SPÉCIALE MP* : CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ

Questions préliminaires

(1) Soit $x \in E$. Immédiatement, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$|y_k| \leqslant \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}|x_j| \leqslant \sup_j |x_j| = ||x||$$ 1

(2) Comme $\mathcal{T}$ est linéaire, T l'est également. De plus, par la question précédente, pour tout $x \in E$

$$\|Tx\| = \|y\| \leqslant \|x\| \Rightarrow \|T\| \leqslant 1$$

ce qui montre que T est continu. 1

(3) C'est le théorème de Césaro. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant K$, $|x_k - \ell| < \varepsilon/2$. On a alors

$$|y_k - \ell| \leqslant \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{K}|x_k - \ell| + \frac{1}{k+1}\sum_{j=K+1}^{k}|x_k - \ell| \leqslant \frac{A_K}{k+1} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

dès que k est assez grand. 3

Partie I. Exemples

A. Premiers exemples

(1) Comme $\theta \in]0, 2\pi[$, $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$, on peut donc écrire

$$\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} e^{ij\theta} = \frac{1}{k+1}\frac{1 - e^{i(k+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

et $|y_k| \leqslant \dfrac{1}{(k+1)|\sin(\theta/2)|}$, ce qui montre que $\lim\limits_{k \to +\infty} y_k = 0$. 2

(2) a) On a, pour tout $p \geqslant 0$, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$

$$y_{pn+j} = \frac{1}{pn+j+1}\sum_{l=0}^{pn+j} x_l = \frac{p+1}{pn+j+1}.$$ 1

b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $p \geqslant 0, j \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $m = pn + j$, et par définition de la suite x, $y_m = \dfrac{p+1}{pn+j+1}$. Cela entraîne que $\lim\limits_{m \to +\infty} y_m = \lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{p+1}{pn+j+1} = \dfrac{1}{p}$. 3

(3) La question 3 du préliminaire montre que si la suite $x \in \mathbf{E}_c$, alors également $y \in \mathbf{E}_c$. Les deux questions précédentes montrent que la réciproque est fausse. 2

(4) a) (i) Supposons que $t \neq t_0$ et que la suite $x(t)$ converge vers une limite $\ell(t)$. Par continuité de la fonction $u \mapsto (u-1)^2$, il vient $\ell(t) = (\ell(t) - 1)^2$ donc, comme $\ell(t) \in [0, 1]$, $\ell(t) = t_0 = \ell$. 1

(ii) Supposons qu'il existe k tel que $x_k(t) = t_0$. On a alors

$$\begin{cases} (x_{k-1}(t) - 1)^2 & = t_0 \\ (t_0 - 1)^2 & = t_0 \end{cases} \Rightarrow x_{k-1} - 1 = t_0 - 1 < 0 \Rightarrow x_{k-1} = t_0.$$

Ainsi, par récurrence, il vient $x_0 = t = t_0$, en contradiction avec l'hypothèse de la question. 3

On suppose que la suite $x(t)$ converge. Un calcul immédiat donne

$$\frac{x_{k+1}(t) - \ell}{x_k(t) - \ell} = \frac{(x_k(t) - 1)^2 - (\ell - 1)^2}{x_k(t) - \ell} = x_k + \ell - 2$$

et
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}(t)-\ell}{x_k(t)-\ell} = 2(\ell-1) = 1-\sqrt{5} \approx -1.24$$ 2

(iii) Posons $u_k = x_k - \ell$. On vient que montrer que
$$\lim \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \sqrt{5}-1 > 1$$
Ceci montre que la suite $(|u_k|)_{k\geqslant k_0}$ est croissante ; il existe ainsi k_0 tel que pour tout $k \geqslant k_0$, $|u_k| \geqslant |u_{k_0}|$, ce qui entraîne que la suite (u_k) ne peut converger vers 0. . . 2

b) (i) Un calcul immédiat donne $g(x) = x^2(x-2)^2$; donc $g'(x) = 4(x-1)x(x-2)$, ce qui montre que g est croissante sur $[0,1]$. En 0 et 1 les tangentes à la courbe représentative de g sont horizontales, et cette courbe coupe la droite d'équation $y = x$ en t_0. 2

