SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Partie I : Étude algébrique $\boxed{21}$

I.1. Vérification simple.

- $\mathcal{L}$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ grâce à la linéarité de la dérivation. . . . . $\boxed{1}$
- $\mathcal{L}$ induit un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$: en effet, comme $\deg P'' \leqslant \deg P - 2$ alors $\deg AP'' \leqslant \deg P \leqslant n$, de même $\deg BP' \leqslant n$. . . . . $\boxed{1}$

Dans la suite on notera $\mathcal{L}_n$ l'endomorphisme induit par $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{C}_n[X]$

I.2. **a.** En calculant les images des éléments de la base $\{1, X, X^2\}$ par $\mathcal{L}$, on obtient la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 & 2\alpha_0 \\ 0 & \beta_1 & 2\alpha_1 + 2\beta_0 \\ 0 & 0 & 2\alpha_2 + 2\beta_1 \end{pmatrix}$$ . . . . $\boxed{2}$

b. On vérifie, avec l'hypothèse de l'énoncé, que les valeurs propres de M sont deux à deux distinctes et donc M est diagonalisable. . . . . $\boxed{2}$

I.3. **a.** Dans ce cas $\mathcal{L}_2$ ou M est diagonalisable, avec pour valeurs propres $\{0, \beta_1, 2\beta_1\}$ et on obtient simplement une base de vecteurs propres : 1 associé à 0, B associé à β_1 et $P = \beta_1 X^2 + 2\beta_0 X + \dfrac{\beta_0^2}{\beta_1} + \alpha_0 = \dfrac{1}{\beta_1}(AB' + B^2)$ associé à $2\beta_1$. $\boxed{3}$

b. Ici β_1 est valeur propre double de M. M est diagonalisable si et seulement si le sous espace propre associé est de dimension 2. Ce sous espace est défini par les équations :

$$-\beta_1 a + \beta_0 b - 2\alpha_2 c = 0$$
$$2\beta_0 c = 0$$

Si $\beta_0 \neq 0$ il est de dimension 1, seul $\beta_0 = 0$ donne un plan propre d'équation

$$-\beta_1 a - 2\alpha_2 c = 0.$$

Conclusion : $\mathcal{L}$ est diagonalisable ssi $\beta_0 = 0$. . . . . $\boxed{3}$

I.4. **a.** $\mathcal{L}(X^k)$ est un polynôme de degré $\leqslant k$, avec pour terme de degré k : $k((k-1)\alpha_2 + \beta_1)X^k$. La matrice de $\mathcal{L}_n$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $0, \beta_1, 2(\alpha_2 + \beta_1), 3(2\alpha_2 + \beta_1), \cdots, n((n-1)\alpha_2 + \beta_1)$. Ce sont les valeurs propres de $\mathcal{L}_n$. L'hypothèse (i) permet de prouver que ces $n+1$ valeurs sont deux à deux distinctes ; en effet, si $\lambda_k = k((k-1)\alpha_2 + \beta_1)$, la condition $\lambda_j = \lambda_k$ équivaut à $(j-k)[(j+k-1)\alpha_2 + \beta_1] = 0$ ce qui n'est pas vérifié pour $j \neq k$. Donc $\mathcal{L}$ induit un endomorphisme diagonalisable sur $\mathbb{C}_n[X]$. . . . . $\boxed{3}$

b. Pour tout n, on pose $\lambda_n = n((n-1)\alpha_2 + \beta_1)$ et soit Π_n un polynôme propre associé. Π_n est de degré n car $\mathcal{L}_n$ et $\mathcal{L}_{n-1}$ sont diagonalisables et $\Pi_0, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-1}$ forment une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. . . . . $\boxed{3}$

Si P appartenant à $\mathrm{Ker}(\mathcal{L} - \lambda_n \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[X]})$ est de degré k, alors P est vecteur propre de $\mathcal{L}_k$ associé à λ_n. Comme les sous espaces propres de $\mathcal{L}_k$ sont de dimension 1, on a $n = k$ et P proportionnel à Π_n. On a donc $\dim \mathrm{Ker}(\mathcal{L} - \lambda_n \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[X]}) = 1$. . . . . $\boxed{2}$

c. $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de $\mathbb{C}[X]$ telle que $\deg \Pi_n = n$, c'est une base de $\mathbb{C}[X]$. . . $\boxed{1}$

