$

3. Étant donné un nombre réel $\eta \in]0, \pi[$, déterminer

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\int_{-\pi}^{-\eta} F_N(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\eta}^{\pi} F_N(y)\,\mathrm{d}y \right).$$

Q10 Soit $f \in E$.

1. On suppose que f est continue en un point x_0. Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} T_N f(x_0)$$

existe et déterminer la limite.

2. On suppose que f est en fait continue en tout point. Montrer que f est uniformément continue, puis que $T_N f$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Q11 Soit $f \in E$. Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} N_1(f - T_N f) = 0.$$

Indication : *commencer par le cas où f est continue.*

Q12 Soit $\sum a_n \,\mathrm{e}^{inx}$ une série trigonométrique.

1. Calculer

$$a_n\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_N(y)\,\mathrm{e}^{-iny}\,\mathrm{d}y,$$

pour tout n, N tels que $|n| \leqslant N$.

2. On suppose que

$$\lim_{N\to+\infty} N_1(\sigma_N) = 0.$$

Montrer que $a_n = 0$ pour tout n appartenant à $\mathbb{Z}$.

Fonctions de type positif

Pour $f, g \in E$, on définit une fonction $f * g \ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Q13 Montrer que $f * g$ est 2π-périodique et que $f * g = g * f$.

On admet que $f * g \in E$. De même, la fonction $h \ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$h(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

appartient à E et on admet que les nombres

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f*g)(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)h(y)\,\mathrm{d}y$$

coïncident. On note $I_f(g)$, on encore

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

leur valeur commune.

On désigne alors par P l'ensemble des f appartenant à E telles que, pour toute fonction $u \ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique, $I_f(u)$ est un réel positif. Les éléments de P sont les fonctions de *type positif*.

On appelle enfin *polynôme trigonométrique* toute fonction $v \ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forme

$$v(x) = a_{-m}\,\mathrm{e}^{-imx} + \cdots + a_m\,\mathrm{e}^{imx}.$$

Les nombres complexes $a_{-m}, \dots, a_m$ sont les coefficients de v. On rappelle le théorème de Stone-Weierstrass, sous la forme suivante : pour toute fonction $v\ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique, il existe une suite $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ où chaque v_m est un polynôme trigonométrique, et telle que $N_\infty(v_m - v) \to 0$ quand $m \to +\infty$.

Q14 Montrer que tout polynôme trigonométrique à coefficients réels positifs appartient à P.

Q15 Soit $f \in E$.

1. Si $u, v\ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont continues et 2π-périodiques, montrer que
$$|I_f(u) - I_f(v)| \leqslant N_1(f) N_\infty(u - v)(N_\infty(u) + N_\infty(v)).$$
2. Montrer que f appartient à P si et seulement si $I_f(v)$ est un réel positif pour tout polynôme trigonométrique v.

Q16 Soit $f \in E$.

1. Montrer que $f \in P$ si et seulement si $\widehat{f}(n)$ est un réel positif pour tout n dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit $f \in P$ et x un point où f est continue. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
3. Soient $f \in P$ et $N \in \mathbb{N}$. A-t-on $S_N f \in P$ et $T_N f \in P$?

Q17 Soient $f, g \in E$.

1. Exprimer $\widehat{f * g}(n)$ en fonction de $\widehat{f}(n)$ et $\widehat{g}(n)$.
2. En déduire que, si f^* désigne la fonction $x \mapsto f^*(x) = \overline{f(-x)}$ alors $f * f^* \in P$.

Q18 Soit $f \in P$.

1. La suite $(T_N f(0))_{N\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?
2. Exprimant $T_N f(0)$ au moyen des coefficients de Fourier de f, en déduire que la série à termes réels positifs $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$ converge (c'est-à-dire que les séries $\sum \widehat{f}(n)$ et $\sum \widehat{f}(-n)$ convergent).
3. En déduire que f est continue et exprimer, pour tout nombre réel x, $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\, \mathrm{e}^{inx}$ en fonction de $f(x)$. En particulier, montrer que $f(0)$ est réel et $|f(x)| \leqslant f(0)$.
4. En déduire une démonstration de la formule de Parseval.

Q19 Soit $f \in P$. Montrer que, pour tout ensemble fini $(x_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ de nombres réels, et pour tous les nombres complexes $(z_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$, l'expression
$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} f(x_j - x_k)\overline{z_k} z_j$$
est un nombre réel positif. *Indication* : on pourra d'abord vérifier que $T_N f$ satisfait cette propriété.

Q20 Soit $f \in P$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la fonction $g\ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, définie par
$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{a^2}(2f(x) - f(x+a) - f(x-a))$$
appartient à P.
2. On suppose qu'il existe une suite de nombres réels $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, avec $a_m > 0$, tendant vers 0, telle que
$$\lambda = \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_m^2}(2f(0) - f(a_m) - f(a_{-m})) < +\infty.$$
   (a) Déterminer le signe de $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \widehat{f}(n) - \lambda$.
   (b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Donner un exemple de fonction de type positif qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.