SPÉCIALE MP* : CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ

Première partie

I.1. Montrons ce résultat par l'absurde :

On suppose que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{M} \operatorname{Ker}\varphi_k = \{0\}$, c'est à dire que $\forall k \in [1, M]$, $\varphi_k(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Soit $\Phi \ : x \in E \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_M(x)) \in \mathbb{R}^M$. Par hypothèse Φ est injective donc $\dim E \leqslant \dim \operatorname{Im} \Phi \leqslant M$ qui est contradictoire avec le fait que E est de dimension infinie.

Conclusion : $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{M} \operatorname{Ker}\varphi_k \neq \{0\}$ donc, quitte à normer, on peut choisir un vecteur unitaire x_{n+1} dans cet espace. .... $\boxed{4}$

I.2. a. En calculant $\varphi_{j_0}(z_{j_0}+\alpha_{n+1}x_{n+1}) = 1$, on obtient $\|z_{j_0}+\alpha_{n+1}x_{n+1}\| \geq 1$, car $\|\varphi_{j_0}\| = 1$.
Soit $x'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in E_n$ de norme 1. Grâce au 1, on sait qu'il existe $j_0 \leqslant M$ tel que $\|x'_n - z_{j_0}\| \leqslant \delta$. Alors,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right\| &= \|x'_n - z_{j_0} + z_{j_0} + \alpha_{n+1}x_{n+1}\| \\ &\geq \|z_{j_0} + \alpha_{n+1}x_{n+1}\| - \|x'_n - z_{j_0}\| \\ &\geq 1 - \delta = \frac{1}{1+\varepsilon}\end{aligned} \qquad \boxed{4}$$

b. • Lorsque $q \leqslant n$, l'inégalité proposée est déjà vraie par hypothèse, si $p = q = n+1$, c'est immédiat. .... $\boxed{1}$

• Lorsque $q = n+1$, $p \leqslant n$ posons $\beta = \left\|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right\|$.

Si $\beta \neq 0$, alors $\dfrac{1}{\beta}\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k\right\| = 1$, et, d'après le a. $(1+\varepsilon)\left\|\dfrac{1}{\beta}\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k x_k\right\| \geq 1$, d'où :

$$(1+\varepsilon)\left\|\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k\right\| \geq \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\| \geq \frac{1}{C}\left\|\sum_{k=1}^{p} a_k x_k\right\| \qquad \boxed{3}$$

Si $\beta = 0$ cette inégalité est aussi vérifiée. .... $\boxed{1}$

• Ainsi, dans tous les cas :

$$\left\|\sum_{k=1}^{p} a_k x_k\right\| \leqslant C(1+\varepsilon)\left\|\sum_{k=1}^{q} a_k x_k\right\|.$$

I.3. Soit (u_k) une suite de réel positifs strictement croissante et convergente. Par récurrence immédiate, on a, en choisissant $\varepsilon(k) = \dfrac{u_{k+1}}{u_k} - 1$ pour tout $k \geq 1$:

$$\left\|\sum_{k=1}^{p} a_k x_k\right\| \leqslant C\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\left\|\sum_{k=1}^{q} a_k x_k\right\| = C\frac{u_{n+1}}{u_1}\left\|\sum_{k=1}^{q} a_k x_k\right\|$$

On peut prendre pour suite (u_k) toute somme partielle d'une série à termes >0 convergente (par exemple $u_k=\sum\limits_{p=1}^{k}\dfrac{1}{p^2}$). On peut alors poser $K=C\lim\limits_{k\to+\infty}u_k>0$, ce qui permet d'écrire, comme voulu :

$$\left\|\sum_{k=1}^{p}a_kx_k\right\|\leqslant K\left\|\sum_{k=1}^{q}a_kx_k\right\| \qquad \boxed{5}$$

Deuxième partie

Question préliminaire :

