ENS PC 1998

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats

Le problème aborde quelques aspects de la théorie des polynômes orthogonaux.

- La première partie introduit une famille de polynômes comme étant des "vecteurs propres",
- la deuxième partie adapte à cette famille un produit scalaire afin d'en faire des "polynômes orthogonaux" ;
- la troisième partie donne d'autres moyens (formule de **Rodrigues** et fonctions génératrices) d'obtenir ces polynômes ;
- la dernière partie, largement indépendante de la troisième, aborde, dans le cas particulier des polynômes de Laguerre, la question de la convergence en moyenne quadratique.

Première partie : étude algébrique

Dans cette partie on introduit les polynômes Π_n comme étant des "vecteurs propres" d'un endomorphisme.

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace des polynômes de degré au plus n. A et B étant les deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :

$$A = \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0 \text{ et } B = \beta_1 X + \beta_0.$$

On note pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\mathcal{L}(P) = AP'' + BP'$$

(ces notations sont valables dans tout le problème).

I.1. Montrer que $\mathcal{L}$ définit un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et qu'il induit par restriction, pour tout entier n, un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

I.2. Dans cette question, $\mathcal{L}$ sera considéré comme un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

a. Écrire la matrice de $\mathcal{L}$ restreint à $\mathbb{R}_2[X]$, dans la base canonique $\{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Vérifier que, si

$$\forall k \in \{0,1,2\},\ k\alpha_2 + \beta_1 \neq 0$$

alors $\mathcal{L}$ restreint à $\mathbb{R}_2[X]$ est diagonalisable.

I.3. On examine, toujours dans $\mathbb{R}_2[X]$, quelques cas particuliers, obtenus en spécifiant A et B.

a. (Polynômes de type **Hermite**). Ici $A = \alpha_0$ et $B = \beta_1 X + \beta_0$. On suppose que $\beta_1 \neq 0$. Déterminer explicitement une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui diagonalise $\mathcal{L}$ restreint à $\mathbb{R}_2[X]$.

b. (Polynômes de type **Jacobi**). Ici $A = \alpha_2(X^2 - 1)$ et $B = \beta_1 X + \beta_0$. On suppose que $\beta_1 \neq 0$ et que $2\alpha_2 + \beta_1 = 0$.
Donner, dans ce cas, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{L}$ restreint à $\mathbb{R}_2[X]$ soit diagonalisable.

I.4. On revient ici au cas général. $A = \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0$ et $B = \beta_1 X + \beta_0$, et on suppose que :

$$(i) \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ k\alpha_2 + \beta_1 \neq 0.$$

On suppose jusqu'à la fin du problème que la condition (i) est satisfaite.

a. Montrer que, pour tout entier n, $\mathcal{L}$, considéré comme un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, est diagonalisable.

b. En déduire que, pour tout entier n, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ et au moins un $\Pi_n \in \mathbb{R}[X]$, de degré n tel que : $\mathcal{L}(\Pi_n) = \lambda_n \Pi_n$.
Préciser λ_n et montrer que $\operatorname{Ker}(\mathcal{L} - \lambda_n \operatorname{Id}_{\mathbb{R}[X]})$ est de dimension 1.

c. La famille $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitue-t-elle une base de $\mathbb{R}[X]$?

À tout triplet (A, B, n) est donc associé un polynôme Π_n, défini à une constante multiplicative non nulle près. Cette notation est utilisée jusqu'à la fin du problème.

Deuxième partie : orthogonalité des polynômes Π_n

On se propose, dans trois cas particuliers, de mettre en place un produit scalaire qui fera de la famille $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthogonale.

II.1. Si J est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et si ω est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans $\mathbb{R}_+^*$, on note

$$H_\omega = \{f \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R}) \mid f \text{ continue sur } J \text{ et } \omega f^2 \text{ intégrable sur } J\}$$

(on notera parfois $J =]a, b[$, cet intervalle n'est pas nécessairement borné, on peut avoir $a = -\infty$ ou bien $b = +\infty$).

a. Montrer rapidement que H_ω est un espace vectoriel.

b. Vérifier que l'on définit un produit scalaire sur H_ω en posant :

$$\forall (f, g) \in H_\omega^2,\ (f|g) = \int_J f(t)g(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans la question suivante, on suppose que les polynômes, en tant que fonctions de $J =]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, sont des éléments de H_ω, A et B sont les deux polynômes définis dans la première partie.

II.2. Si l'on suppose que :

(ii)
$$\forall x \in J,\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\omega(x)\right) A(x) + \omega(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x)\right) = \omega(x)B(x)$$

(iii)
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \omega(x)x^n A(x) = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \omega(x)x^n A(x) = 0.$$

Montrer que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ (n \neq m) \Rightarrow \left(\int_a^b \Pi_n(t)\Pi_m(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = 0\right)$$

II.3. On examine ici trois cas particuliers.

a. ("**Hermite**") on a donc $A = \alpha_0$ et $B = \beta_1 X + \beta_0$. On suppose de plus que $\alpha_0\beta_1 < 0$. On pose :

$$J = \mathbb{R} \text{ et } \omega(x) = \exp\left[\frac{B(x)^2}{2\alpha_0\beta_1}\right].$$

Vérifier que les polynômes sont des éléments de H_ω et que les conditions (ii) et (iii) sont vérifiées.

b. ("**Jacobi**") ici l'expression de B est présentée sous une forme "plus agréable" :

$$B = (p + q + 2)X + (p - q)$$

avec p et q réels vérifiant $p + 1 > 0$ et $q + 1 > 0$, celle de A simplifiée : $A = X^2 - 1$.
Déterminer ω, une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que le couple

