SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

Notations et objectifs du problème.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites $(x_k)_{k\geqslant 0}$ de nombres complexes, par E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ formé des suites bornées et par $\mathbf{E}_c$ le sous-espace vectoriel de E constitué des suites convergentes (il n'est pas demandé d'établir ces inclusions).
Si $x = (x_k)_{k\geqslant 0}$ est un élément de E on pose $\|x\| = \sup\{|x_k|,\ k \geqslant 0\}$; on admet que $\|.\|$ est une norme sur E et on verra que E est complet pour cette norme.

On note $\mathcal{T}$ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à $x = (x_k)_{k\geqslant 0}$ associe $y = (y_k)_{k\geqslant 0}$ définie par $y_k = \dfrac{\sum_{j=0}^{k} x_j}{k+1}$.
Cette application est linéaire (il n'est pas demandé de le démontrer).

Questions préliminaires

(1) Montrer que E est stable par $\mathcal{T}$. On note T la restriction de $\mathcal{T}$ à E.
(2) Vérifier que T est une application linéaire continue i.e. $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$.
(3) Montrer que $\mathbf{E}_c$ est stable par T et plus précisément que si x converge vers l, il en est de même pour $y = Tx$.

Objectifs

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de T. Il est constitué de deux parties indépendantes.
La partie I permet d'examiner quelques exemples montrant une variété importante de comportements possibles.
Dans la partie II on détermine le noyau et l'image de T.

Partie I : exemples

A. Premiers exemples

(1) Soit θ dans $]0, 2\pi[$; dans cette question on note x la suite $(x_k)_{k\geqslant 0}$ définie par $x_k = \exp(ik\theta)$. On pose $y = Tx$. Démontrer que y appartient à $\mathbf{E}_c$.
(2) Soit n un entier $\geqslant 1$; dans cette question on note x la suite définie par

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $y = Tx$.
a) Calculer y_{pn+j} pour $p \geqslant 0$ et $0 \leqslant j < n$;
b) En déduire que y appartient à $\mathbf{E}_c$.
(3) Quel est le lien entre les exemples précédents et la troisième question préliminaire ?
(4) Soit t dans $[0, 1]$. On définit $x(t)$ par :

$$\begin{cases} x_0(t) & = t \\ x_{k+1}(t) & = (x_k(t) - 1)^2 \text{ pour } k \geqslant 0 \end{cases}.$$

Il est facile de voir que, pour tout t dans $[0, 1]$, la suite $x(t)$ est à valeurs dans $[0, 1]$. On pose alors $y(t) = Tx(t)$.
Soit t_0 le nombre $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.(Il vaut $0,38$ à 10^{-2} près).

a) On se propose de démontrer que, lorsque $t \neq t_0$, la suite $x(t)$ est divergente.
   (i) On suppose la suite $x(t)$ convergente. Trouver la limite ℓ de $x(t)$.
   (ii) Vérifier que, si $t \neq t_0$, alors, pour tout entier k, $x_k(t) \neq \ell$.
   Si, dans ces conditions, la suite $x(t)$ était convergente, quelle serait la limite (quand k tend vers l'infini) du rapport $\dfrac{x_{k+1}(t)-\ell}{x_k(t)-\ell}$?
   (iii) Conclure.

b) On définit f et g fonctions de $[0,1]$ dans lui-même par : $f(x) = (x-1)^2$ et $g = f \circ f$.
   (i) Dessiner le graphe de la fonction g en précisant les variations, la position du graphe par rapport à la première bissectrice et ses points d'intersection avec cette droite.
   (ii) *Pour cette question, on peut se contenter d'une argumentation basée sur le graphe.* Montrer que les suites extraites $(x_{2k}(t))_{k\geqslant 0}$ et $(x_{2k+1}(t))_{k\geqslant 0}$ sont convergentes. En déduire que $y(t)$ est convergente et identifier sa limite en fonction de t.

B. Une remarque

Soit x dans E et $y = Tx$.

