SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

On note (x,t) les coordonnées dans $\mathbb{R}^2$.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, pour toute fonction f de classe C^2 dans U, à valeurs complexes, on pose

$$L(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t}.$$

On rappelle qu'une fonction des variables (x,t) est de classe C^2 sur U ssi ses dérivées partielles du premier et du second ordre par rapport à x et t sont continues.
On note aussi $H(U)$ l'ensemble des fonctions f de classe C^2 dans U telles que $L(f)=0$. Pour tout nombre réel $T>0$, on définit les rectangles R_T et $\overline{R_T}$ par

$$R_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < T\}$$
$$\overline{R_T} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant t \leqslant T\}$$

On appelle C_T la réunion des trois côtés fermés de R_T :

$$C_T = \{0\}\times[0,T] \cup \{\pi\}\times[0,T] \cup [0,\pi]\times\{0\},$$

Λ_T désigne quant à lui le quatrième côté, ouvert à ses extrémités :

$$\Lambda_T =]0,\pi[\times\{T\}.$$

Il est vivement conseillé de faire une figure illustrative.

Partie I

I.1. Soient α et β deux nombres réels. À quelle condition la fonction $f(x,t) = e^{-\beta t}\sin \alpha x$ appartient-elle à $H(\mathbb{R}^2)$? Expliciter les valeurs de cette fonction sur C_T lorsque α est un entier.

I.2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ soit convergente.

Montrer que la fonction $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$ est continue.

I.3. Montrer qu'il existe une fonction Φ continue sur $\overline{R_T}$ que l'on exprimera sous forme d'une série, telle que

a. Φ est de classe C^2 dans R_T et $L(\Phi)=0$ dans R_T
b. $\Phi(0,t) = \Phi(\pi,t) = 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$
c. $\Phi(x,0) = \varphi(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

I.4. Montrer que la fonction Φ trouvée au **3** se prolonge en une fonction $\tilde{\Phi}$ définie et continue dans le demi-plan fermé $t \geqslant 0$, de classe C^2 dans le demi-plan ouvert $t>0$, telle que $L(\tilde{\Phi}) = 0$.

Partie II

Dans cette partie, $\mathcal{E}_T$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{R_T}$ à valeurs réelles, de classe C^2 dans R_T, et dont les dérivées d'ordre inférieur où égal à 2 se prolongent continûment à $R_T \cup \Lambda_T$.

II.1. Soit $f \in \mathcal{E}_T$ telle que $L(f) > 0$ sur $R_T \cup \Lambda_T$.
Montrer, en raisonnant par l'absurde, que f atteint son maximum sur C_T (si f atteint son maximum en $(x_0, t_0) \in \overline{R_T} \setminus C_T$ alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, t_0) > 0$ et on prouvera que ceci est impossible en considérant la fonction $g(x) = f(x, t_0)$).

II.2. Soit $f \in \mathcal{E}_T$ telle que $L(f) \geqslant 0$ sur $R_T \cup \Lambda_T$.
On suppose que f atteint son maximum en un point $(x_0, t_0) \notin C_T$ et on définit la fonction $f_\varepsilon(x, t) = f(x, t) + \varepsilon(x - x_0)^2$ avec $\varepsilon > 0$.

a. Montrer que f_ε atteint son maximum en $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in C_T$.
b. Avec un choix convenable de ε, en déduire une contradiction et conclure.

II.3. Soit g une fonction continue dans $\overline{R_T}$, à valeurs réelles. On suppose que g est nulle sur C_T, et que sa restriction à R_T appartient à $H(R_T)$.
Montrer que l'on a $g = 0$ (on pourra commencer par examiner la restriction de g aux rectangles $R_{T'}$, pour $T' < T$).

II.4. Montrer que la fonction à valeurs *complexes* Φ du **I.3** est la seule fonction continue sur $\overline{R_T}$ qui vérifie les propriétés a. b. c. de cette question.