Si $x\in E_1$ on sait qu'il existe $(\xi_n)\in F^{\mathbb{N}}$ telle que $x=\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n$. La suite $(T(\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ($\|T(\xi_{n+p})-T(\xi_n)\|\leqslant\|T\|.\|\xi_{n+p}-\xi_n\|$) donc elle converge dans E_2. On définit alors $\widetilde{T}(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}T(\xi_n)$. . . . . $\boxed{3}$

On montre ensuite que cette définition de $\widetilde{T}(x)$ ne dépend pas de la suite (ξ_n) choisie. En effet :

En notant $\begin{cases}\widetilde{T}_1(x)=\lim T(\xi_n^1)\\ \widetilde{T}_2(x)=\lim T(\xi_n^2)\end{cases}$ où $\begin{cases}x=\lim\xi_n^1\\ x=\lim\xi_n^2\end{cases}$ on a : $\|T(\xi_n^1)-T(\xi_n^2)\|\leqslant\|T\|\|\xi_n^1-\xi_n^2\|$

Et donc, en passant à la limite et grâce à la continuité de la norme, on a : $\widetilde{T}_1(x)=\widetilde{T}_2(x)$. . $\boxed{3}$

Grâce à la linéarité de la limite on en déduit que $\widetilde{T}$ est linéaire. De plus, grâce à la continuité de la norme, on a

$$\begin{array}{ccc}\|T(x_n)\| & \leqslant & \|T\|.\|x_n\|\\ \downarrow & & \downarrow\\ \|\widetilde{T}(x)\| & \leqslant & \|T\|.\|x\|\end{array}$$

donc $\widetilde{T}$ est continue et $\|\widetilde{T}\|\leqslant\|T\|$. Pour montrer l'autre égalité on peut remarquer que

$$\forall x\in F,\quad T(x)=\widetilde{T}(x)$$

d'où $\forall x\in F$, $\|T(x)\|\leqslant\|\widetilde{T}\|\|x\|$ et finalement $\|T\|\leqslant\|\widetilde{T}\|$. . . . . $\boxed{2}$

Enfin, si $\widetilde{T}$ et $\widetilde{T'}$ sont deux prolongements de T alors $\widetilde{T}$ et $\widetilde{T'}$ sont deux applications continues égales sur F dense dans E_1 donc $\widetilde{T}=\widetilde{T'}$. Le prolongement est donc unique. . . . . $\boxed{2}$

En conclusion : $\boxed{\begin{array}{c}T \text{ se prolonge de manière unique sur } E_1\\ \text{en une application linéaire continue de même norme.}\end{array}}$

II.1. Supposons que $x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_nx_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_nx_n$. On veut démontrer que ces développements sont égaux. Ceci revient à prouver, en posant $a_n=b_n-c_n$, que

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx_n\right)=0\Rightarrow(\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=0.)$$

On utilise $(*)$: $\|a_1x_1\|\leqslant K\left\|\sum\limits_{k=1}^{q}a_kx_k\right\|$ et, en prenant la limite $q\to+\infty$ alors $\|a_1x_1\|\leqslant 0$ soit $a_1=0$ car $x_1\neq0$. On prouve alors par une récurrence immédiate que $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$. . . . . $\boxed{3}$

II.2. Comme $\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\| \leqslant K \left\|\sum_{k=1}^{n+p} a_k x_k\right\|$ pour tout p. Alors, lorsque $p \to +\infty$, grâce à la continuité de la norme, on en déduit que $\|P_n(x)\| \leqslant K\|x\|$. L'application linéaire P_n est donc continue, et $\|P_n\| \leqslant K$. 2

Enfin P_n est un projecteur sur $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset H$. Si $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ alors $P_n(y) = y$ donc $\mathrm{Im}\, P_n = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. 2

II.3. L'inclusion $F \subset H$ est évidente car F est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de (x_n). 1

Pour l'inclusion $H \subset G$: si $x \in H$ alors $x = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n x_n$ d'où $x \in G$. 1

