SPÉCIALE M' : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

Partie I $\boxed{17}$

I.1. Avec $f(x,t)=e^{-\beta t}\sin\alpha x\ :\ f\in \mathrm{H}(\mathbb{R}^2)\Leftrightarrow \begin{cases}\beta=\alpha^2\\ \alpha=0\end{cases}$; .... $\boxed{2}$

posons ensuite $\alpha=n, \beta=n^2$:
sur C_T : $f(0,t)=0, f(\pi,t)=0$ et pour $x\in[0,\pi]$: $f(x,0)=\sin nx$.................. $\boxed{1}$

I.2. Comme $|a_n\sin nx|\leqslant |a_n|$ il y a convergence normale de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\sin nx$. Vu que $x\mapsto a_n\sin nx$ est continue alors ϕ est continue... $\boxed{3}$

I.3. On prend $\displaystyle\Phi(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_ne^{-n^2t}\sin nx$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_ne^{-n^2t}\sin nx$ est normalement convergente sur $\overline{\mathrm{R}}_T$ donc Φ est continue par rapport à x et t. .... $\boxed{3}$

a. On pose $\varphi_n(x,t)=a_ne^{-n^2t}\sin nx$, et on a

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}=-n^2a_ne^{-n^2t}\sin nx,\ \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial t^2}=n^4a_ne^{-n^2t}\sin nx,\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x}=na_ne^{-n^2t}\cos nx,$$
$$\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2}=-n^2a_ne^{-n^2t}\sin nx,\ \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial t\partial x}=-n^3a_ne^{-n^2t}\cos nx.$$

$\forall a>0$, $t>a$ et $x\in[0,\pi]$, on a la majoration

$$|\pm n^ka_ne^{-n^2t}\sin(nx+l\pi/2)|\leqslant n^ke^{-n^2a}|a_n|$$

or la série $\sum n^ke^{-n^2a}$ converge ($n^2n^ke^{-n^2a}\to 0$) donc les séries des dérivées partielles convergent normalement pour $t>a$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t},\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial t}$$

existent et sont continues pour $t>a, x\in[0,\pi]$ et par conséquent Φ est de classe C^2 sur cet ensemble et ceci quelque soit $a>0\Rightarrow\Phi$ est de classe C^2 sur R_T......... $\boxed{5}$

On vérifie aisément alors que $\mathrm{L}(\Phi)=0$ sur R_T. .... $\boxed{1}$

b. Il est alors immédiat que : $\Phi(0,t)=\Phi(\pi,t)=0$.

c. De même pour $\Phi(x,0)=\phi(x)$.

I.4. Le raisonnement fait ci-dessus n'utilise pas la borne T :

$$\tilde\Phi(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_ne^{-n^2t}\sin nx$$

prolonge donc $\Phi(x,t)$ sur le 1/2 plan $t\geqslant 0$... $\boxed{2}$

Partie II $\boxed{21}$

II.1. Comme f est continue, elle atteint son maximum en un point (x_0, t_0) de $\overline{\mathrm{R}}$. . . . . $\boxed{2}$

Supposons $x_0 \in]0, \pi[, t_0 \in]0, T]$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x_0, t_0) \geqslant 0$ (nul si $t < T$) et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, t_0) > 0$ ce qui est impossible (dans ce cas en effet, on a un minimum local) donc f atteint son maximum sur C_T. . . . . $\boxed{4}$

II.2. a. On suppose donc, comme au **1**, que f atteint son maximum en $(x_0, t_0) \notin \mathrm{C}_T$ alors f_ε vérifie les hypothèses du **1** ($L(f_\varepsilon) = L(f) + 2\varepsilon \geqslant 2\varepsilon$). f_ε atteint alors son maximum en $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \mathrm{C}_T$. . . . . $\boxed{2}$

b. On aura alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$f_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) > f_\varepsilon(x_0, t_0) = f(x_0, t_0) \text{ i.e. } f(x_0, t_0) - f(x_\varepsilon, t_\varepsilon) < \varepsilon(x_\varepsilon - x_0)^2.$$

Or on sait par hypothèse que $f(x_0, t_0) > \sup\limits_{(x,t)\in \mathrm{C}_T} f(x, t) = f(x_1, t_1)$ (car C_T est compact). On en déduit que

$$f(x_0, t_0) < f(x_\varepsilon, t_\varepsilon) + \varepsilon\pi^2 \leqslant f(x_1, t_1) + \varepsilon\pi^2$$

ce qui est impossible dès que $\varepsilon < \dfrac{1}{\pi^2}[f(x_0, t_0) - f(x_1, t_1)]$. . . . . $\boxed{5}$