(ii)
- Si $x_0(t) = t_0$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k(t) = t_0$ et $y_k(t) = t_0$ donc $\lim_{k\to+\infty} y_k(t) = t_0$ ce qui règle le problème dans ce cas. 2
- Si $x_0(t) < t_0$, alors $x_1(t) > t_0$ et par récurrence on obtient $\lim_{k\to+\infty} x_{2k}(t) = 0$, $\lim_{k\to+\infty} x_{2k+1}(t) = 1$.
- Si $x_0(t) > t_0$, alors $x_1(t) < t_0$ et par récurrence on obtient $\lim_{k\to+\infty} x_{2k}(t) = 1$, $\lim_{k\to+\infty} x_{2k+1}(t) = 0$. 2

Supposons que l'on a $x_0(t) < t_0$ (l'autre cas est analogue). Il vient
$$y_{2k}(t) = \frac{1}{2k+1}\sum_{j=0}^{2k} x_j(t) = \frac{1}{2k+1}\sum_{j=0}^{k} x_{2j}(t) + \frac{1}{2k+1}\sum_{j=0}^{k-1} x_{2j+1}(t)$$
Or, par Césaro, $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} x_{2j}(t) = 0$ et $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1} x_{2j+1}(t) = 1$. Ainsi
$$\lim_{k\to+\infty} y_{2k}(t) = \frac{1}{2}.$$ 2

Le calcul de la limite de la suite $(y_{2k+1}(t))$ est identique et vaut également $1/2$. Ainsi
$$\lim_{k\to+\infty} y_k(t) = \frac{1}{2}.$$ 1

B. Une remarque

(1) Comme $y_0 = x_0$ et pour $k \geqslant 1, y_k = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k} x_j$, il vient, pour $k \geqslant 1$, $x_k = (k+1)y_k - ky_{k-1}$.

Donc, par le préliminaire,
$$|y_k - y_{k-1}| = \frac{1}{k+1}|x_k - y_{k-1}| \leqslant \frac{2\|x\|}{k+1}.$$ 2

(2) Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant N$ entraîne $|y_{k+1} - y_k| \leqslant \varepsilon$.
α étant une valeur d'adhérence, il existe $N_1 \geqslant N$ tel que $y_{N_1} < \gamma$ (en prenant une sous-suite convergeant vers α), de même (avec β) il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $y_{N_1+p} > \gamma$.
Soit $I = \{h \in [N_1, N_1+p] \mid y_h < \gamma\}$ alors, si $l = \max I$, on a $y_l < \gamma \leqslant y_{l+1}$ et $y_{l+1} - y_l \leqslant \varepsilon$ donc $|y_l - \gamma| \leqslant \varepsilon$. 4

On prend alors successivement $\varepsilon = 1$ d'où l'existence de l_1, puis $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, $N > l_1$ d'où l'existence de l_2, et par récurrence, si on suppose construit l_n tel que $|y_{l_n} - \gamma| \leqslant \dfrac{1}{n}$ alors, en prenant $N > l_n$, on a l'existence de l_{n+1} tel que $|y_{l_{n+1}} - \gamma| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Conclusion : γ est valeur d'adhérence de la suite (y_k).
On a donc la propriété suivante : A est un ensemble connexe de $\mathbb{R}$ (s'il contient deux points α et β, il contient le segment $[\alpha, \beta]$. A est bien un intervalle de $\mathbb{R}$. .... $\boxed{4}$