(1) Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $|y_k - y_{k-1}| \leqslant \dfrac{2\|x\|}{k+1}$.

(2) En déduire que si x est une suite à valeurs réelles alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de y est un intervalle.

C. Suites à valeurs dans $\{0,1\}$

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose $u_p = 1! + 2! + 3! + ... + p!$ et $v_p = 1! + 3! + 5! + ... + (2p-1)!$.
De plus $u_0 = 0$ et $v_0 = 0$.

(1) Montrer que $u_p \underset{p\to\infty}{\sim} p!$ (on pourra mettre $p!$ en facteur). Montrer de même que $v_p \underset{p\to\infty}{\sim} (2p-1)!$.
On définit une suite x de la manière suivante :
si $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique $j(k) \geqslant 0$ tel que $u_j(k) \leqslant k < u_{j(k)+1}$ et dans ce cas, si $j(k)$ est pair on pose $x_k = 1$, si $j(k)$ est impair on pose $x_k = 0$.
Autrement dit

$$x = 1,0,0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,\ \text{(24 fois)},\ 1,1,1,\ \text{(120 fois)}...$$

(2) On pose $y = Tx$. Calculer y_k lorsque $k = u_p$.

(3) En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de y est égal à $[0,1]$.
Quel est celui de la suite x ?

Partie II. Étude de l'endomorphisme T

A. Généralités

(1) Montrer que l'application linéaire $\mathcal{T}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur lui-même.

(2) On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble $\{\frac{1}{k+1},\ k \in \mathbb{N}\}$. Soit λ, un nombre complexe. On note $I_\mathcal{E}$ l'application identique de $\mathcal{E}$ dans lui-même.
   a) Montrer que si λ, n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{A}$, alors l'application linéaire $\mathcal{T} - \lambda I_\mathcal{E}$ est bijective.
   b) Montrer que si λ, appartient à l'ensemble $\mathcal{A}$, alors l'application linéaire $\mathcal{T} - \lambda I_\mathcal{E}$ n'est ni injective ni surjective.

(3) Soit $y = (y_k)_{k\geqslant 0}$ dans E. Montrer que :

$$y \in \mathrm{Im}(T) \Leftrightarrow \exists K > 0 \text{ tel que, } \forall k \geqslant 1,\ |(k+1)y_k - ky_{k-1}| \leqslant K.$$

(4) L'application linéaire T de E dans E est-elle surjective ? Est-elle injective ?

B. Quelques suites auxiliaires

Dans ce **B.**, on considère un nombre complexe λ, vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\lambda \neq 0,\ \lambda \notin \mathcal{A}.\ \mathrm{Re}(1/\lambda) \neq 1. \tag{L}$$

On écrit $1 - \dfrac{1}{\lambda} = a + ib$ avec a et b réels ($a \neq 0$). On définit la suite α par :

$$\alpha_0 = \frac{1}{1-\lambda} \text{ et, pour } k \geqslant 1,\ \alpha_k = \frac{1}{(1 + (1 - \frac{1}{\lambda})\frac{1}{k})}\alpha_{k-1}. \tag{*}$$

Cette suite est bien définie grâce aux hypothèses (L).

(1) Vérifier que $\alpha_k \neq 0$ pour tout entier positif k.

(2) Montrer que $\ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}| = -\dfrac{a}{k} + O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$.

(3) Que dire de la suite $|\alpha|$ si a est négatif ?

(4) On rappelle qu'il existe un nombre réel γ tel que l'on ait : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Pour a positif, montrer qu'il existe une nombre réel A_1 strictement positif tel que: $|\alpha_k| \underset{k\to\infty}{\sim} \dfrac{A_1}{k^a}$.
(A_1 et les nombres réels $A_2, \ldots, A_5$ qui suivent dépendent de λ mais sont indépendants de k).