Partie II : Orthogonalité des polynômes Π_n $\boxed{21}$

II.1. a. On remarque tout d'abord que $H_\omega \subset \mathcal{C}(J, \mathbb{C})$. On vérifie alors que
- $H_\omega \neq \emptyset$,
- H_ω stable par multiplication externe,
- H_ω stable par $+$: si $(f,g) \in H_\omega^2$ on écrit que

$$|f+g|^2 \leqslant (|f|+|g|)^2 \leqslant 2(|f|^2+|g|^2)$$

d'où $\omega(f+g)^2$ est intégrable sur J. . . . . $\boxed{2}$

b. $(f|g)$ est bien défini car, vu la question précédente, $\overline{f}g \in H_\omega$ . . . . $\boxed{1}$

On vérifie immédiatement les trois propriétés : $(f|.)$ linéaire, $\overline{(f|g)} = (g|f)$ puis finalement $(f|f) = \displaystyle\int_J |f|^2\omega \geqslant 0$ et $(f|f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$. . . . . $\boxed{1}$

II.2. On remarque tout d'abord que les polynômes Π_n sont à coefficients réels et que les λ_n sont des réels. En effet la matrice de $\mathcal{L}$ dans la base canonique est triangulaire réelle avec ses valeurs propres toutes réelles.
Notons $K_{n,m}$ l'intégrale $\int_a^b \omega\Pi_n\Pi_m$. Par définition de Π_m,

$$\lambda_m K_{n,m} = \int_a^b \omega\Pi_n(A\Pi_m'' + B\Pi_m') = \int_a^b \omega A\Pi_n\Pi_m'' + (\omega' A + \omega A')\Pi_n\Pi_m'$$

en utilisant (ii). On fait alors une I.P.P. en utilisant (iii) pour la partie intégrée :

$$\lambda_m K_{n,m} = \int_a^b \Pi_n[\omega A\Pi_m'' + (\omega' A + \omega A')\Pi_m'] = -\int_a^b \omega A\Pi_n'\Pi_m'.$$

Par symétrie de cette dernière expression en n et m on a $\lambda_m K_{n,m} = \lambda_n K_{n,m}$. On en déduit alors, pour $n \neq m$, $K_{n,m} = 0$ car $\lambda_n \neq \lambda_m$. . . . . $\boxed{5}$

II.3. a. On sait que $x^n \exp \frac{x^2}{2\alpha_0\beta_1} \to 0$ en $\pm\infty$ grâce à la condition $\alpha_0\beta_1 < 0$ donc $\underbrace{B(x)^n}_{\sim\beta_1 x^n} \exp \frac{B(x)^2}{2\alpha_0\beta_1} \to 0$ et par conséquent la condition (iii) est satisfaite. Ceci nous permet aussi d'affirmer que les polynômes sont des éléments de H_ω.
Enfin $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\omega(x)\right) A(x) + \omega(x)\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x)\right) = \dfrac{B(x)}{\alpha_0}\omega(x)A(x) = \omega(x)B(x)$ . . . . $\boxed{2}$

b. La propriété (i) est vérifiée, donc les polynômes Π_n du I sont définis.
La condition (ii) se traduit par l'équation différentielle :

$$\omega'(x^2-1) - \omega((p+q)x + p - q) = 0.$$

La résolution sur $]-1,1[$ conduit à $\omega(x) = k(1-x)^p(x+1)^q$ avec $k > 0$. . . . . $\boxed{2}$
Les hypothèses $p+1 > 0$, $q+1 > 0$ donnent la propriété (iii) et l'intégrabilité de chaque fonction $x \mapsto x^k\omega(x)$ sur J. . . . . $\boxed{1}$

c. Ici (ii) se traduit par l'équation différentielle :

$$\alpha_1\omega'(x-\rho) - \omega(\beta_1 x + \beta_0 - \alpha_1) = 0.$$

La résolution sur $]\rho, +\infty[$ conduit à $\omega(x) = ke^{\frac{\beta_1 x}{\alpha_1}}(x-\rho)^{\frac{B(\rho)-\alpha_1}{\alpha_1}}$ avec $k > 0$. . . . . . $\boxed{2}$
Quand $x \to +\infty$, $\omega(x)x^nA(x)$ tend vers 0 car $\alpha_1\beta_1 < 0$, et quand $x \to \rho$, $\omega(x)x^nA(x)$ admet 0 pour limite ssi $\dfrac{B(\rho)}{\alpha_1} > 0$. La condition (iii) est vérifiée ssi $\dfrac{B(\rho)}{\alpha_1} > 0$. . . . $\boxed{2}$
Soit $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$, on s'intéresse à l'intégrabilité de ωP^2 sur $]\rho, +\infty[$:

- en $+\infty$ c'est immédiat car $a_n^2 x^{n+2}\omega(x) \to 0$; 1
- en ρ on distingue 2 cas :
  - $\rho = 0$: $\omega(x)P^2(x) \underset{0}{\sim} k a_n^2 x^{2n} x^{-1+\beta_0/\alpha_1}$ qui est intégrable ; 1
  - $\rho \neq 0$: $\omega(x)P^2(x) \underset{\rho}{\sim} k e^{\beta_1/\alpha_1} a_n^2 \rho^{2n} (x-\rho)^{-1+\beta_0/\alpha_1}$ qui est intégrable. 1

Partie III : Rodrigues et les fonctions génératrices 48

III.1. a. On fait récurrence sur p en utilisant la relation (ii) et le caractère C^1 de ω.

- $p = 0$: pour tout $n \geqslant 0$, ωA^n est continue sur J.
- $p = 1$: pour tout $n \geqslant 1$, ωA^n est de classe C^1 sur J et

$$(\omega A^n)' = ((\omega A)A^{n-1})' = (\omega B)A^{n-1} + (n-1)(\omega A)A^{n-2}A' = \omega A^{n-1}\big(B + (n-1)A'\big).$$

C'est la forme voulue avec $Q_{n,1} = B + (n-1)A'$ polynôme de degré 1. 2

- Soit $p \geqslant 2$. Supposons que, pour tout $n \geqslant p$, ωA^n soit de classe C^p sur J et que $(\omega A^n)^{(p)} = \omega A^{n-p} Q_{n,p}$ où $Q_{n,p}$ est un polynôme de degré p.
  Lorsque $n \geqslant p+1$, la relation ci-dessus peut être dérivée une fois de plus et $(\omega A^n)^{(p+1)} = \omega A^{n-p-1}\big(Q_{n-p,1}Q_{n,p} + AQ'_{n,p}\big)$ ce qui a la forme souhaitée avec $Q_{n,p+1} = Q_{n-p,1}Q_{n,p} + AQ'_{n,p}$. 2
  C'est un polynôme de degré p au plus. Le coefficient du terme de degré p étant $k_{n,p}(\beta_1 + 2(n-p)\alpha_2 + p\alpha_2)$ où $k_{n,p}$ désigne le coefficient dominant de $Q_{n,p}$; d'après (i) ce terme est non nul et $Q_{n,p}$ est de degré exactement p. 2

b. On a $\omega Q_{n,n} = (\omega A^n)^{(n)}$.

- Si $n > m$, on calcule $(Q_{n,n}|\Pi_m)$ par intégrations par parties successives en tenant compte de (iii) pour les parties intégrées :

$$(Q_{n,n}|\Pi_m) = \int_J (\omega A^n)^{(n)}\Pi_m = -\int_J (\omega A^n)^{(n-1)}\Pi'_m = \cdots = (-1)^n \int_J (\omega A^n)^{(n-m)}\Pi_m^{(m)} = 0. \quad 4$$

- Si $n < m$, Π_m est orthogonal à tout polynôme Π_k avec $k < m$ donc à tout polynôme de degré $< m$ par conséquent $(Q_{n,n}|\Pi_m) = 0$. 2

c. $Q_{n,n}$ est un polynôme de degré n orthogonal à tout polynôme de degré $< n$, donc $Q_{n,n}$ est proportionnel à Π_n. 2

III.2. Dans ce cas ω est définie par $\omega(x) = e^{-x^2}$.