C. Suites à valeurs dans $\{0, 1\}$

(1) On a

$$\frac{u_p}{p!} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)} + \cdots + \frac{1}{p!}$$

et

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)} + \cdots + \frac{1}{p!} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{p-2}{p(p-1)} \sim \frac{2}{p}$$

ce qui montre que $u_p \sim p!$. .... $\boxed{3}$
De même

$$\frac{v_p}{(2p-1)!} = 1 + \frac{1}{(2p-1)(2p-2)} + \cdots + \frac{1}{(2p-1)!}$$

et

$$\frac{1}{(2p-1)(2p-2)} + \cdots + \frac{1}{(2p-1)!} \leqslant \frac{2p-1}{(2p-1)(2p-2)} \sim \frac{1}{2p}$$

ce qui montre que $v_p \sim (2p-1)!$. .... $\boxed{2}$

(2) On a

$$y_{u_p} = \frac{1}{u_p+1}\sum_{j=0}^{u_p} x_j = \frac{1}{u_p+1}(1! + 3! + \cdots)$$

donc

- si $p = 2j-1$, $\sum_{j=0}^{u_p} x_j = v_j + 1 = v_{\frac{p+1}{2}} + 1$,
- si $p = 2j$, $\sum_{j=0}^{u_p} x_j = v_j = v_{\frac{p}{2}} + 1$.

Ainsi

$$y_{u_p} = \begin{cases} \dfrac{v_j+1}{u_{2j-1}+1} & \text{si } p = 2j-1 \\ \dfrac{v_j+1}{u_{2j}+1} & \text{si } p = 2j \end{cases}$$ $\boxed{4}$

Dans le premier cas, $\lim\limits_{p\to+\infty} y_{u_p} = 1$, et dans le second cas $\lim\limits_{p\to+\infty} y_{u_p} = 0$.

(3) Comme, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant y_p \leqslant 1$, par la remarque précédente, l'ensemble des valeurs d''adhérence de la suite y est l'intervalle $[0, 1]$. Bien évidemment l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite x est $\{0, 1\}$. .... $\boxed{2}$

Partie II. Étude de l'endomorphisme T

A. Généralités

(1) L'application $\mathcal{T}$ est une bijection de $\mathcal{E}$, puisque si $y \in \mathcal{E}$, la suite x définie par

$$\begin{cases} x_0 &= y_0 \\ x_k &= (k+1)y_k - ky_{k-1},\ (k \geqslant 1) \end{cases}$$

vérifie $y = Tx$. .... $\boxed{2}$

(2) a) On sait que $(\mathcal{T} - \lambda I)(x) = y - \lambda x = u$. On a alors, pour tout $k \geqslant 0$

$$\begin{cases} u_0 &= (1-\lambda)x_0 \\ u_k &= \dfrac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} x_j - \lambda x_k \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} u_0 & = (1-\lambda)x_0 \\ (k+1)u_k - ku_{k-1} & = (1-\lambda(k+1))x_k - \lambda k x_{k-1} \end{cases}$$ 1

On peut définir x_0 par $\dfrac{u_0}{1-\lambda}$. Si l'on a défini $(x_0, \dots, x_{k-1})$, on pose

$$x_k = \frac{(k+1)u_k - ku_{k-1} + \lambda k x_{k-1}}{1-\lambda(k+1)}$$

ce qui est toujours possible puisque $\lambda \notin \mathcal{A}$. 3

b) Supposons que $\lambda = \dfrac{1}{k+1}$.

- $\mathcal{T} - \lambda I$ n'est pas surjective. En effet, les relations précédentes donnent

$$\begin{cases} x_{k-1} & = \dfrac{ku_{k-1} - (k-1)u_{k-2} + \lambda(k-1))x_{k-2}}{1-\lambda k} \\ (k+1)u_k - ku_{k-1} & = -\lambda k x_{k-1} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x_{k-1} & = \dfrac{ku_{k-1} - (k-1)u_{k-2} + \lambda(k-1))x_{k-2}}{1-\lambda k} \\ x_{k-1} & = \dfrac{(k+1)u_k - ku_{k-1}}{\lambda k} \end{cases}$$

ce qui entraîne que la suite u ne peut être quelconque. 4

- $\mathcal{T} - \lambda I$ n'est pas injective. En effet, posons $x_0 = x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0$. On a alors
  - pour $n \leqslant k-1$, $0 = \dfrac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} x_j = \dfrac{1}{k+1}x_n = 0$,
  - pour $n = k$, $\dfrac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} x_j = \dfrac{1}{k+1}x_k$,
  - pour $n > k$, $x_n = \sum_{j=k}^{n} x_j \left(\dfrac{1}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{k+1}}\right) = \sum_{j=k}^{n-1} x_j \dfrac{k-n}{(n+1)(k+1)}$.