Or $H \subset G$ et G est fermé, donc $\overline{H} \subset G$ puis, comme $F \subset H$ alors $G = \overline{F} \subset \overline{H}$ donc $\overline{H} = G$. G fermé dans un banach est complet, par conséquent, grâce au préliminaire, P_n se prolonge en une application linéaire continue $\widetilde{P}_n$ définie sur G. 2

$\widetilde{P}_n$ est à valeurs dans $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = H_n$ car H_n est fermé (complet car e.v.n. de dimension finie) et tout élément de l'image de $\widetilde{P}_n$ est limite d'une suite de H_n. 2

Soit $x \in G$ alors $\exists (u_p) \in F$ telle que $u_p \to x$ et $\widetilde{P}_n(u_p) = P_n(u_p) = u_p$ pour n assez grand d'où

$$\begin{aligned}\|\widetilde{P}_n(x) - x\| &\leqslant \|\widetilde{P}_n(x) - \widetilde{P}_n(u_p)\| + \|u_p - x\| \leqslant \|\widetilde{P}_n\|\|u_p - x\| + \|u_p - x\| \\ &\leqslant (K+1)\|u_p - x\|\end{aligned}$$

On choisit alors $p \geq p_0$ pour que $\|u_p - x\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{K+1}$ et $n \geq n_0$ pour que $P_n(u_p) = u_p$ d'où

$$\|\widetilde{P}_n(x) - x\| \leqslant \varepsilon \text{ soit } \lim_{n\to+\infty} \widetilde{P}_n(x) = x.$$ 6

II.4. • Soit $x_N = \widetilde{P}_1(x) + \sum_{n=1}^{N} (\widetilde{P}_{n+1}(x) - \widetilde{P}_n(x)) = \widetilde{P}_{N+1}(x)$. On a : $\lim\limits_{N} x_N = x$.

Ainsi, par définition de la somme de la série, $\widetilde{P}_1(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\widetilde{P}_{n+1}(x) - \widetilde{P}_n(x)) = x$. 1

• <u>Montrons que $\widetilde{P}_{n+1}(x) - \widetilde{P}_n(x) = a_{n+1}x_{n+1}$</u> :

$x \in G$ est limite d'une suite $(u_p) \in F^{\mathbb{N}}$. On a vu que $\widetilde{P}_n(u_p) = P_n(u_p)$ d'où, en écrivant $u_p = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,p} x_p$ (somme finie), $P_{n+1}(u_p) - P_n(u_p) = a_{n+1,p} u_p$ et comme $\mathrm{Vect}(x_{n+1})$ est un fermé de G,

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{n+1}(x) - \widetilde{P}_n(x) = (\widetilde{P}_{n+1} - \widetilde{P}_n)(x) &= \lim_{p\to+\infty} (\widetilde{P}_{n+1} - \widetilde{P}_n)(u_p) \\ &= \lim_{p\to+\infty} (P_{n+1} - P_n)(u_p) = \lim_{p\to+\infty} a_{n+1,p} x_{n+1} = a_{n+1} x_{n+1}\end{aligned}$$

• On a donc $x_N = \underbrace{\widetilde{P}_1(x)}_{=a_1x_1} + \sum_{n=1}^{N} a_{n+1} x_{n+1}$, soit $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \in H$.

Ceci établit en définitive que : $G \subset H$, soit, finalement : $\boxed{H = G}$. 6

• <u>Conclusion</u> : l'adhérence de $\mathrm{Vect}(x_n)$ est l'ensemble des séries convergentes de la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ et, **toute suite vérifiant (∗) est une suite basique**. 2

Troisième partie

III.1. **a.** On a
$$\bigcap_{n=1}^{N+1} U_n \subset \bigcap_{n=1}^{N} U_{n+1} \subset \bigcap_{n=1}^{N} V_n \subset \bigcap_{n=1}^{N} U_n$$
et ceci pour tout n.

