SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

NB : dans tout le corrigé on note $\widehat{f}(n) = c_n(f)$.

Q0 E est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues par morceaux et 2π -périodiques, lesquelles sont bornées.
En effet, soit $I =]0, 2\pi]$, il existe une subdivision de I, $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_n = 2\pi$ telle que f soit continue sur chaque intervalle $I_i =]a_i, a_{i+1}]$ et prolongeable par continuité sur $[a_i, a_{i+1}]$. $|f|$ est donc majorée par M_i sur I_i. Soit $M = \max_{i\in[0,n-1]} M_i$, $|f|$ est majorée par M sur I et, par 2π-périodicité, $|f|$ est majorée par M sur $\mathbb{R}$. 2
On notera que N_1 et N_2 sont des normes sur E, question qui n'était pas posée.

Sommation de Césaro

Q1 C'est le théorème de Césaro ; la suite (σ_n) converge vers la limite de la suite (s_n). . 2

Q2 **1.** La réciproque est fausse : un contre-exemple "standard" est la suite $(s_n = (-1)^n)$, avec $\sigma_n \longrightarrow 0$. 2

2. Observons le sens de variation :

$$\begin{aligned}\sigma_N - \sigma_{N-1} &= \frac{1}{N+1}(s_0 + \cdots + s_N) - \frac{1}{N}(s_0 + \cdots + s_{N-1}) \\ &= \frac{1}{N+1}\Big(s_N - \frac{1}{N}(s_0 + \cdots + s_{N-1})\Big) \geqslant 0 \text{ car } (s_n) \nearrow .\end{aligned}$$

La suite (σ_n) est donc croissante ; comme elle converge, elle est majorée par sa limite l ; si la suite (s_n) n'est pas majorée par l, étant croissante, elle sera minorée par $l + 2\varepsilon$ à partir d'un rang N_1, donc (σ_n) sera minorée par $l + \varepsilon$ à partir d'un rang $N_2 \geqslant N_1$, ce qui est impossible. (s_n) est par conséquent majorée par l, donc convergente vers l vu **Q1**. 3

Q3 **1.** $\sigma_{N,k} - (1 + N/k)\sigma_{N+k-1} + (N/k)\sigma_{N-1} = 0$, ... 1
ce qui conduit à $\lim_{N\to+\infty} \sigma_{N,k_n} = (1 + l)s - ls = s$, résultat demandé. 1

2. $\sigma_{N,k} = s_N + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{N<|n|\leqslant N+j} c_n$, or pour n fixé, c_n apparaît $((N + k) - |n|)$ fois dans cette somme double, d'où :

$$\sigma_{N,k} - s_N = \sum_{N<|n|\leqslant N+k} [((N + k) - |n\,|)/k]\, c_n,$$

et l'expression proposée est donc nulle. 2
On en déduit en majorant les $|c_n|$ par M/N que :

$$\begin{aligned}|\sigma_{N,k} - s_N| &\leqslant \frac{M}{N} \sum_{N<|n|<N+k} \Big(1 + \frac{N - |n|}{k}\Big) \\ &\leqslant \frac{M}{N}\frac{2}{k} \sum_{1\leqslant j\leqslant k-1} j \\ &\leqslant \frac{M}{N}\frac{2}{k}\frac{k(k-1)}{2} \leqslant \frac{Mk}{N}\end{aligned}$$ 3

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $k_N = E(N/p)$; alors, d'après **1.**, $\lim_{N\to+\infty} \sigma_{N,k_n} = l$; or, d'après **2.**, $|\sigma_{N,k} - s_N| \leqslant \frac{M}{p}$, donc, pour N assez grand, $|s_N - l| \leqslant 2\frac{M}{p}$. Ceci est vrai pour tout p, d'où : $\lim_{N\to+\infty} s_N = l$ . . . . $\boxed{4}$

Séries de Fourier

Q4 $\sigma_N(x) = 1/(N+1)[s_0(x) + \cdots + s_N(x)]$; le facteur $a_n e^{inx}$ apparaît dans $s_j(x)$ pour $j \geqslant |n|$, donc $N+1-|n|$ fois, d'où :

$$\sigma_N(x) = \sum_{|n|\leqslant N} \left[\frac{(N+1-|n|}{N+1} a_n\right] e^{inx}, \text{ soit } b_n = \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) a_n. \qquad \boxed{3}$$