a. H_{n+1} est défini par $e^{-x^2}H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}(e^{-x^2})^{(n+1)}$.
Or $e^{-x^2}H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}\big[(-1)^n e^{-x^2}H_n(x)\big]' = \big[2xH_n(x) - H'_n(x)\big]e^{-x^2}$, d'où la relation demandée. 2

b. Se démontre facilement par récurrence avec **a**. 2

c. Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, on considère l'application $f_x \ : t \mapsto e^{-(x-t)^2}$. f_x est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions DSE ($f_x(t) = e^{-x^2}e^{2xt}e^{-t^2}$). f_x est donc somme de sa série de Taylor : pour $t \in \mathbb{R}$ $f_x(t) = \sum\limits_0^{\infty} \dfrac{f_x^{(n)}(0)}{n!}t^n = \sum\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\dfrac{H_n(x)}{n!}t^n$ ce qui donne la relation de l'énoncé. 4

d. À partir de $e^{2xt-t^2} = \displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{(2xt-t^2)^n}{n!}$ on obtient H_5 en recherchant le terme de degré 5 en t ; $H_5(x) = 8x(2x^4 - 10x^2 + 15) = 32x^5 - 160x^3 + 120^x$. 2

III.3. **a.** D'après la question **II.3.c.** dans les hypothèses sur A, B, J faites ici, on a $\omega(x) = ke^{-x}$ donc $L_n = Q_{n,n}$ et en conclusion, en utilisant la formule de Rodrigues, les polynômes L_n sont proportionnels aux Π_n.. $\boxed{3}$

b. En utilisant le fait que $\dfrac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}} = \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ alors

$$L_{n+2}(x) = e^x\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}\left(e^{-x}x^{n+2}\right) = e^x\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\Big(\underbrace{-e^{-x}x^{n+2} + (n+2)e^{-x}x^{n+1}}_{\text{dérivée de } e^{-x}x^{n+2}}\Big)$$

d'où : $e^x\dfrac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(e^{-x}x^{n+2}\right) = -L_{n+2}(x) + (n+2)L_{n+1}(x)$ (R_{n+2}).

Grâce à la formule de Leibniz on a

$$e^x\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left[x(e^{-x}x^{n+1})\right] = e^x x\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(e^{-x}x^{n+1}\right) + (n+1)e^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^{n+1}\right)$$

ce qui donne la formule suivante :

$$-L_{n+1}(x) + (n+2)L_{n+1}(x) = xL_{n+1}(x) + (n+1)e^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^{n+1}\right)$$

et, en appliquant (R_{n+1}) (donné à l'ordre $n+2$ ci-dessus)

$$-L_{n+2}(x) + (n+2)L_{n+1}(x) = xL_{n+1}(x) + (n+1)[-L_{n+1}(x) + (n+1)L_n(x)]$$

ce qui permet de conclure.. $\boxed{5}$

c. Comme $L_{n+2}(x) = (2n+3-x)L_{n+1}(x) - (n+1)^2L_n(x)$, on a, pour $x \in]0,1[$, la majoration :

$$|L_{n+2}(x)| \leqslant (2n+3)|L_{n+1}(x)| + (n+1)^2|L_n(x)|.$$

On pose $M_n = \sup\limits_{x\in]0,1[} |L_n(x)|$ d'où l'inégalité $M_{n+2} \leqslant (2n+3)M_{n+1} + (n+1)^2M_n$. On définit ensuite $u_n = \dfrac{M_n}{n!}$ d'où

$$\begin{aligned} u_{n+2} &\leqslant \frac{2n+3}{n+2}u_{n+1} + \frac{n+1}{n+2}u_n \\ &\leqslant 2u_{n+1} + u_n. \end{aligned}$$

$u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et si on cherche $r > 1$ tel que $r^{n+2} \leqslant 2r^{n+1} + r^n$ (cf. suites récurrentes doubles) alors $r = 1+\sqrt{2}$ convient et $u_n \leqslant (1+\sqrt{2})^n$ devient immédiat par récurrence.

Conclusion : le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{L_n(x)}{n!}t^n$ est $\geqslant \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$. $\boxed{6}$

Remarque : on peut aussi écrire $L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k x^{n-k}\dfrac{n!}{(n-k)!}$ (formule de Leibniz) d'où la majoration $|L_n(x)| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k|x|^k = (1+|x|)^n \leqslant 2^n$.

d. En multipliant la relation de récurrence du **b** par $\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ $\left(t \in]-R_x, R_x[\right)$ et en sommant on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{L_{n+2}(x)}{(n+1)!}t^{n+1} + x\frac{L_{n+1}(x)}{(n+1)!}t^{n+1} - (2n+3)\frac{L_{n+1}(x)}{(n+1)!}t^{n+1} + (n+1)\frac{L_n(x)}{n!}t^{n+1}\Big] = 0.$$