II.3. $f = g_{|\mathrm{R}_{T'}}$ vérifie les hypothèses du **2** or $L(g) = 0 \Rightarrow f$ atteint son maximum sur $\mathrm{C}_{T'}$ qui est nul par hypothèse donc $g \leqslant 0$ sur $\overline{\mathrm{R}}_{T'}$. . . . . $\boxed{2}$

On procède de même avec $-g$ donc $g = 0$ sur $\overline{\mathrm{R}}_{T'}$ et par continuité, $g = 0$ sur $\overline{\mathrm{R}}_T$. . . . $\boxed{2}$

II.4. Soit Φ_1 une fonction qui vérifie les propriétés a,b,c du I - 3 alors $\Phi - \Phi_1 = f + ig$ où f et g sont à valeurs réelles : f et g vérifient les hypothèses du **3**, elles sont donc nulles . . $\boxed{3}$
(1 point seulement si on fait le raisonnement avec les fonctions réelles.)

Partie III $\boxed{21}$

III.1. On a $e_z(x, t) = e^{zx}e^{z^2t} = \left(\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p z^p}{p!}\right)\left(\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{t^q z^{2q}}{q!}\right)$. On peut effectuer le produit de Cauchy des 2 séries entières sur $\mathbb{C}$ car le rayon de chacune d'elle est infini :

$$e_z(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(x, t)\frac{z^n}{n!} \qquad \boxed{3}$$

avec $V_n(x, t) = n! \displaystyle\sum_{p+2q=n} \frac{x^p t^q}{p!q!}$.

On écrit $e(x, t, re^{i\theta}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} V_n(x, t)\frac{r^n e^{in\theta}}{n!}$; x, t et r fixés, la série est normalement convergente pour $\theta \in [0, 2\pi]$, on peut donc intégrer terme à terme l'expression : $e(x, t, re^{i\theta})r^{-n}e^{-ni\theta}$ d'où le résultat demandé. . . . . $\boxed{3}$

Remarque : on peut aussi utiliser un développement en série de Fourier.

III.2. Les fonctions

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e(x,t,re^{i\theta})r^{-n}e^{-ni\theta}\right],\ \frac{\partial}{\partial x}\left[e(x,t,re^{i\theta})r^{-n}e^{-ni\theta}\right],\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[e(x,t,re^{i\theta})r^{-n}e^{-ni\theta}\right]$$

sont continues pour $(x,t)\in\mathbb{R}^2, \theta\in[0,2\pi]$, on peut dériver sous le signe $\int$. La relation $\mathrm{L}(V_n)=0$ est alors immédiate. .... $\boxed{2}$
Pour $n \geqslant$ on vérifie que :

$$\frac{\partial V_n}{\partial x}=nV_{n-1},\ \frac{\partial V_n}{\partial t}=n(n-1)V_{n-2}.$$ $\boxed{2}$

III.3. $f_r(\theta)=-2tr^2\cos^2\theta+xr\cos\theta+tr^2$ est un polynôme du $2^{\text{ième}}$ degré en $\cos\theta$ qui s'écrit

$$-2tr^2\cos^2\theta+xr\cos\theta+tr^2=tr^2+\frac{x^2}{8t}-2t\left(r\cos\theta-\frac{x}{4t}\right)^2$$

donc $f_r(\theta)\leqslant\dfrac{x^2}{8t}+tr^2$. .... $\boxed{2}$
Par une étude de fonction élémentaire, on trouve : $\inf\limits_{r>0} g(r)=\left(\dfrac{2et}{n}\right)^{n/2}$ (obtenu pour $r=\sqrt{\dfrac{n}{2t}}$). .... $\boxed{1}$

III.4. Pour tout $r>0$, on a d'une part :

$$|V_n(x,-t)|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{f_r(\theta)}r^{-n}\mathrm{d}\theta.$$

D'autre part, $f_r(\theta)\leqslant\dfrac{x^2}{8t}+tr^2$ donc : $|V_n(x,-t)|\leqslant n!e^{x^2/8t}g(r)$ (pour tout $r>0$); .... $\boxed{3}$
L'inégalité est vérifiée en particulier pour $r=\sqrt{\dfrac{n}{2t}}$ donc

$$|V_n(x,-t)|\leqslant n!e^{x^2/8t}\left(\frac{2et}{n}\right)^{n/2}.$$ $\boxed{2}$