- Si $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$ alors, $\forall N \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $x \in \bigcap_{n=1}^{N} U_n$ donc $\forall N \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $x \in \bigcap_{n=1}^{N-1} V_n$ d'où $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$.
- Si $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ alors, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $x \in \bigcap_{n=1}^{N} V_n$ donc $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $x \in \bigcap_{n=1}^{N} U_n$ d'où $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$.

ce qui donne l'égalité. . . . . $\boxed{4}$

Attention ! Ici il n'est pas question de limite d'ensemble !

b. On suppose ici que E est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide (F_n). Soit (V_n) une suite d'ouverts non-vides. Posons $U_{n+1} = V_n\backslash F_n$, ce qui est loisible, car $V_n\backslash F_n$ est lui aussi un ouvert, non vide (sinon F_n ne serait pas d'intérieur vide). Alors, montrons par l'absurde que $U = \emptyset$. En effet, si $x \in U$, pour tout n, $x \in V_n\backslash F_n$, d'où, pour tout n, $x \notin F_n$, ce qui est absurde. . . . . $\boxed{3}$

c. On suppose ici que E est un espace de Banach.
Soit (U_n) une suite d'ouverts non-vides. Définissons alors par récurrence une suite (V_n) d'ouverts non-vides, et une suite décroissante $B(x_n, r_n)$ telle que $B(x_n, r_n) \subset V_n$, $\lim_n r_n = 0$ et $U_{n+1} \subset V_n \subset U_n$:
- $\underline{n = 1}$: $V_1 = U_2 \cup B(x_1, r_1/2)$, où on a choisi $B(x_1, r_1) \subset U_1$, ce qui est possible.
- $\underline{n > 1}$: Il existe $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n/2) \cap U_n$. Il est toujours possible de choisir $r_{n+1} \leqslant r_n/2$. Posons alors $V_{n+1} = U_n \cap (B(x_{n+1}, r_{n+1}) \cup U_{n+1})$, qui est non vide, et qui vérifie les conditions voulues, car $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset U_n$.

On a, par récurrence immédiate, $r_n \leqslant 2^{-n} r_0$ donc $\lim_n r_n = 0$. L'intersection des V_n est non-vide : en effet, pour tout n, $\overline{B}(x_n, r_n/2) \subset V_n$, et, d'après le théorème rappelé dans l'énoncé, l'intersection des $\overline{B}(x_n, r_n/2)$ est non-vide. En résumé :
$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n \supset \underbrace{\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{B}(x_n, r_n/2)}_{\neq\emptyset} \qquad \boxed{5}$$

d.
- Si E est un Banach alors Paul a une stratégie gagnante.
- Si $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ alors Pierre a une stratégie gagnante.

Conclusion : E Banach et $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ sont incompatibles. . . . . $\boxed{2}$

(C'est le théorème de Baire).

III.2. **a.** On peut remarquer, ce qui servira pour toute la suite, que :

$$n\overline{T(B(0,1))} = \overline{T(nB(0,1))}$$

On a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} nB(0,1) = E$, et donc, par surjectivité de T, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} T(nB(0,1)) = F$.
Ainsi, en prenant l'adhérence, et en posant $X_n = n\overline{T(B(0,1))}$:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n = F \qquad \boxed{3}$$

b. Vu le 1.d. on sait que F ne peut être réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide donc $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overset{\circ}{X_n} \neq \emptyset$ et comme $X_n = nX_1$, X_1 est aussi d'intérieur non vide et par conséquent il existe $c > 0$ et $y \in F$ tels que $B(y_0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$. . . . . . . $\boxed{2}$

c. Évident avec un dessin.
$\overline{T(B(0,1))}$ est un ensemble convexe symétrique par rapport à 0 donc il contient la boule $B(-y_0, 2c)$ et tous les segments de droite reliant un point de la boule $B(y_0, 2c)$ à un point de la boule $B(-y_0, 2c)$.
Soit $y \in F$ tel que $\|y\| < 2c$ alors $y = \dfrac{1}{2}[(y_0 + y) + (-y_0 + y)] \in \overline{T(B(0,1))}$ ce qui signifie que $B(0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$. . . . . $\boxed{3}$

