SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

Corrigé du devoir sur le calcul de la racine carrée d'une matrice

Première partie $\boxed{24}$

I.1. On sait que $z \neq 0$ possède exactement 2 racines carrées : y_0 et $-y_0$ et comme $z \notin \mathbb{R}^-$, $\Re(y_0) \neq 0$ ce qui permettra de faire le choix. . . . . $\boxed{2}$

I.2. **a.** On a $u_{k+1}+\sqrt{a} = \dfrac{1}{2u_k}(u_k+\sqrt{a})^2$ donc, par une récurrence immédiate on peut conclure que $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k + \sqrt{a} \neq 0$. . . . . $\boxed{2}$

Après un calcul élémentaire, on trouve $v_k = v_{k-1}^2$. . . . . $\boxed{1}$

Donc, par une récurrence simple, on arrive à $v_k = v_0^{2^k}$ . . . . $\boxed{2}$

b. On obtient $u_k = \sqrt{a}\dfrac{1+v_k}{1-v_k}$ et $u_k - \sqrt{a} = \sqrt{a}\dfrac{2v_k}{1-v_k}$ i.e. $u_k \to \sqrt{a}$ ssi $v_k \to 0$ ssi $|v_0| < 1$.

Traduisons cette dernière inégalité :

$$\left|\frac{u_0-\sqrt{a}}{u_0+\sqrt{a}}\right| < 1 \Leftrightarrow |u_0-\sqrt{a}|^2 < |u_0+\sqrt{a}|^2 \Leftrightarrow \sqrt{a}\overline{u_0} + \sqrt{\overline{a}}u_0 > 0. \qquad \boxed{4}$$

Interprétation géométrique : si on note A et A' les points d'affixes respectives $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ alors $M(u_0)$ appartient au demi-plan ouvert délimité par la médiatrice de AA' et contenant A.

c. Si $u_0 = 1$, la condition ci-dessus est évidemment vérifiée. . . . . $\boxed{1}$

I.3. On procède donc par récurrence, pour $n = 1$, c'est évident.

H.R.: on suppose la propriété vraie à l'ordre n. A l'ordre $n+1$, cherchons X_{n+1} sous la forme $X_{n+1} = \begin{pmatrix} X_n & B_n \\ 0 & \sqrt{t_{n+1,n+1}} \end{pmatrix}$.

On obtient alors $X_{n+1}^2 = T_{n+1} = \begin{pmatrix} T_n & C_n \\ 0 & t_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (X_n + \sqrt{t_{n+1,n+1}}I_n)B_n = C_n$. Or, $X_n + \sqrt{t_{n+1,n+1}}I_n$ est inversible car c'est une matrice triangulaire dont les termes de la diagonale ne s'annulent pas vu qu'ils ont une partie réelle > 0. . . . . $\boxed{6}$

On peut remarquer qu'une telle matrice est unique.

I.4. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire i.e. $A = PTP^{-1}$, on va alors chercher X sous la forme $X = PYP^{-1}$ où Y vérifiera $Y^2 = T$. On est alors ramené à la question précédente. On a bien unicité de Y, l'unicité de X est plus délicate car elle fait intervenir les endomorphismes associés. . . . . $\boxed{2}$

I.5. B est nilpotente d'ordre n. Si $X^2 = B$ alors X est nilpotente mais $X^{2n-2} = B^{n-1} \neq 0_n$ ce qui est impossible car on sait que l'ordre de nilpotence d'une matrice d'ordre n est inférieur ou égal à n.

Conclusion : il n'y a pas de matrice X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $X^2 = B$. . . . . $\boxed{4}$

Deuxième partie $\boxed{29}$

II.1. **a.** Comme $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base trigonalisante pour x, e_1 est un vecteur propre de x : $x(e_1) = \lambda_1 e_1$. Comme $h \circ x + x \circ h = 0$ alors, en appliquant cette relation à e_1, on en déduit que

$$h[x(e_1)] + x[h(e_1)] = \lambda_1 h(e_1) + x[h(e_1)] = 0 \text{ soit } x[h(e_1)] = -\lambda_1 h(e_1).$$

Or $-\lambda_1 \notin \mathrm{Sp}(x)$ vu l'hypothèse faite donc $h(e_1) = 0$. . . . . $\boxed{2}$

b. On procède par récurrence finie sur m. On vient de prouver le résultat pour $m = 1$. On suppose la propriété vraie jusqu'à l'ordre m, $m \leqslant n-1$. Comme la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est trigonalisante pour x alors $x(e_{m+1}) = t_{1,m+1}e_1 + \cdots + t_{m,m+1}e_m + \lambda_{m+1}e_{m+1}$ d'où

$$\begin{aligned} h[x(e_{m+1})] + x[h(e_{m+1})] &= t_{1,m+1}h(e_1) + \cdots + t_{m,m+1}h(e_m) + \lambda_{m+1}h(e_{m+1}) + x[h(e_{m+1})] \\ &= \lambda_{m+1}h(e_{m+1}) + x[h(e_{m+1})] = 0 \end{aligned}$$