III.5. $V_{2n}(x,t)=(2n)!\displaystyle\sum_{p+2q=2n}\frac{x^pt^q}{p!q!}=\frac{(2n)!}{n!}t^n+(2n)!\sum_{p+2q=2n,p\geqslant 1}\frac{x^pt^q}{p!q!}$ mais la $2^{\text{ième}}$ quantité est positive car x est élevé à une puissance paire, donc

$$V_{2n}(x,t)\geqslant\frac{(2n)!}{n!}t^n.$$ $\boxed{3}$

Le même genre de raisonnement s'applique pour montrer que :

$$|V_{2n+1}(x,t)|\geqslant|x|\frac{(2n+1)!}{n!}t^n.$$ $\boxed{1}$

PARTIE IV $\boxed{44}$

IV.1. Comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n V_n(x_0,t_0)$ est convergente, la suite $|a_n V_n(x_0,t_0)|$ est bornée par M.

On a alors

- Si $n = 2p$:

$$M \geqslant |a_{2p}V_{2p}(x_0,t_0)| \geqslant |a_{2p}|\frac{(2p)!}{p!}t_0^p \Rightarrow |a_{2p}|\left(\frac{4pt_0}{e}\right)^p \leqslant M\frac{p!}{(2p)!}\left(\frac{4p}{e}\right)^p$$

or $\dfrac{p!}{(2p)!} \sim \dfrac{(p/e)^p\sqrt{2\pi p}}{(2p/e)^{2p}\sqrt{4\pi p}} = \left(\dfrac{e}{4p}\right)^p \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\dfrac{p!}{(2p)!}\left(\dfrac{4p}{e}\right)^p \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et par conséquent $|a_{2p}|\left(\dfrac{4pt_0}{e}\right)^p$ est majoré. . . . . $\boxed{2}$

- Si $n = 2p+1$:

$$|a_{2p+1}| \leqslant \frac{M}{|x|t_0^p}\frac{p!}{(2p+1)!}$$

et le **III.5** implique :

$$|a_{2p+1}|\left(\frac{2(2p+1)t_0}{e}\right)^{\frac{2p+1}{2}} \leqslant \frac{Mt_0^{1/2}}{|x|}A_p \text{ où } A_p = \left[\frac{2(2p+1)}{e}\right]^{\frac{2p+1}{2}}\frac{p!}{(2p+1)!}.$$

Cherchons l'équivalent de A_p :

$$\begin{aligned} A_p &\sim 2^{\frac{2p+1}{2}}\left(\frac{2p+1}{e}\right)^{\frac{2p+1}{2}}\frac{(p/e)^p\sqrt{2\pi p}}{((2p+1)/e)^{2p+1}\sqrt{2\pi(2p+1)}} \\ &\sim \frac{(2p)^p}{(2p+1)^p}\sqrt{\frac{e}{2p+1}} \leqslant \sqrt{\frac{e}{2p+1}}. \end{aligned}$$

A_p tendant vers 0, la suite $|a_{2p+1}|\left(\dfrac{2(2p+1)t_0}{e}\right)^{\frac{2p+1}{2}}$ est bornée c.q.f.d. . . . . $\boxed{3}$

IV.2. Si on appelle K un majorant de $\left(\dfrac{2nt_0}{e}\right)^{n/2} a_n$ alors :

$$\begin{aligned} |a_nV_n(x,t)| &\leqslant |a_n|\left(\frac{2e|t|}{n}\right)^{n/2} n!\exp\left(\frac{x^2}{8|t|}\right) \quad (\textbf{III.4}) \\ &\leqslant K\left(\frac{e}{2nt_0}\right)^{n/2} n!\exp\left(\frac{x^2}{8|t|}\right)\left(\frac{2e|t|}{n}\right)^{n/2} \\ &\leqslant Kn!\left(\frac{e}{n}\right)^n\left(\frac{|t|}{t_0}\right)^{n/2}\exp\left(\frac{x^2}{8|t|}\right) \sim K\sqrt{2\pi n}\left(\frac{|t|}{t_0}\right)^{n/2}\exp\left(\frac{x^2}{8|t|}\right) = \alpha_n \end{aligned}$$

La régle de d'Alembert permet d'affirmer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n$ converge donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nV_n(x,t)$ converge absolument dans U_-. . . . . $\boxed{4}$

Montrons que : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nV_n(x,t) \in \mathrm{H}(U^-)$

