SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

Racine carrée d'une matrice

On suppose dans tout le problème que n est un entier supérieur ou égal à 2. On note O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(M)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de M. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme :

$$\|M\| = \left[\mathrm{Tr}\,(\overline{M}^{\mathrm{T}} M)\right]^{1/2} = \left(\sum_{i,j} |m_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Première partie

I.1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, montrer qu'il existe un et un seul $y \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(y) > 0$ et $y^2 = z$. Ce nombre sera noté $\sqrt{z}$.

I.2. Soit $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ et $u_0 \in \mathbb{C}^*$. On considère alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par la formule de récurrence

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}\left(u_k + \frac{a}{u_k}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

On suppose en outre que les u_k sont tous non nuls et que $u_0 \neq -\sqrt{a}$.

a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \neq -\sqrt{a}$.
On pose $v_k = \dfrac{u_k - \sqrt{a}}{u_k + \sqrt{a}}$. Exprimer v_k en fonction de v_{k-1} (pour $k \geqslant 1$) puis en fonction de v_0.

b. En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \sqrt{a}$ si et seulement si u_0 appartient à un demi-plan ouvert que l'on décrira avec précision.

c. Lorsque $u_0 = 1$, montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \sqrt{a}$.

I.3. Soit $T = (t_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure telle que $t_{ii} \notin \mathbb{R}^-$ pour tout i de $[\![1, n]\!]$.
Montrer qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire supérieure, telle que $\Re(x_{ii}) > 0$ pour tout i de $[\![1, n]\!]$ et vérifiant $X^2 = T$. (On pourra raisonner par récurrence sur n et utiliser les matrices blocs.)

I.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice vérifiant $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$.
Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\mathrm{Sp}(X) \subset \{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 0\} \text{ et } X^2 = A.$$

On admettra qu'une telle matrice est unique et on la notera $\sqrt{A}$.

I.5. On considère la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ suivante

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = B$?

Deuxième partie

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, A est une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que
$$\mathbb{R}^- \cap \mathrm{Sp}(A) = \emptyset.$$

II.1. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, vérifiant
$$(\lambda \in \mathrm{Sp}(X)) \Rightarrow (-\lambda \notin \mathrm{Sp}(X)),$$
x l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ associé. On considère l'application
$$\mathcal{T}_x \ : h \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \mapsto h \circ x + x \circ h \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n).$$
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base trigonalisante pour x et h un élément de $\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}_x$.

a. Montrer que $h(e_1) = 0$.
b. Montrer que $h(e_m) = 0$ pour tout $m \in [\![1, n]\!]$.
c. En déduire que l'application
$$T_X : H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto HX + XH \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$
est un isomorphisme.

II.2. Soit $a > 0$, on suppose que la suite $(e_k)_{k \geqslant 0}$ est une suite à termes positifs vérifiant
$$\text{(E)} \qquad e_0 < \frac{a}{3}, \ a e_{k+1} \leqslant e_k^2 + 2 e_k e_{k+1}$$

a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $e_k < \dfrac{a}{3}$.
b. En déduire que la suite (e_k) converge et que sa limite est nulle.

Soit $X_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par la formule de récurrence
$$X_{k+1} = X_k - T_{X_k}^{-1}(X_k^2 - A)$$
où on suppose que pour tout k de $\mathbb{N}$, l'endomorphisme T_{X_k} est inversible.

II.3. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on définit
$$\alpha(M) = \inf \left\{ \frac{\|T_M(H)\|}{\|H\|}, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), H \neq O_n \right\}.$$

a. Vérifier que $\alpha(\sqrt{A}) > 0$.
b. Si $e_k = \|X_k - \sqrt{A}\|$, montrer l'inégalité
$$\alpha(\sqrt{A}) e_{k+1} \leqslant e_k^2 + 2 e_k e_{k+1}$$
pour tout k de $\mathbb{N}$.
c. En déduire que X_k tend vers $\sqrt{A}$ quand $k \to +\infty$ pourvu que
$$\|X_0 - \sqrt{A}\| < \frac{\alpha(\sqrt{A})}{3}.$$

II.4. On suppose que A est diagonalisable et on choisit $X_0 = I_n$. Dans le cas où tous les termes de la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont définis, montrer que les matrices X_k sont diagonalisables et étudier leur limite (on montrera d'abord que, $\mathcal{D}$ désignant l'ensemble des matrices diagonales, si $X \in \mathcal{D}$ et si T_X est inversible alors $T_X(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$).

Troisième partie

On suppose désormais que A est la matrice diagonale

$$\mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où les λ_i sont éléments de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

On étudie une suite dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, définie par son premier élément Y_0 et la relation de récurrence

$$Y_{k+1} = \frac{1}{2}(Y_k + Y_k^{-1}A),$$

tant que Y_k est inversible.

III.1. Montrer que, si $Y_0 = I_n$, alors $Y_k = X_k$ où $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite étudiée dans la deuxième partie du problème.
Dans ce cas, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} Y_k = \sqrt{A}$.

Pour $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $Y = \Delta + \sqrt{A}$ soit inversible, on pose

$$g(\Delta) = Y' - \sqrt{A} \text{ où } Y' = \frac{1}{2}(Y + Y^{-1}A).$$

III.2. a. Exprimer $\varepsilon > 0$ en fonction des valeurs propres de A tel que

$$(\|\Delta\| < \varepsilon) \Rightarrow (\Delta + \sqrt{A} \text{ inversible}).$$

b. Montrer que, lorsque $\|\Delta\| \to 0$

$$g(\Delta) = \frac{1}{2}(\Delta - X^{-1}\Delta X) + O(\|\Delta\|^2)$$

où $X = \sqrt{A}$.

III.3. On note L l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $L(\Delta) = \dfrac{1}{2}(\Delta - X^{-1}\Delta X)$.
Montrer que

$$\|L(\Delta)\| \leqslant \|\Delta\|.\frac{1}{2}\max_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\left|1 - \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j}}\right|.$$

III.4. On suppose que

$$\frac{1}{2}\max_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\left|1 - \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j}}\right| < 1.$$

a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon[$ et $k \in]0, 1[$ tels que

$$(\|\Delta\| < \varepsilon_1) \Rightarrow (\|g(\Delta)\| \leqslant k\|\Delta\|).$$

b. Prouver que si $\|Y_0 - \sqrt{A}\| < \varepsilon_1$, la suite $(Y_p)_{p\geqslant 0}$ est bien définie et que

$$\lim_{p\to+\infty} Y_p = \sqrt{A}.$$

III.5. Si la suite $(Y_p)_{p\geqslant 0}$ est bien définie, a-t-on $\lim\limits_{p\to+\infty} Y_p = \sqrt{A}$?

III.6. On suppose que $\dfrac{1}{2}\left|1-\dfrac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j}}\right| \geqslant 1$ pour deux indices i et j convenables. On choisit $Y_0 = \sqrt{A} + t_0 E$ où $t_0 \in \mathbb{R}^*$ et

$$E = (e_{lm})_{(l,m)\in[\![1,n]\!]^2}, \quad e_{l,m} = \begin{cases} 1 \text{ si } (l,m) = (j,i) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

Calculer Y_p et montrer que Y_p ne converge pas vers $\sqrt{A}$ quand $p \to +\infty$.