car $h(e_k) = 0$ pour $k \in [\![1, m]\!]$, soit

$$x[h(e_{m+1})] = -\lambda_{m+1}h(e_{m+1}).$$

Or $-\lambda_{m+1} \notin \mathrm{Sp}(x)$ vu l'hypothèse faite donc $h(e_{m+1}) = 0$. Ceci achève la récurrence, par conséquent $h(e_m) = 0$ pour tout $m \in [\![1, n]\!]$. . . . . $\boxed{3}$

c. On vient de prouver que si $h \in \operatorname{Ker} \mathcal{T}_x$ alors $h = 0$. $\mathcal{T}_x$ est un endomorphisme injectif en dimension finie, c'est donc un isomorphisme. Il en est de même pour T_X car sur $\mathbb{C}$ tout endomorphisme est trigonalisable. . . . . $\boxed{1}$

II.2. **a.** Par une première récurrence : l'inégalité est vérifiée pour $k = 0$ et si elle est vérifiée pour $k \in \mathbb{N}$ alors

$$ae_{k+1} \leqslant e_k^2 + 2e_k e_{k+1} < \frac{a^2}{9} + 2\frac{a}{3}e_{k+1}$$

soit $\dfrac{a}{3}e_{k+1} < \dfrac{a^2}{9}$ donc $e_{k+1} < \dfrac{a}{3}$ c.q.f.d. . . . . $\boxed{2}$

b. Par une deuxième récurrence, on montre que la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroît dans $\mathbb{R}$ car, toujours en reprenant l'inégalité

$$ae_{k+1} \leqslant \frac{a}{3}e_k + 2\frac{a}{3}e_{k+1}$$

d'où $\dfrac{a}{3}e_{k+1} \leqslant \dfrac{a}{3}e_k$ soit $e_{k+1} \leqslant e_k$.

La suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc convergente dans $\mathbb{R}_+$ vers $l < \dfrac{a}{3}$ alors, par passage à la limite dans l'inégalité on arrive à

$$al \leqslant 3l^2$$

or, vu que $l < \dfrac{a}{3}$ on en déduit que $l = 0$ c.q.f.d. . . . . $\boxed{4}$

II.3. **a.** Comme le spectre de A ne rencontre pas $\mathbb{R}_-$, $\sqrt{A}$ possède la propriété du **II.1** et donc $T_{\sqrt{A}}$ est inversible. $T_{\sqrt{A}}$ ne s'annule pas sur la sphère unité qui est compacte, $T_{\sqrt{A}}$ est continue donc $T_{\sqrt{A}}$ atteint un minimum strictement positif qui est $\alpha(\sqrt{A})$. . . . . $\boxed{4}$

En fait $\alpha(\sqrt{A})$ n'est autre que la norme subordonnée de $T_{\sqrt{A}}$ et comme cet endomorphisme est non nul, sa norme est > 0.

b. On a donc $\|T_{\sqrt{A}}(X_{k+1}-\sqrt{A})\| \geqslant \alpha\sqrt{A}e_{k+1}$ et

$$X_{k+1} = X_k - T_{X_k}^{-1}(X_k^2 - A) \Leftrightarrow X_kX_{k+1} + X_{k+1}X_k - X_k^2 - A = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} T_{\sqrt{A}}(X_{k+1}-\sqrt{A}) &= \sqrt{A}X_{k+1} + X_{k+1}\sqrt{A} - 2A \\ &= (\sqrt{A}-X_k)(X_{k+1}-\sqrt{A}) + (X_{k+1}-\sqrt{A})(\sqrt{A}-X_k) + (X_k-\sqrt{A})^2 \end{aligned}$$

et donc, en vertu de l'inégalité $\|M.N\| \leqslant \|M\|.\|N\|$ on en déduit l'inégalité demandée $\alpha(\sqrt{A})e_{k+1} \leqslant e_k^2 + 2e_ke_{k+1}$. 5

c. On prend donc l'hypothèse $e_0 < \dfrac{\alpha(\sqrt{A})}{3}$.
On utilise alors le résultat du **II.2** d'où : $X_k \to \sqrt{A}$. 1

II.4. Si on appelle x_k et a les endomorphismes associés aux matrices X_k et A alors la récurrence s'applique aux endomorphismes. On peut donc supposer ici que A est une matrice diagonale. Or si X est une matrice diagonale et si $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des matrices diagonales (qui est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices) alors $T_X(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Comme T_X est un isomorphisme on a $T_X(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ et donc $T_X^{-1}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.
Par récurrence on montre alors que les termes de la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont tous des matrices diagonales. 4
Dans cette hypothèse, $T_X(D) = 2\,\mathrm{Diag}(x_id_i)$ où les x_i et les d_i désignent les termes des diagonales des matrices X et D.
On a donc $T_X^{-1}(D) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Diag}(d_i/x_i)$ d'où