Q5 Avec n dans F, $|c_n(f)| = 1$, donc

$$1 = |c_n(f)| \leqslant N_1(f) \leqslant 1$$

et en conclusion : $N_1(f) = 1$. . . . . $\boxed{1}$

Lemme Soit f dans E avec $N_1(f) = 0$. En utilisant une subdivision adaptée à la fonction, la positivité et la continuité sur chaque intervalle I_p ouvert associé à cette subdivision f est nulle sur chaque intervalle ouvert I_p, par continuité à gauche en chaque point elle est nulle sur $]-\pi,\pi]$ et par 2π périodicité elle est nulle sur $\mathbb{R}$.
On en déduit également que:

$$\int_{(-\pi,\pi)} (|f(x)| - \Re(f(x)\exp(-inx)))\, \mathrm{d}x = 0$$

D'après le lemme, $|f| - \Re(fe_{-n})$ étant dans E et positive, elle est nulle. On en déduit que $\Re(fe_{-n}) = |f|$ et par suite enfin que $\Im(fe_{-n}) = 0$ donc que $fe_{-n} = |f|$. **Soit encore fe_{-n}est à valeurs positives**. . . . . $\boxed{5}$
Soient n et p dans F. Comme $N_1(f) \neq 0$, f est non nulle sur un intervalle non trivial, donc $e^{-i(n-p)x}$ est à valeurs positives sur cet intervalle, ce qui impose $n = p$. On conclut : Card$(F) = 1$. . . . . $\boxed{2}$
F est un singleton n_0 et les éléments f de E vérifiant ces hypothèses sont de la forme $f(x) = g(x)e^{-in_0x}$, avec g élément de E à valeurs réelles positives tel que $N_1(g) = 1$. *Dans ces conditions il est difficile de "déterminer" f.* . . . . $\boxed{4}$

Q6 **1.** Appliquons l'égalité de Parseval à u et v :

$$N_2(u) = \sqrt{2N+1} \text{ et } N_2(v) = \sqrt{2N+2r+1}.$$

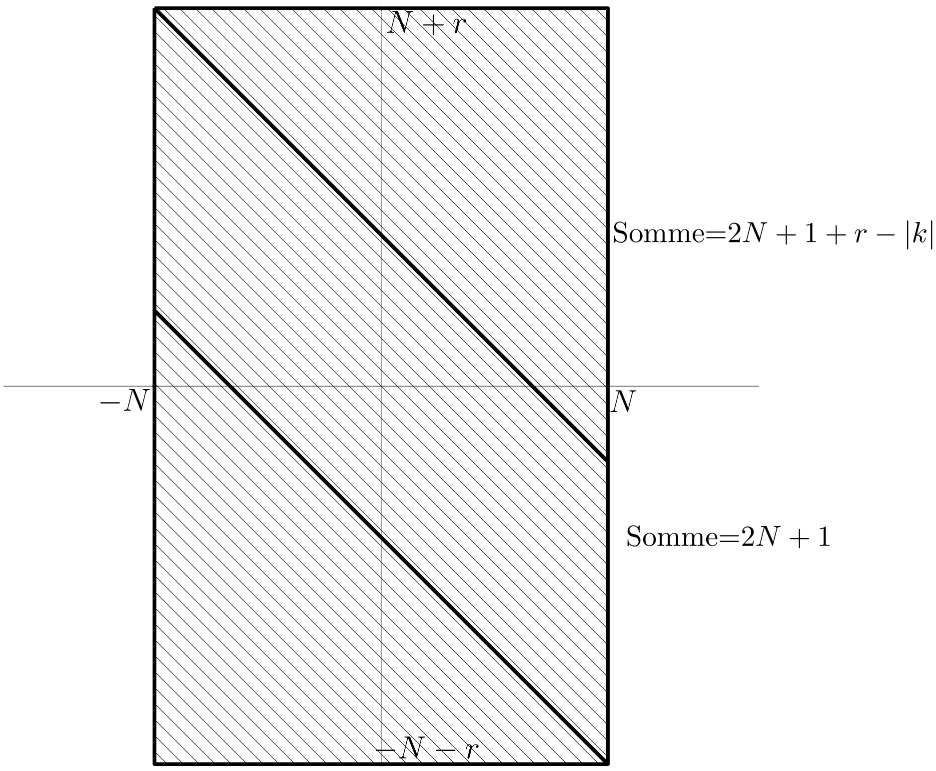
L'inégalité de Schwarz appliquée aux éléments de E donne alors :