En distinguant les différents termes on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+2}(x)}{(n+1)!}t^{n+1} = F'_x(t) - F'_x(0) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+1}(x)}{(n+1)!}t^{n+1} = F_x(t) - F_x(0)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)\frac{L_{n+1}(x)}{(n+1)!}t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+1)+1]\frac{L_{n+1}(x)}{(n+1)!}t^{n+1}=2tF_x'(t)+F_x(t)-F_x(0)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{L_n(x)}{n!}t^{n+1}=t^2F_x'(t)+tF_x(t)\,.$$

De plus $F_x(0)=1$ et $F_x'(0)=L_1(x)=1-x$.
On conclut alors que F_x vérifie l'équation différentielle :

$$(1-t)^2F_x'(t)+(t+x-1)F_x=0. \qquad \boxed{4}$$

e. On obtient $F_x(t)=\dfrac{k}{1-t}e^{\frac{-x}{1-t}}$ pour $t\in]-\infty,1[\cap]-R_x,R_x[$, avec $k\in\mathbb{R}$ en résolvant l'équation différentielle. Comme $F_x(0)=1$, k vaut e^x et F_x, fonction génératrice des $L_n(x)$, vérifie : $F_x(t)=\dfrac{1}{1-t}e^{\frac{-xt}{1-t}}$ pour $t\in]-\infty,1[\cap]-R_x,R_x[$. . . . . $\boxed{3}$
Ainsi, la série $\sum\dfrac{L_n(x)t^n}{n!}$ est la série de Taylor en 0 de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{1-t}e^{\frac{-xt}{1-t}}$.
Remarquons alors qu'il y a convergence sur $]-1,1[$ de la série de Taylor de $t\mapsto\dfrac{1}{1-t}$, de $t\mapsto\dfrac{-xt}{1-t}$, de $t\mapsto e^{\frac{-xt}{1-t}}$ (si l'on admet le théorème sur la composition des séries entières qui n'est pas au programme !!) et de $t\mapsto\dfrac{1}{1-t}e^{\frac{-xt}{1-t}}$ (produit de séries entières). Par suite R_x est au moins égal à 1. . . . . $\boxed{2}$
On ne peut pas avoir $R_x>1$ sinon $F_x(t)$ aurait une limite finie pour t tendant vers 1 par valeurs inférieures ce qui est en contradiction avec la valeur trouvée pour $F_x(t)$.
On a donc $R_x=1$. . . . . $\boxed{1}$

Partie IV : Convergence quadratique $\boxed{28}$

IV.1. $N_\omega(L_n)^2=\int_0^{+\infty}\omega L_n^2=\int_0^{+\infty}(e^{-x}x^n)^{(n)}L_n(x)\,\mathrm{d}x$ se calcule par intégration par parties itérées et donne

$$N_\omega(L_n)^2=(-1)^n\int_0^{+\infty}e^{-x}x^nL_n^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \boxed{3}$$

D'après la relation de récurrence du **III.3.b.**, le polynôme L_n a $(-1)^n$ pour coefficient dominant donc $N_\omega(L_n)^2=(n!)^2$. On en déduit $\Pi_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}L_n$. . . . . $\boxed{2}$

IV.2. **a.** Toujours par intégrations par parties successives on calcule

$$(\varphi_n|L_n)=\int_0^{+\infty}(e^{-x}x^n)^{(n)}e^{-mx}\,\mathrm{d}x=\cdots=m^n\int_0^{+\infty}e^{-x}x^ne^{-mx}\,\mathrm{d}x=m^n\frac{1}{(m+1)^{n+1}}n! \qquad \boxed{2}$$

Comme $N_\omega(\varphi_m)^2=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}e^{-2mx}\,\mathrm{d}x$ on obtient :

$$(\varphi_m|\Pi_n)=(-1)^n\frac{m^n}{(m+1)^{n+1}} \qquad N_\omega(\varphi_m)=\frac{1}{\sqrt{2m+1}} \qquad \boxed{1}$$

b. La famille $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de H_ω, posons

$$p_n(\varphi_m)=\sum_{k=0}^{n}(\Pi_k|\varphi_m)\Pi_k$$

alors p_n est la projection orthogonale de φ_m sur $F_n = \mathrm{Vect}(H_k)_{k\leqslant n} = \mathbb{C}_n[X]$.
D'après la question **1.**

$$\sum_0^\infty (\varphi_m|\Pi_n)^2 = \sum_0^\infty \frac{m^{2n}}{(m+1)^{2n+2}} = \frac{1}{(m+1)^2}\sum_0^\infty\left(\frac{m}{m+1}\right)^{2n} = \frac{1}{2m+1} = N_\omega(\varphi_m).$$