d. Comme $B(0, c) \subset \overline{T(B(0,1/2))}$ alors il existe $z_1 \in B(0, 1/2)$ tel que $\|y - T(z_1)\| \leqslant \dfrac{c}{2}$ (car $T(B(0,1/2))$ est dense dans $\overline{T(B(0,1/2))}$). . . . . $\boxed{1}$
On procède alors par récurrence, supposons construits $z_1, \ldots, z_n$.
Vu que $B(0, \frac{c}{2^n}) \subset \overline{T(B(0, \frac{1}{2^{n+1}}))}$ alors, comme ci-dessus, il existe $z_{n+1} \in B(0, \frac{1}{2^{n+1}})$ tel que $\|y - T(z_1 + \cdots + z_n) - T(z_{n+1})\| \leqslant \dfrac{c}{2^{n+1}}$ toujours grâce à la densité. . . . $\boxed{2}$

e. La suite $x_n = z_1 + \cdots + z_n$ est la somme partielle d'une série absolument convergente donc elle converge dans E vers un élément que l'on note x. . . . . $\boxed{1}$
Grâce à l'inégalité prouvée en d., on sait que $y = T(x)$ donc $x = T^{-1}(y)$. . . . . $\boxed{1}$

f. On a $\|x_n\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|z_k\| \leqslant 1$ donc $\|x\| \leqslant 1$. Ceci se traduit par $T^{-1}(B(0, c)) \subset B(0, 1)$ i.e. T^{-1} est continue. . . . . $\boxed{2}$
On a donc démontré le théorème suivant :

> Toute application linéaire continue et bijective d'un espace de Banach dans un autre est inversible, d'inverse linéaire et **continu**.

Quatrième partie

IV.1. Montrons que A est un espace de Banach.
$(A, \|.\|_A)$ est un e.v.n.

- $\|(a_n)\|_A = 0 \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right\| = 0$
$\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N} a_n x_n = 0$
$\Leftrightarrow$ (par récurrence sur N) $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ a_N = 0$.
- $\|\lambda(a_n)\| = |\lambda|.\|(a_n)\|_A$ (propriété des bornes supérieures)
- $\|(a_n) + (b_n)\|_A \leqslant \|(a_n)\|_A + \|(b_n)\|_A$ (de même). . . . . $\boxed{2}$

Soit $(a_n^{(p)})$ une suite de Cauchy de A

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M,\ \forall p, q \geq M,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \left\| \sum_{n=1}^{N} (a_n^{(q)} - a_n^{(p)}) x_n \right\| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

d'où, grâce à l'inégalité triangulaire $|a_N^{(q)} - a_N^{(p)}|.\|x_n\| \leqslant 2\varepsilon$ et comme $\|x_n\| \neq 0$, on en déduit que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $(a_N^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soit a_N sa limite, par passage à la limite dans (1) quand $q \to +\infty$, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M,\ \forall p, q \geq M,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \left\| \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_n^{(p)}) x_n \right\| \leqslant \varepsilon$$

i.e. $\|(a_n) - (a_n^{(p)})\|_A \leqslant \varepsilon$ donc $\lim\limits_{p} \left(a_n^{(p)}\right) = (a_n)$.