$$N_1(g) = \frac{1}{2N+1} N_1(u.v) \leqslant \frac{1}{2N+1} N_2(u) N_2(v) = \sqrt{\frac{2N+r+1}{2N+1}} \qquad \boxed{3}$$

2. Si F est vide, $f \equiv 1$ convient ; nous supposons F non vide pour la suite.
Soit alors r fixé tel que $F \subset [-r, r]$; nous considérons l'application g définie en **1.**,

$$g = \frac{1}{2N+1}\left(\sum_{|k|\leqslant r} (2N+1)e_k + \sum_{r<|k|\leqslant 2N+r} (2N+1+r-|k|)e_k\right)$$

avec N suffisamment grand pour avoir $N_1(g) < 1+\varepsilon$. donc $c_n(g) = 1$ si $n \in [-r, r]$ et $c_n(g) \in [0, 1]$ sinon. L'application g ainsi construite est une solution. . . . . $\boxed{4}$
On peut voir le calcul de g sur un dessin :



Q7 Il s'agit du calcul habituel du noyau de Dirichlet : on vérifie que

$$u(x)=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$$

et le résultat annoncé suit. 3

Q8 Il s'agit du calcul habituel du noyau de Féjer : on vérifie que

$$2\sum_{n=0}^{N}\sin(n+1/2)t.\sin(t/2)=2\sin^2(N+1)t/2,$$

puis que

$$\sum_{n=0}^{N}D_n(t)=\frac{\sin^2(N+1)\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

et l'égalité demandée s'obtient en posant $x-y=t$ dans l'intégrale. 3

Q9 **1.** On effectue le changement de variable $y=x-t$ dans les intégrales des égalités de **Q7** et **Q8** ; la 2π-périodicité des fonctions employées permet alors de conclure à la nullité des expressions proposées. 2

2. En revenant à l'expression $D_N(x)=\sum\limits_{n=-N}^{N}e^{inx}$, on obtient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(x)\,\mathrm{d}x=1.$$ 2

Or (voir **Q8**) $F_N(x) = \dfrac{1}{N+1}\sum\limits_{n=0}^{N} D_n(x)$ d'où :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 1. \qquad \boxed{1}$$

Remarque : on peut aussi appliquer le **1.** à la fonction constante 1.

3. Pour $\eta \leqslant |y| \leqslant \pi$ on a $\sin^2(y/2) \geqslant \sin^2(\eta/2)$, d'où $0 \leqslant F_N(y) \leqslant \dfrac{1}{(N+1)}.\dfrac{1}{\sin^2(\eta/2)}$ et par conséquent :

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\int_{-\pi}^{-\eta} F_N(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\eta}^{\pi} F_N(y)\,\mathrm{d}y\right) = 0. \qquad \boxed{2}$$

Q10 **1.** Nous décomposons

$$T_Nf(x_0) - f(x_0) = \int_{|y|\leqslant\eta}(f(x_0-y)-f(x_0))F_N(y)\,\mathrm{d}y + \int_{|y|\geqslant\eta}(f(x_0-y)-f(x_0))F_N(y)\,\mathrm{d}y,$$

qui conduit à

$$|T_Nf(x_0 - f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sup_{|y|\leqslant\eta}|f(x_0-y)-f(x_0)| + \frac{2}{\pi}N_\infty(f)\int_{\eta}^{\pi} F_N(y)\,\mathrm{d}y.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. La continuité de f en x_0 permet de choisir $\eta > 0$ tel que le premier terme de la somme ci-dessus soit majoré par ε. Le résultat de **Q9.3.** permet en un deuxième temps de choisir N tel que le deuxième terme de cet somme soit majoré par ε ; finalement :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_0 > 0 \mid N > N_0 \Rightarrow |T_Nf(x_0 - f(x_0)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Donc $T_Nf(x_0)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque f est continue en x_0.................... $\boxed{4}$