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Diag}\left(x_{k,i} + \frac{a_i}{x_{k,i}}\right) = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}A).$$

En reprenant la question **I.2.** on peut affirmer que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_{k,i} \to \sqrt{a_i}$ et donc $X_k \to \sqrt{A}$. 3

Troisième partie 35

III.1. On a vu, dans la question **II.4.** que $Y_k = X_k$. 3

III.2. a. Soit $\delta = \min\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |\sqrt{\lambda_i}|$ alors pour $\|\Delta\| < \dfrac{\delta}{2\sqrt{n}}$ on a (en posant $\Delta = (d_{ij})$)

$$|\sqrt{\lambda_i} + d_{ii}| \geqslant |\sqrt{\lambda_i}| - |d_{ii}| \geqslant \delta - |d_{ii}| > \delta - \frac{\delta}{2\sqrt{n}}.$$

En outre,

$$\sum_{j\neq i} |d_{ij}| \leqslant \sqrt{n-1}\left(\sum_{j\neq i}|d_{ij}|^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{n-1}\|\Delta\| < \frac{\delta}{2}$$

donc $\sum\limits_{j\neq i} |d_{ij}| < |\sqrt{\lambda_i} + d_{ii}|$, la matrice $\Delta + \sqrt{A}$ étant à diagonale dominante est inversible. 2
On peut donc prendre $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2\sqrt{n}}$. 5

b. On a

$$\begin{aligned}2g(\Delta)-(\Delta-X^{-1}\Delta X)&=\Delta+X+(\Delta+X)^{-1}X^2-2X-\Delta+X^{-1}\Delta X\\&=-X+(\Delta+X)^{-1}X^2+X^{-1}\Delta X=M\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}(\Delta+X)M&=(\Delta+X)(-X+(\Delta+X)^{-1}X^2+X^{-1}\Delta X)\\&=-\Delta X-X^2+X^2+(\Delta+X)X^{-1}\Delta X=\Delta X^{-1}\Delta X\end{aligned}$$

d'où $M=(\Delta+X)^{-1}\Delta X^{-1}\Delta X$ et, en choisissant $\|\Delta\|$ tel que $\|(\Delta+X)^{-1}\|\leqslant 2\|X^{-1}\|$ on obtient

$$\|M\|\leqslant 2\|X^{-1}\|^2\|X\|^2\|\Delta\|^2$$ 5

III.3. Par un calcul direct, on a $L(\Delta)=\dfrac{1}{2}\left(d_{ij}\left(1-\dfrac{\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ d'où

$$\begin{aligned}\|L(\Delta)\|^2&=\sum_{i,j}\frac{1}{4}\left(|d_{ij}|^2\left|1-\frac{\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}}\right|^2\right)\\&\leqslant\frac{1}{4}\max_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\left|1-\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j}}\right|^2\sum_{i,j}|d_{ij}|^2=\frac{1}{4}\max_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\left|1-\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j}}\right|^2\|\Delta\|^2\end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat en passant aux racines carrées. 4

III.4. **a.** On a $\|g(\Delta)\|\leqslant\dfrac{1}{2}\|L(\Delta)\|+\|M\|$ compte tenu des deux questions précédentes, donc

$$\|g(\Delta)\|\leqslant k\|\Delta\|$$

en choisissant $\|\Delta\|$ assez petit et $k=\dfrac{1}{2}\max_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\left|1-\dfrac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j}}\right|+\alpha<1$. 2

b. Si $\|Y_0-\sqrt{A}\|<\varepsilon_1$ alors Y_0 est inversible.

Par récurrence, si $Y_0,\dots,Y_p$ sont définis et si $\|Y_q-\sqrt{A}\|<\varepsilon_1k^q$ pour $q\in[0,p]$ alors $\|Y_p-\sqrt{A}\|<\varepsilon_1k^p<\varepsilon_1$ donc Y_p est bien inversible et Y_{p+1} est bien définie. 3

On a alors

$$\|Y_{p+1}-\sqrt{A}\|=\|g(Y_p-\sqrt{A})\|\leqslant k\|Y_p-\sqrt{A}\|<\varepsilon_1k^{p+1}.$$

On peut alors conclure. 2

III.5. Non ! 1

Si $\sqrt{A}=\mathrm{Diag}(\sqrt{a})$ et $Y_0=-\mathrm{Diag}(\sqrt{a})$ alors, la suite Y_p est constante et ne converge pas vers $\sqrt{A}$. 4

III.6. En posant $C=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_j}\right)$ alors, pour tout p, on a $Y_p=\sqrt{A}+t_0C^pE$. 3

La suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bien définie mais comme t_0C^pE ne tend pas vers 0, Y_p ne tend pas vers $\sqrt{A}$. 1