$(]-1,1[,\omega)$ vérifie les conditions (ii) et (iii).
Pour ce couple, les polynômes sont-ils dans H_ω ?

c. ("**Laguerre**") on suppose ici que $A=\alpha_1(X-\rho)$ où ρ est un réel et que $B=\beta_1 X+\beta_0$.
On suppose de plus que $\alpha_1\beta_1<0$.
Déterminer une application ω de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\rho,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que (ii) soit réalisée. Trouver une condition portant sur le signe de $\dfrac{B(\rho)}{\alpha_1}$ pour que le couple $(]\rho,+\infty[,\omega)$ vérifie (iii).
Montrer que dans ce cas les polynômes sont des éléments de H_ω.

Troisième partie : Rodrigues et les fonctions génératrices

On se place ici dans le cas général, c'est à dire que A et B vérifient (i) (cf. **I.4**), on suppose que ω est une application de J dans $\mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ et que le couple (J,ω) vérifie (ii) et (iii) (cf. **II.2**). On suppose aussi que les polynômes sont éléments de H_ω.

III.1. a. Montrer que, pour tout couple $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ vérifiant $p\leqslant n$, la fonction ωA^n est p fois dérivable sur J et qu'il existe un polynôme $Q_{n,p}$, dont on précisera le degré, tel que :

$$\forall x\in J,\ \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}\left(\omega(x)A(x)^n\right)=\omega(x)A(x)^{n-p}Q_{n,p}(x).$$

b. Montrer que si $m\neq n$ alors :

$$(Q_{n,n}|\Pi_m)=0.$$

c. En déduire qu'il existe un lien entre le polynôme Π_n de la fin de la première partie et $Q_{n,n}$.

Ce lien constitue la formule de Rodrigues

III.2. ("**Legendre**" un cas de **Hermite** simplifié). Ici $A=-1$ et $B=2X$. On prendra pour couple (J,ω) celui qui est donné en **II.3.a**. On pose $H_n=Q_{n,n}$.

a. Vérifier que :

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_n(x).$$

b. Établir l'égalité suivante :

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{-(x-t)^2}=e^{-(x-t)^2}H_n(x-t).$$

c. En déduire la formule :

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\ e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{H_n(x)t^n}{n!}.$$

d. Calculer H_5.

III.3. ("**Laguerre**" simplifié).
On se place dans une situation du type **II.3.c** avec ici $A=X$ et $B=-X+1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on note L_n le polynôme en x défini par :

$$L_n(x)=e^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^n\right).$$

a. Dans ce cas, quel lien existe-t-il entre L_n et Π_n ?
(On peut poursuivre cette question **III.3** même sans avoir répondu à **III.3.a**.)

b. Établir la formule :

$\forall x \in J,\ \forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+2}(x) + xL_{n+1}(x) = (2n+3)L_{n+1}(x) - (n+1)^2 L_n(x).$

Pour tout $x \in]0,1[$ on considère la fonction F_x définie par :

$$F_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(x)t^n}{n!}.$$

c. Montrer que le rayon de convergence, que l'on notera R_x, de la série entière qui définit F_x est non nul.

d. Trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre dont F_x est solution sur $]-R_x, R_x[$.

e. Déterminer $F_x(t)$ et préciser la valeur de R_x.

Quatrième partie : convergence quadratique

Dans cette partie on ne s'intéresse qu'au cas de **Laguerre** du **III.3**.
Ici $J =]0,+\infty[$ et $\omega(x) = e^{-x}$. On note désormais N_ω la norme associée au produit scalaire $(.|.)$ défini au **II.1.b**.
On suppose que les polynômes Π_n sont choisis normés ($N_\omega(\Pi_n) = 1$) et que le coefficient de leur terme dominant est un réel positif, ainsi ils sont parfaitement déterminés.

IV.1. Calculer $N_\omega(L_n)$ et exprimer Π_n à l'aide de L_n.

IV.2. Soit $m \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_m(x) = e^{-mx}$.

a. Calculer $(\Pi_n|\varphi_m)_\omega$ ainsi que $N_\omega(\varphi_m)$.

b. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} N_\omega\left(\varphi_m - \sum_{k=0}^{n}(\Pi_k|\varphi_m)\Pi_k\right) = 0.$$

c. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $(\mu_m)_{m\in[0,N]}$, une famille de réels, on considère :

$$\psi = \sum_{m=0}^{N} \mu_m\varphi_m.$$

Vérifier que :

$$\lim_{n\to+\infty} N_\omega\left(\psi - \sum_{k=0}^{n}(\Pi_k|\psi)\Pi_k\right) = 0.$$

IV.3. Soit g une fonction définie et continue sur $[0,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

a. Montrer que la fonction h définie sur $[0,1]$ par :

$$h(0) = 0 \text{ et pour } u \neq 0,\ h(u) = g(-\ln u)$$

est continue sur $[0,1]$.

b. En déduire que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(g(t) - P(e^{-t}))^2\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2.$$

IV.4. Montrer que

$\forall f \in H_\omega,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists g_f$ continue sur $[0,+\infty[$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} g_f(x) = 0$ telle que $N_\omega(f - g_f) \leqslant \varepsilon$

IV.5. Montrer que $\forall f \in H_\omega$ la série

$$\sum(\Pi_n|f)\Pi_n$$

converge vers f pour la norme N_ω.