2. Dans la majoration ci-dessus, N_0 ne dépend que de $\eta(x_0)$ et de $N_\infty(f)$.
Or dans cette question f est continue et périodique, donc bornée et uniformément continue.. $\boxed{1}$
η peut être choisi indépendamment de x_0, et N_0 aussi : T_Nf converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.. $\boxed{2}$

Q11 Si f est continue, $(T_Nf)_N$ converge uniformément vers f sur le segment $[-\pi,\pi]$, donc converge en moyenne vers f sur ce segment.. $\boxed{1}$
Cas général de f dans E : On justifie en s'aidant d'un graphique :
soit p le nombre de discontinuités à droite de f dans [-π,π[. Pour tout $\alpha > 0$ (inférieur au pas d'une subdivision adaptée à f) il existe une fonction continue $\widetilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f = \widetilde{f}$, sauf sur des segments de longueur α d'extrémités gauche les points de discontinuité de f et affine sur ces segments (interpolant f aux extrémités de ces segments). Alors

$$N_\infty\left(f-\widetilde{f}\right) \leqslant N_\infty(f) \text{ et } N_1(f-\widetilde{f}) \leqslant N_\infty(f)p\alpha = K\alpha$$

donc $N_1\left(f-\widetilde{f}\right) \leqslant K\alpha$ avec K fixe et α arbitraire (approximation N_1 de f dans E par une fonction continue)

$$\begin{aligned}
N_1(f - T_Nf) &\leqslant N_1\left(f-\widetilde{f}\right) + N_1\left(\widetilde{f}-T_N\widetilde{f}\right) + N_1\left(T_N\widetilde{f}-T_Nf\right)\\
&\leqslant K\alpha + N_1\left(\widetilde{f}-T_N\widetilde{f}\right) + N_\infty\left(T_N(f-\widetilde{f})\right)\\
&\leqslant K\alpha + N_1\left(\widetilde{f}-T_N\widetilde{f}\right) + K\alpha
\end{aligned}$$

en utilisant la positivité du noyau de Fejer et la valeur de son intégrale sur $[-\pi, \pi]$ et les intervalles où $(f - \widetilde{f})$ est non nulle avec le résultat **Q8**.
Soit en définitive

$$N_1(f - T_N f) \leqslant 2K\alpha + N_1\left(\widetilde{f} - T_N\widetilde{f}\right).$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que $2K\alpha < \varepsilon$ et avec $\widetilde{f}$ continue fixée, associée à cet α, d'après le **1.**, il existe N_0 tel que, pour $N > N_0$, $N_\infty\left(T_N\widetilde{f} - \widetilde{f})\right) < \varepsilon$.
Soit $N_1(f - T_N f) < 2\varepsilon$.
Conclusion $\lim\limits_{N\to+\infty} N_1(f - T_N f) = 0$. 6
Remarque : si on admet la validité de l'application de la formule de Fubini indistinctement en x et en y, on peut simplifier un peu la majoration précédente en vérifiant que : $N_1(T_N(g)) \leqslant N_1(g)$, ce qui évite de passer par la majoration de $N_1\left(\widetilde{f} - T_N\widetilde{f}\right)$par $N_\infty\left(T_N(f - \widetilde{f})\right)$ et la prise en compte des intervalles où $(f - \widetilde{f})$ est non nulle sur$(-\pi, \pi)$ avec l'expression de **Q8**.