On vérifie aussi que $(a_n) \in A$ c.q.f.d. .... $\boxed{5}$

IV.2. **a.** Φ est une application linéaire. Par *définition* d'une suite basique, tout élément de G s'écrit de manière unique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$. Donc Φ est bijective. .... $\boxed{1}$

De plus, $\left\| \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \right\| = \lim\limits_{N\to+\infty} \left\| \sum\limits_{n=1}^{N} a_n x_n \right\| \leqslant \|(a_n)\|_A$

i.e. $\|\Phi((a_n))\| \leqslant \|(a_n)\|_A$, donc Φ est continue. .... $\boxed{1}$

b. Vu le III on sait que Φ^{-1} est continue i.e. si $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ alors

$$\|\Phi^{-1}(x)\| \leqslant K\|x\|$$

soit encore

$$\sup_{p\geq 1} \left\| \sum_{n=1}^{p} a_n x_n \right\| \leqslant K \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \right\|$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \left\| \sum_{n=1}^{p} a_n x_n \right\| \leqslant K \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \right\|.$$

Comme K est indépendant de x, on peut prendre $x = \sum\limits_{n=1}^{q} a_n x_n$ pour $q \geq p$ et obtenir ainsi la condition (*). .... $\boxed{4}$

Remarque : on a prouvé l'équivalence (x_n) suite basique ssi (x_n) vérifie (*).

Cinquième partie

V.1. **a.** Soit $l \in [p, q]$ tel que $|a_l| = \max\limits_{p\leqslant k\leqslant q} |a_k|$ alors $a_l x_l = \sum\limits_{k=p}^{l} a_k x_k - \sum\limits_{k=p}^{l-1} a_k x_k$ (pour $l \geq p+1$) d'où :

$$|a_l|.\|x_l\| \leqslant \left\| \sum_{k=p}^{l} a_k x_k \right\| + \left\| \sum_{k=p}^{l-1} a_k x_k \right\|$$

$$|a_l| \leqslant 2K \left\| \sum_{k=l}^{q} a_k x_k \right\|$$

car $\|x_l\| = 1$ et on a appliqué la propriété $(*)$ en prenant $a_k = 0$ pour $k < p$. .... $\boxed{3}$

Si $l = p$ alors on obtient directement $|a_l| \leqslant K \left\| \sum_{k=l}^{q} a_k x_k \right\|$ ce qui règle aussi ce cas. $\boxed{1}$

b. On a

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} a_k y_k \right\| \leqslant \left\| \sum_{k=p}^{q} a_k (y_k - x_k) \right\| + \left\| \sum_{k=p}^{q} a_k x_k \right\| \leqslant \max_{p \leqslant k \leqslant q} |a_k| \underbrace{\sum_{k=p}^{q} \|y_k - x_k\|}_{\leqslant \frac{1}{2K}} + \left\| \sum_{k=p}^{q} a_k x_k \right\| \qquad \boxed{3}$$

en utilisant le résultat de la question précédente. D'où

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} a_k y_k \right\| \leqslant 2 \left\| \sum_{k=p}^{q} a_k x_k \right\| \tag{2}$$

Autre inégalité : on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n - y_n\| = \dfrac{1}{2L} < \dfrac{1}{2K}$ (hypothèse de l'énoncé). On remarque alors que $L > K$. On reprend alors l'inégalité (2) en échangeant les rôles de x et y :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=p}^{q} a_k x_k \right\| &\leqslant \left\| \sum_{k=p}^{q} a_k (x_k - y_k) \right\| + \left\| \sum_{k=p}^{q} a_k y_k \right\| \\ &\leqslant \max_{p \leqslant k \leqslant q} |a_k| \underbrace{\sum_{k=p}^{q} \|x_k - y_k\|}_{\leqslant \frac{1}{2L}} + \left\| \sum_{k=p}^{q} a_k y_k \right\| \\ &\leqslant \frac{K}{L} \left\| \sum_{k=p}^{q} a_k x_k \right\| + \left\| \sum_{k=p}^{q} a_k y_k \right\| \end{aligned}$$

d'où, puisque $L - K > 0$:

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} a_k x_k \right\| \leqslant \frac{L}{L-K} \left\| \sum_{k=p}^{q} a_k y_k \right\| \tag{3}$$

ce qui permet de conclure comme dans le premier cas. .... $\boxed{3}$

c. Comme E est un banach, on peut utiliser le critère de Cauchy :

Si la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k$ converge, elle vérifie le critère de Cauchy, il en est donc de même de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k y_k$.