Partie III

Pour tout nombre complexe z, on pose

$$e_z(x, t) = e(x, t, z) = \exp(zx + z^2 t).$$

III.1. Montrer que la fonction $e(x, t, z)$ admet un développement en série entière qui converge pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$e(x, t, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(x, t) \frac{z^n}{n!} \tag{1}$$

où $V_n(x, t) = n! \displaystyle\sum_{p+2q=n} \frac{x^p t^q}{p!q!}$ est un polynôme de x, t.
Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout $r > 0$:

$$V_n(x, t) = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(x, t, re^{i\theta}) r^{-n} e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta. \tag{2}$$

Dans toute la suite du problème, V_n désigne le polynôme défini par la relation (1).

III.2. Montrer que $L(V_n) = 0$ et exprimer $\dfrac{\partial V_n}{\partial x}$, $\dfrac{\partial V_n}{\partial t}$ en fonction de V_{n-1} et V_{n-2}.

III.3. Soient $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ deux nombres réels. Pour $r > 0$ on pose

$$f_r(\theta) = xr\cos\theta - tr^2\cos 2\theta = -2tr^2\cos^2\theta + xr\cos\theta + tr^2.$$

Montrer que $f_r(\theta) \leqslant \dfrac{x^2}{8t} + tr^2$ pour $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.
Calculer le minimum de la fonction

$$g(r) = r^{-n} \exp(tr^2), \quad r > 0.$$

III.4. Montrer que, pour tout entier $n > 0$, et pour tout $t > 0$:

$$|V_n(x, -t)| \leqslant n! \left(\frac{2et}{n}\right)^{n/2} \exp \frac{x^2}{8t}.$$

III.5. Montrer enfin que, pour $t > 0$:

$$V_{2n}(x,t) \geqslant \frac{(2n)!}{n!} t^n, \quad |V_{2n+1}(x,t)| \geqslant |x| \frac{(2n+1)!}{n!} t^n.$$

Partie IV

Dans cette partie, on pourra admettre sans démonstration, le résultat suivant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} \mathrm{d}r = \sqrt{\pi},$$

et on rappelle que $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ au voisinage de $+\infty$.

IV.1. Soit (x_0, t_0) un point de $\mathbb{R}^2$ tel que $x_0 \neq 0$, $t_0 > 0$, et soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum a_n V_n(x_0, t_0)$ soit convergente.

Montrer que la suite $\left(\dfrac{2nt_0}{e}\right)^{n/2} a_n$ est bornée (distinguer les cas n pair et n impair et utiliser le **III.5**).

IV.2. Soit U_- la bande ouverte $U_- = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid -t_0 < t < 0\}$.
Montrer qu'avec les hypothèses du **IV.1**, la série

(S) $$\sum_{n \geqslant 0} a_n V_n(x,t)$$

converge absolument dans U_-, et que sa somme appartient à $H(U_-)$.

On se propose de montrer que la série (S) converge en fait dans toute la bande ouverte $U = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad |t| < t_0\}$.

IV.3. On pose, pour $t > 0$, $k(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \exp \dfrac{-x^2}{4t}$. Montrer que, pour z réel, $y \mapsto k(x-y,t)e^{yz}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y,t) e^{yz} \mathrm{d}y = C \exp(zx + z^2 t)$$

où C est une constante que l'on calculera.

IV.4. Question 5/2 : prouver que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y,t) y^n \mathrm{d}y = C V_n(x,t).$$

IV.5. Montrer que $y \mapsto k(x-y,t)e^{Ay^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour $t \in]0, T_A[$ où T_A est un nombre qu'on exprimera en fonction de A. Calculer l'intégrale :

$$F_A(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y,t)e^{Ay^2}\mathrm{d}y \text{ où } A > 0.$$

IV.6. Calculer le nombre

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |y^n e^{-Ay^2}|.$$

Montrer que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\delta > 0$:

$$|V_n(x,t)| \leqslant V_n(|x|,|t|) \leqslant \left(\frac{2n}{e}\right)^{n/2} \frac{(|t|+\delta)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\delta}} \exp\left(\frac{x^2}{4\delta}\right).$$

Montrer que, sous l'hypothèse du **IV.1**, la série (S) converge dans la bande U et que sa somme appartient à $H(U)$.

IV.7. Montrer que l'on définir une notion de bande de convergence pour les séries du type (S) au même titre qu'on a pu définir la notion de disque de convergence pour une série entière. Exprimer à l'aide de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la largeur de cette bande.