Q12 **1.** On se reporte à la question **Q4** : $a_n\left(1 - \dfrac{|n|}{(N+1)}\right) = b_n$ et la différence proposée est donc nulle.. 2

2. Soit n fixé dans $\mathbb{Z}$ et $N \geqslant |n|$: $\left|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_N(y)e^{-iny}\,\mathrm{d}y\right| \leqslant N_1(\sigma_N)$ donc :

$$\lim_{N\to+\infty} N_1(\sigma_N) = 0 \Longrightarrow \lim_{N\to+\infty} a_n(1 - |n|/(N+1)) = 0 \Longrightarrow a_n = 0.$$ 2

Fonctions de type positif

Q13 On établit la périodicité de $f * g$ en effectuant le changement de variable $y = t + 2\pi$ et la commutativité $f * g = g * f$ en posant $y = x - t$.................................. 2

Q14 L'ensemble P est évidemment stable par addition et par multiplication par les réels *positifs* ; de plus l'application $f \longmapsto I_f(g)$ est linéaire. Il suffit donc de prouver que $\forall m \in \mathbb{Z}, (x \mapsto e^{imx}) \in P$.
Or $I_{e^{imx}}(g)$ est de la forme $z\overline{z}$, donc c'est un réel positif. Par conséquent tout polynôme trigonométrique à coefficients réels positifs est élément de P. 3

Q15 **1.** On a $I_f(u) - I_f(v) = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\left(u(y)\overline{u(x)} - v(y)\overline{v(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, or

$$\begin{aligned}|u(y)\overline{u(x)} - v(y)\overline{v(x)}| &= |(u(y) - v(y))\overline{u(x)} + (\overline{u(x)} - \overline{v(x)}v(y)| \\ &\leqslant N_\infty(u - v)(N_\infty(u) + N_\infty(v))\end{aligned}$$

de plus : $\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = N_1(f)$ d'où :

$$|I_f(u) - I_f(v)| \leqslant N_1(f)N_\infty(u - v)(N_\infty(u) + N_\infty(v)).$$ 2

2. L'implication directe découle des définitions de P et $I_f(g)$. 1
Examinons la réciproque : soit u une application continue 2π-périodique et (u_m) une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers u ; la suite $(N_\infty(u_m))$ est bornée, donc, vu le **1.**, il existe une constante C telle que :

$$|I_f(u) - I_f(u_m)| \leqslant C.N_\infty(u - u_m)$$

Or, par hypothèse, $(I_f(u_m))$ est une suite de réels positifs. Cette suite converge vers $I_f(u)$ qui est donc un réel positif. 3

Q16 **1.** On applique **Q15.2.** : si f est dans P, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$I_f(e^{inx}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{in(y-x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c_n(f)\,\mathrm{d}y = c_n(f) \geqslant 0. \qquad 1$$

Réciproquement, supposons que $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) \geqslant 0$ et soit g un polynôme trigonométrique.

$$\begin{aligned} I_f(g) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\sum_{\text{finie}}\overline{c_n(g)}e^{-inx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sum_{\text{finie}}\overline{c_n(g)}c_n(f)\,\mathrm{d}y = \sum_{\text{finie}}\overline{c_n(g)}c_n(f)c_n(g) \geqslant 0 \end{aligned}$$

On conclut alors $f \in P$ à l'aide de la réciproque de **Q15.2**. 2

*L'objectif principal des questions suivantes est de démontrer la continuité de f en **Q18.3.** Remarquons que le théorème de Dirichlet n'est pas applicable ici.*

2. Remarquons d'abord, en posant $g(t) = f(-t)$, que $c_n(g) = c_{-n}(f) = c_n(\overline{f})$; en effet :

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \text{ (car } c_n(f) \text{ est réel).} \end{aligned}$$

g et $\overline{f}$ sont donc deux applications continues par morceaux et 2π-périodiques qui ont les mêmes coefficients de Fourier ; on obtient $N_2(g-\overline{f}) = 0$; ces deux applications sont donc égales en tout point où elles sont continues, donc en tout point x tel que f soit continue *en x et en $-x$* ; or, si f est continue en x_0 mais pas en $-x_0$, $\overline{f}$ l'est également et g est continue *à droite* en x_0 (puisque f est continue à gauche en $-x_0$) ; par prolongement par continuité à droite en x_0 on obtient encore l'égalité d'où : si f est continue en x, alors $f(-x) = \overline{f(x)}$. 4