  Ces relations permettent de définir une suite x non nulle à condition de prendre $x_k \neq 0$. 4

(3) Si $y \in \operatorname{Im} T$, il existe $x \in E$ tel que $y = Tx$. Donc, pour tout $k \geqslant 1$, $x_k = (k+1)y_k - ky_{k-1}$, ce qui entraîne qu'il existe une constante K telle que $|(k+1)y_k - ky_{k-1}| \leqslant K$. 1
Réciproquement , si l'on pose $x_0 = y_0$ et pour $k \geqslant 1$, $x_k = (k+1)y_k - ky_{k-1}$, la suite x est bornée et vérifie $Tx = y$. 2

(4) L'application T n'est pas surjective : en effet, il suffit de prendre $y_k = (-1)^k$, pour obtenir $|(k+1)y_k - ky_{k-1}| = 2k+1$. 2
L'application T est injective car c'est la restriction d'une application injective ! 2

B. Quelques suites auxiliaires

(1) Supposons que $\alpha_k = 0$. Alors, par définition de la suite α, $\alpha_{k-1} = 0$ et par récurrence $\alpha_0 = 0$: contradiction. 2

(2) On a

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} = \frac{1}{1 + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right)\dfrac{1}{k}}$$

donc

$$\ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}| = -\ln\left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{k}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2a}{k} + \frac{a^2+b^2}{k^2}\right) = -\frac{a}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$ 1

(3) Si $a < 0$ alors la série aux différences $\sum \ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}|$ est positive et divergente donc $\lim_{k\to+\infty} \ln|\alpha_k| \to +\infty$. . . . . $\boxed{2}$

(4) Écrivons $\ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}| = -\dfrac{a}{k} + w_k$, avec la série $\sum |w_k|$ convergente.
Quitte à modifier un nombre fini de termes, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n}(\ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}|) = -a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} w_k = -a\ln n - a\gamma + u_n + W_n$$

avec $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} W_n = W$.
Ainsi

$$\ln|\alpha_n| = \ln|\alpha_0| - a\gamma + u_n + W_n + \ln\left(\frac{1}{n^a}\right).$$

En composant par la fonction exponentielle, il existe une constante $A_1 > 0$ telle que pour n grand

$$|\alpha_n| \sim \frac{A_1}{n^a}. \qquad \boxed{4}$$

On remarquera que ce résultat reste valable quelque soit le signe de a.

(5) On sait que $|\alpha_{j-1}| \sim |\alpha_j|$ et que $|\alpha_j| \sim \dfrac{A_1}{j^a}$.

a) Vu que $\dfrac{1}{j|\alpha_{j-1}|} \sim A_1 j^{a-1}$ et que $a > 0$ alors la série $\sum \dfrac{1}{j|\alpha_{j-1}|}$ diverge donc, grâce au théorème de sommation des équivalents et à la comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j|\alpha_{j-1}|} \sim \sum_{j=1}^{k} A_1 j^{a-1} \sim A_1\int_0^k x^{a-1}\,\mathrm{d}x \sim \frac{A_1}{a}k^a$$

donc il existe A_2 tel que $\sum_{j=1}^{k}\dfrac{1}{j|\alpha_{j-1}|} \leqslant A_2 k^a$. . . . . $\boxed{4}$

b) Par les deux résultats précédents, il existe une constante A_3 telle que pour tout $k \geqslant 1$, $|\alpha_k U_k| \leqslant A_3$. . . . . $\boxed{1}$

(6) Posons $z = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$. On sait que $\alpha_j = \dfrac{1}{1+\dfrac{z}{j}}\alpha_{j-1}$. Donc

$$\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}} = \frac{z}{j\alpha_{j-1}}$$

et

$$\left|\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}\right| = |z|\frac{1}{j|\alpha_{j-1}|}.$$