(5) On définit $U_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{1}{j|\alpha_{j-1}|}$ et $V_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} \left|\dfrac{1}{\alpha_j} - \dfrac{1}{\alpha_{j-1}}\right|$ et $a > 0$ pour la suite.

a) Montrer qu'il existe une constante A_2 strictement positive telle que :

$$\forall k \geqslant 1,\ 0 \leqslant U_k \leqslant A_2 k^a.$$

b) En déduire qu'il existe une constante A_3 telle que $\forall k \geqslant 1$, $|\alpha_k U_k| \leqslant A_3$.

(6) En exprimant $\dfrac{1}{\alpha_j} - \dfrac{1}{\alpha_{j-1}}$ grâce à (*) montrer qu'il existe une constante A_4 strictement positive telle que :

$$\forall k \geqslant 1,\ |\alpha_k| V_k \leqslant A_4.$$

C. Détermination du spectre de T

Définition.
Soit S un endomorphisme continu de E, on dit que S est inversible si S réalise une bijection de E sur lui-même.
Remarque : E étant complet, il résulte d'un théorème de BANACH que si S est bijectif et continu, alors S^{-1} est continu, de sorte que S est alors un élément inversible de l'algèbre des endomorphismes continus de E (*cité pour la culture*).
On appelle spectre de S, et on note $\sigma(S)$, l'ensemble des nombres complexes λ tels que $S - \lambda I_E$ n'est pas inversible.
On **admettra** que $\sigma(S)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.

(1) Est-ce que 0 est dans $\sigma(T)$? Même question pour 1.
Dorénavant, on se donne un complexe λ **vérifiant les hypothèses (L) du II.B**. On garde les notations α, U, V, ... du **II.B**.

(2) Soient x et y deux éléments de $\mathcal{E}$. Vérifier que :

$$(T - \lambda I_E)(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 & = \dfrac{1}{1-\lambda} y_0 \\ \forall k \geqslant 1,\ x_k & = \dfrac{1}{1 + (1-\frac{1}{\lambda})\frac{1}{k}} \left(x_{k-1} + \dfrac{1}{\lambda}(y_{k-1} - y_k - \dfrac{1}{k} y_k) \right) \end{cases} \tag{**}$$

(3) On considère $y = \left(\dfrac{1}{k+1}\right)_{k \geqslant 0}$.
On considère la suite x (*a priori* élément de $\mathcal{E}$) telle que $(\mathcal{T} - \lambda I_{\mathcal{E}})(x) = y$.

a) Quel est le lien entre x et la suite α du **II.B.** ?

b) En utilisant **II.B.** montrer que, si $\mathrm{Re}(1-\dfrac{1}{\lambda})<0$, alors $\lambda \in \sigma(T)$.

(4) On suppose $\mathrm{Re}(1-\dfrac{1}{\lambda})>0$.

Soit y dans E et soit x la suite définie par les formules (**) ci -dessus.

a) Établir les relations suivantes :

$$\forall k \geqslant 1,\ \frac{x_k}{\alpha_k}=\frac{x_{k-1}}{\alpha_{k-1}}+\frac{1}{\lambda}\frac{y_{k-1}-y_k}{\alpha_{k-1}}-\frac{1}{\lambda}\frac{y_k}{k\alpha_{k-1}}.$$

$$\forall k \geqslant 1,\ x_k=\alpha_k y_0+\frac{\alpha_k}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\frac{y_{j-1}-y_j}{\alpha_{j-1}}-\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{y_j}{j\alpha_{j-1}}\right)\alpha_k.$$

b) En remarquant que $\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{y_{j-1}-y_j}{\alpha_{j-1}}=\sum\limits_{j=1}^{k}y_j\left(\dfrac{1}{\alpha_j}-\dfrac{1}{\alpha_{j-1}}\right)+\dfrac{y_0}{\alpha_0}-\dfrac{y_k}{\alpha_k}$, montrer qu'il existe une constante A_5 (indépendante de y et de k) telle que

$$\forall k \geqslant 0,\ |x_k| \leqslant A_5\|y\|.$$

(5) Déterminer $\sigma(T)$ et le représenter sur un dessin.

Fin provisoire du devoir