3. Si f est dans P alors les coefficients de Fourier a_n de f sont des réels positifs, donc les b_n également (notations de **Q4**), donc $S_N f$ et $T_N f$ sont des éléments de P. . 1

Q17 **1.** Si on admet la validité d'interversion de l'ordre d'intégration dans le calcul $c_n(f*g)$

$$\begin{aligned} 4\pi^2 c_n(f*g) &= \int_{(-\pi,\pi)}\int_{(-\pi,\pi)} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\exp\left(-i\left(nx-ny+ny\right)\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{(-\pi,\pi)} g(y)\exp(-iny)\left(\int_{(-\pi,\pi)} f(x-y)\,\mathrm{d}y\exp\left(-i\left(nx-ny\right)\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{(-\pi,\pi)} g(y)\exp(-iny)2\pi c_n(f)\,\mathrm{d}y = 4\pi^2 c_n(f)c_n(g) \end{aligned}$$

Conclusion: $c_n(f*g) = c_n(f)*c_n(g)$. 1

Remarque : si on n'autorise pas l'inversion de l'ordre d'intégration : en utilisant la convergence en moyenne quadratique de $S_N(g)$ vers g on démontre la convergence uniforme de $f * S_N(g)$ vers $f * g$ (donc au passage la continuité de $f * g$). Alors par convergence uniforme :

$$c_n(f*g) = \lim_{N\to+\infty} c_n\left(f * S_N(g)\right). = \lim_{N\to+\infty} c_n(f)c_n(S_N(g)). = c_n(f)c_n(g).$$

(En utilisant simplement la linéarité de l'intégrale et l'ordre d'intégration imposé par la formule initiale donnant $c_n\left(f * S_N(g)\right)$). Ceci impose l'utilisation de l'approximation en moyenne quadratique et enlève tout intérêt à la question **Q18.4.** qui découle des résultats de **Q17** et **Q18(1,2,3)** (le seul recours au théorème de Weierstrass semble difficile (et trop peu naturel ?)).

2. Ici se présente un problème : avec f dans E, f^* n'est pas a priori dans E (f^* est continue à droite en tout point). Il faut donc étendre la définition de $f * g$ aux fonctions continues par morceaux. Alors on a déjà utilisé en **Q16** que $c_n(f^*) = \overline{c_n(f)}$ pour tout n de $\mathbb{Z}$. On obtient donc en admettant la validité des résultats acquis dans le cadre des éléments de E que

$$c_n(f * f^*) = |c_n(f)|^2 \geqslant 0$$

pour tout n. En admettant que $f * f^*$ est dans E (voir la remarque de **Q17.1**), tous ses coefficients de Fourier sont positifs ;
Conclusion : $f * f^*$ est dans P. 2

Q18 **1.** La formule **Q8** appliquée en $x = 0$ et le résultat de **Q9.2.** donnent immédiatement :

$$|T_N f(0)| \leqslant N_\infty(f).$$

La suite $(T_N f(0))$ est donc bornée. 1

2. On utilise **Q4** : $T_N f(0) = \sum\limits_{n=-N}^{N}\left(1 - \dfrac{|n|}{2N+1}c_n(f)\right)$; soit M un majorant de $(|T_N f(0)|)$:

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=-N}^{N} c_n(f) \leqslant \sum_{n=-N}^{N}(1 - \frac{|n|}{2N+1})c_n(f) \leqslant T_{2N}(0) \leqslant M.$$

Les séries à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(f)$ et $\sum\limits_{n>0} c_{-n}(f)$ ont leurs sommes partielles majorées, donc elles convergent. 3

3. Nous venons de voir que la série de Fourier de f converge normalement ; sa somme $g(x)$ est donc continue ; or $g(x)$ est la limite au point x de la suite $S_N f(x)$, donc, d'après **Q1**, de la suite $(T_N f(x))$. Or $T_N f(x)$ tend vers $f(x)$ en tout point x de continuité de f (voir **Q10.1.**) ; donc $f(x) = g(x)$ en tout point de continuité de f ; on prolonge cette égalité par continuité à gauche aux points (isolés) où f est discontinue.
Conclusion : f est donc continue sur $\mathbb{R}$. 3
En outre, on sait que, comme f est continue et que sa série de Fourier converge normalement, f est égale à la somme de sa série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{inx} \qquad 1$$

et, comme $f(0) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)$ alors $|f(x)| \leqslant f(0)$. 1