Ainsi, pour tout $k \geqslant 1$

$$|\alpha_k V_k| \leqslant |z|\ |\alpha_k U_k| \leqslant A_4. \qquad \boxed{2}$$

C. Détermination du spectre de T

(1) On sait que T n'est pas surjective. Donc $0 \in \sigma(T)$. De même, $1 \in \sigma(T)$, car la suite $x = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, vérifie $Tx = x$. . . . . $\boxed{2}$

(2) La vérification demandée est (quasi) immédiate... On sait que

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_0 & = y_0 \\ \dfrac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} x_j - \lambda x_k & = y_k,\ (k \geqslant 1) \\ \dfrac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} x_j - \lambda x_{k-1} & = y_{k-1},\ (k \geqslant 2) \end{cases}$$

On s'aperçoit alors que

$$x_{k-1} + \frac{1}{\lambda}\left(y_{k-1} - y_k - \frac{1}{k}y_k\right) = \left[1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{k}\right] x_k. \quad \boxed{2}$$

(3) a) Un calcul donne

$$\begin{cases} x_0 &= \dfrac{1}{1-\lambda} \\ x_k &= \dfrac{x_{k-1}}{1+(1-\frac{1}{\lambda})\frac{1}{k}}, \ (k \geqslant 1) \end{cases}$$

La suite x est donc égale à la suite α. . . . . $\boxed{2}$

b) Si $a = \mathrm{Re}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) < 0$, on sait que $|x_k| \sim \dfrac{A_1}{k^a}$. La suite $|x|$ n'est pas bornée et y n'a pas d'antécédent dans E par $T - \lambda I$, qui n'est pas surjective. . . . . $\boxed{3}$

(4) a) Les définitions des suites α et x donnent immédiatement, pour tout $k \geqslant 1$

$$\frac{x_k}{\alpha_k} = \frac{x_{k-1}}{\alpha_{k-1}} + \frac{1}{\lambda}\frac{y_{k-1} - y_k}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\lambda}\frac{y_k}{k\alpha_{k-1}}.$$

La seconde relation s'obtient en sommant la relation précédente pour $1 \leqslant j \leqslant k$ et en s'apercevant que $\dfrac{x_0}{\alpha_0} = y_0$. . . . . $\boxed{2}$

b) Une transformation d'Abel montre que

$$\sum_{j=1}^{k}(y_{j-1} - y_j)\frac{1}{\alpha_{j-1}} = \sum_{j=1}^{k} y_j\left(\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}\right) + \frac{y_0}{\alpha_0} - \frac{y_k}{\alpha_k}. \quad \boxed{2}$$

On a alors

$$|x_k| \leqslant |\alpha_k y_0| + \frac{\|y\|}{|\lambda|}|\alpha_k V_k| + \left|\frac{\alpha_k y_0}{\lambda\alpha_0}\right| + \frac{\|y\|}{|\lambda|} + \frac{|\alpha_k U_k|}{|\lambda|}.$$

Les résultats obtenus sur les suites α, U, V permettent de conclure que $x \in E$. . . . . $\boxed{3}$

(5) Les deux dernières questions montrent que si $\mathrm{Re}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) < 0$, alors $\lambda \in \sigma(T)$ et que si $\mathrm{Re}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) > 0$, alors $\lambda \notin \sigma(T)$. . . . . $\boxed{2}$

Donc $\lambda \in \sigma(T)$ entraîne que $\mathrm{Re}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) \leqslant 0$. On admet également que $\sigma(T)$ est un fermé de $\mathbb{C}$. Ainsi

$$\sigma(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} | \ \mathrm{Re}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \leqslant 0\right\}. \quad \boxed{3}$$

On sait également que 0 et 1 appartiennent à $\sigma(T)$.

Posons $\lambda = a + ib \neq 0$, $\mathrm{Re}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) = \mathrm{Re}(1 - \dfrac{1}{a+ib}) = 1 - \dfrac{a}{a^2+b^2}$ d'où

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leqslant a$$

ce qui représente l'extérieur du disque ouvert centré en 1/2, de rayon 1/2. . . . . $\boxed{4}$