On a donc égalité dans l'inégalité de Bessel pour φ_m. Or

$$\begin{aligned} N_\omega(\varphi_m - p_n(\varphi_m))^2 &= N_\omega(\varphi_m)^2 - N_\omega(p_n(\varphi_m))^2 \\ &= N_\omega(\varphi_m)^2 - \sum_{k=0}^m |(\Pi_k|\varphi_m)|^2 \to 0 \end{aligned}$$

on conclut : φ_m est limite dans (H_ω, N_ω), de ses projections orthogonales sur les $\mathbb{C}_n[X]$ soit de $\displaystyle\sum_{k=0}^n (\Pi_k|\varphi_m)\Pi_k$ 6

c. L'adhérence de $\mathbb{R}[X]$ dans (H_ω, N_ω) est un s.e.v. de H_ω ; chaque φ_m est adhérente à $\mathbb{R}[X]$ donc $\psi = \displaystyle\sum_0^N \varphi_m$ est adhérente à $\mathbb{R}[X]$ et est limite de ces projections orthogonales sur $\mathbb{C}_n[X]$ ce qui se traduit encore par

$$\psi - \sum_{k=0}^n (\Pi_k|\psi)\Pi_k = \sum_{m=0}^N \mu_m\left[\varphi_m - \sum_{k=0}^n(\Pi_k|\varphi_m)\Pi_k\right]$$

d'où $N_\omega\left(\psi - \sum\limits_{k=0}^n(\Pi_k|\psi)\Pi_k\right) \leqslant \sum\limits_{m=0}^N |\mu_m| N_\omega\left[\varphi_m - \sum\limits_{k=0}^n(\Pi_k|\varphi_m)\Pi_k\right] \to 0.$ 2

IV.3. **a.** La continuité de h sur $[0,1]$ est simple. 1

b. Soit $\varepsilon > 0$. h étant continue sur le segment $[0,1]$, h est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes (th. d'approximation de Weierstrass). Soit donc P polynôme tel que $\forall x \in [0,1], |h(x) - P(x)| < \varepsilon$. On a alors $\int_0^1 (h-P)^2 < \varepsilon^2$ et par changement de variable $\int_0^{+\infty} e^{-t}(g(t) - P(e^{-t}))^2 dt \leqslant \varepsilon^2$. 3

IV.4. Soit $f \in H_\omega$ et n entier . Soit k_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $k_n(x) = 1$ si $x \in [0,n]$, $k_n(x) = 0$ si $x \in [n+1, +\infty[$ et k_n affine sur $[n, n+1]$. g_n est continue et on a alors

$$N_\omega(f - g_n)^2 = \int_n^{+\infty} e^{-t}|f(t) - g_n(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{+\infty} e^{-t}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t \to 0. \qquad 3$$

IV.5. Soit $f \in H_\omega$, on montre en utilisant **3.** et **4.** que f est adhérente à $\mathbb{C}[X]$ dans (H_ω, N_ω) : soit $\varepsilon > 0$

- on prend g_f continue sur $\mathbb{R}_+$, de limite nulle en $+\infty$ vérifiant $N_\omega(f - g_f) \leqslant \varepsilon$:
- on choisit alors, grâce à **3.**, un polynôme P tel que $\int_0^{+\infty} e^{-t}(g(t) - P(e^{-t}))^2 dt \leqslant \varepsilon^2$: en notant ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(t) = P(e^{-t})$ on a $N_\omega(f - \psi) \leqslant 2\varepsilon$:
- de plus, d'après **2.c.**, on peut choisir Q dans $\mathbb{C}[X]$ tel que $N_\omega(\psi - Q) \leqslant \varepsilon$.

On a enfin $N_\omega(f - Q) \leqslant 3\varepsilon$ ce qui prouve que f est adhérente à $\mathbb{C}[X]$ dans (H_ω, N_ω).
Finalement, en reprenant l'égalité du **IV.2.b** que l'on applique à f, si $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ alors $N_\omega(f - p_n(f)) \leqslant N_\omega(f - Q) \to 0$ ce qui permet de conclure à la convergence de $\sum(f|\Pi_n)\Pi_n$ vers f dans (H_ω, N_ω). 5