4. D'après **Q17.2.** $\varphi * \varphi^* \in P$, donc est somme en 0 de sa série de Fourier (cf ci-dessus) :

$$\varphi * \varphi^*(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi * \varphi^*) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2.$$

Or

$$\begin{aligned}\varphi * \varphi^*(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(-y)\varphi^*(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(-y)\overline{\varphi(-y)}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(-y)|^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

On conclut : $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2$. . . . . $\boxed{3}$

Q19 Soit $T_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} b_n e^{inx}$; les coefficients b_n sont positifs puisque f est dans P (cf. **Q16.3.**). Notons Δf l'expression proposée et $\Delta_N = \Delta T_N f$.

$$\begin{aligned}\Delta_N &= \sum_{n=-N}^{N} b_n \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} e^{in(x_j - x_k)} z_j \overline{z_k} \\ &= \sum_{n=-N}^{N} b_n \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} (e^{inx_j} z_j)\overline{(e^{inx_k} z_k)} \\ &= \sum_{n=-N}^{N} b_n |\sum_{j=1}^{p} z_j e^{inx_j}|^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Le résultat est donc acquis pour $T_N f$ pour tout N ; or (**Q18**) f est continue donc (**Q10**) $T_N f$ converge vers f en tous les points $(x_j - x_k)$. Δf est la limite pour $N \longrightarrow \infty$ de Δ_N, c'est donc un réel positif. . . . . $\boxed{3}$

Q20 **1.** Nous explicitons $c_n(g)$:

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi a^2}\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} f(x-a)e^{-inx}\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)e^{-inx}\,\mathrm{d}x\right)\right]$$

En effectuant les deux changements de variable $t = x - a$ et $t = x + a$:

$$c_n(g) = \frac{1}{a^2}\left(2 - (e^{-ina} + e^{ina})\right).c_n(f) = \frac{2}{a^2}(1 - \cos(na)).c_n(f) \geqslant 0 \text{ car } f \in P.$$

Vu **Q16**, $g \in P$. . . . . $\boxed{2}$

2. **(a)** Nous reprenons les propriétés établies de **Q16** à **Q18** : $f \in P$ donc f est continue, sa série de Fourier est normalement convergente et $\forall x |f(x)| \leqslant f(0)$. De plus $f(-a_m) = \overline{f(a_m)}$ donc l'expression $[2f(0) - f(a_m) - f(-a_m)]$ est un réel positif (**Q16.2.**) (remarquer qu'il s'agit d'une approximation de dérivée seconde, lorsque celle-ci existe), ce qui légitime l'hypothèse. À N fixé nous avons :

$$\sum_{-N}^{N} n^2 c_n(f) = -S_N''(0) = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{a_m^2}\left(2S_N(0) - S_N(a_m) - S_N(-a_m)\right).$$

Vu l'hypothèse, $\sum_{-N}^{N} n^2 c_n(f) \leqslant \lambda$ pour tout N, d'où :

$$\sum_{-N}^{N} n^2 c_n(f) - \lambda \leqslant 0. \qquad \boxed{4}$$

(b) Puisque $c_n(f) \geqslant 0$ pour tout n, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 c_n(f)$ est convergente à termes positifs, donc les séries des dérivées terme à terme d'ordre 0, 1, 2 de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$ et par conséquent f est de classe C^2. $\boxed{2}$

3. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}(e^{inx} + e^{-inx})$. Cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ donc f est une fonction continue (et 2π-périodique). Alors $c_n(f) = \frac{1}{n^{3/2}} \geqslant 0$ et f est bien de type positif. Mais f n'est pas de classe C^2 puisque $c_n(f)$ n'est pas un $O(1/n^2)$. . . . . $\boxed{4}$

Côté bibliographie, on pourra consulter (Titchmarsh,theory of functions,Oxford Science), en particulier les paragraphes 13.3 à 13.32,13.4 et 13.82.