Réciproque immédiate grâce à l'inégalité (3).

<u>Conclusion</u> : pour toute suite réelle (a_k), la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k$ converge dans E si et seulement si la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k y_k$ converge dans E. .... $\boxed{2}$

d. On reprend ensuite la démonstration du b. La première partie de cette preuve nous donne (en remplaçant p par 1 et q par p dans l'inégalité (2)) :

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} a_k y_k \right\| \leqslant 2 \left\| \sum_{k=1}^{p} a_k x_k \right\| \leqslant 2K \left\| \sum_{k=1}^{q} a_k x_k \right\|.$$

Puis, en utilisant l'inégalité (3) avec $p = 1$

$$\left\| \sum_{k=1}^{q} a_k x_k \right\| \leqslant \frac{L}{L-K} \left\| \sum_{k=1}^{q} a_k y_k \right\| \tag{4}$$

d'où finalement

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} a_k y_k \right\| \leqslant \frac{2KL}{L-K} \left\| \sum_{k=1}^{q} a_k y_k \right\|$$

et en conclusion la suite (y_k) vérifie la condition $(*)$. . . . . $\boxed{3}$

e. T est une application linéaire. De plus, on a vu au b. que $\left\| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k y_k \right\| \leqslant 2 \left\| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x_k \right\|$ (par passage à la limite dans (2) avec $p = 1$) donc T est continue. . . . . $\boxed{2}$

Montrons que l'écriture $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k y_k$ est unique i.e. si $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k y_k = 0$ alors $(a_k) = 0$. On utilise pour cela l'inégalité (4) et, en passant à la limite quand q tend vers $+\infty$ on obtient

$$\left\| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k \right\| \leqslant \frac{L}{L-K} \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k y_k \right\| \tag{5}$$

donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x_k = 0$ soit $(a_k) = 0$ car la suite (x_k) est basique. La suite (y_k) est donc elle aussi basique et on peut définir

$$T^{-1}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k y_k \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k. \qquad \boxed{3}$$

Grâce à l'inégalité (5) on peut affirmer directement que T^{-1} est continue. . . . . . . $\boxed{1}$

V.2. **a.** $u = \mathrm{Id} - T$ est linéaire. De plus, $u(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k (x_k - y_k)$ d'où

$$\|u(x)\| \leqslant \underbrace{\max_{k \geqslant 1} |a_k|}_{\leqslant 2K \left\| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x_k \right\|} . \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k - y_k\|}_{\leqslant \frac{1}{2L}} \leqslant \frac{K}{L} \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k \right\| = \frac{K}{L} \|x\|$$

donc $\|u\|$ existe et $\|u\| \leqslant \dfrac{K}{L} < 1$. . . . . $\boxed{2}$

b. On a immédiatement $\|u^k(x)\| \leqslant \|u\|^k . \|x\|$. La série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u^k(x)$ converge absolument donc converge vu que E est un banach. . . . . $\boxed{1}$

On note S sa limite, qui est linéaire .En outre $\|S(x)\| \leqslant \dfrac{1}{1 - \|u\|} . \|x\|$ donc S est une application continue. . . . . $\boxed{1}$

Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u^k$. On a : $S_n \circ T = S_n \circ (1 - u) = \mathrm{Id} - u^{n+1}$ De plus, puisque $\|u\| < 1$, $\lim_n \|u^n\| = 0$. Donc la limite de (u_n) existe et est nulle. En raisonnant de même pour $T \circ S_n$, on obtient en définitive : $S \circ T = \mathrm{Id}_E$ et $T \circ S = \mathrm{Id}_E$. . . . . $\boxed{1}$

c. $Y \subset E$ par définition. De plus, si $x \in E$ alors $x = T(S(x)) = x \in Y$, ce qui établit l'autre inclusion et permet de conclure : $\boxed{Y = E}$ . . . . $\boxed{2}$