On a

$$n|V_{n-1}(x,t)| \leqslant n!\left(\frac{2e|t|}{n}\right)^{n/2}\exp\left(\frac{x^2}{8|t|}\right)\left(\frac{n-1}{2e|t|}\right)^{1/2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

d'où : $a_n n|V_{n-1}(x,t)| \leqslant K'n\left(\dfrac{|t|}{t_0}\right)^{n/2}$ et pour $-t_0 < -a \leqslant t < 0$ la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\partial V_n}{\partial x}(x,t)$ converge normalement ; on démontrerait de même qu'il y a convergence normale des séries de terme général

$$a_n \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}(x,t), a_n \frac{\partial V_n}{\partial t}(x,t), a_n \frac{\partial^2 V_n}{\partial t^2}(x,t) a_n \frac{\partial^2 V_n}{\partial x \partial t}(x,t)$$

pour en conclure que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n V_n(x,t) \in \mathrm{H}(U^-).$$ 4

IV.3. Calculons $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} e^{yz} \mathrm{d}y$ (intégrale convergente car $y^2 k(x-y,t)e^{yz} \to 0$). 1

Posons $u = \dfrac{y-x}{2\sqrt{t}}$, $\mathrm{d}y = 2\sqrt{t}\mathrm{d}u$, $yz = 2\sqrt{t}zu + xz$ alors :

$$I = 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+2\sqrt{t}zu+xz}\mathrm{d}u = 2e^{xz+tz^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-\sqrt{t}z)^2}\mathrm{d}u = 2\sqrt{\pi}e^{zx+z^2t}$$

soit $C = 2\sqrt{\pi}$. 2

IV.4. Il suffit de développer en série entière les 2 fonctions de z écrites dans l'égalité ci-dessus et d'utiliser l'unicité d'un D.S.E. :

Soit $a > 0$ et $f(y,z) = k(x-y,t)e^{yz} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, pour $|z| < a$:

- $|f(y,z)| \leqslant k(x-y,t)e^{|y|a} = \varphi(y)$ où φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
- $\left|\dfrac{\partial f}{\partial z}(y,z)\right| = |yk(x-y,t)e^{yz}| \leqslant |y|k(x-y,t)e^{|y|a} = \psi(y)$ où ψ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

On peut alors appliquer le théorème de Lebesgue de dérivation sous le signe intégral (cf. *théorème 6.52 page 270* à la fonction $F(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y,t)e^{yz}\mathrm{d}y$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.

F est même indéfiniment dérivable (en faisant le même genre de raisonnement) avec $F^{(n)}(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y^n k(y-x,t)e^{zy}\mathrm{d}y$.

En écrivant d'autre part le développement en série entière de $F(z) = \exp(zx+z^2t)2\sqrt{\pi}$ on a : $F^{(n)}(0) = 2\sqrt{\pi}V_n(x,t)$ c.q.f.d. 5

IV.5. $y \mapsto k(x-y,t)e^{Ay^2} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\exp\left[-\dfrac{y^2(1-4At)-2xy+x^2}{4t}\right]$ est intégrable pour $t \in]0, T_A[$ avec $T_A = \dfrac{1}{4A}$. 2

$$F_A(x,t) = \frac{2}{\sqrt{1-4At}}\exp\frac{Ax^2}{1-4At}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(\sqrt{1-4At}y - \sqrt{A}x/\sqrt{1-4At})^2}{4t}\right]\frac{\sqrt{1-4At}}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}y$$

d'où $F_A(x,t) = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-4At}}\exp\dfrac{x^2A}{1-4At}$ en faisant un changement de variable dans la dernière intégrale. 4

IV.6. La fonction $g_n(y) = y^n e^{-Ay^2}$ est paire ou impaire, il suffit donc de l'étudier sur $[0, +\infty[$ pour déterminer $\sup_{y\in\mathbb{R}} |g_n(y)|$.

Après calculs et un tableau de variations, on obtient :

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |g_n(y)| = \left(\frac{n}{2eA}\right)^{n/2}. \qquad \boxed{1}$$

Comme V_n est un polynôme en x et t dont les coefficients positifs, on obtient alors : $|V_n(x,t)| \leqslant V_n(|x|,|t|)$. . . . . $\boxed{1}$

Supposons alors x et t positifs :

$$\begin{aligned} V_n(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y,t)y^n\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y,t)|y|^n\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{n}{2eA}\right)^{n/2} F_A(x,t) \leqslant \left(\frac{n}{2eA}\right)^{n/2}\frac{1}{\sqrt{1-4At}}\exp\frac{Ax^2}{1-4At} \end{aligned}$$

et on pose $\delta = \dfrac{1-4At}{4A} > 0$ (lorsque $A \in]0, \frac{1}{4t}[$, $\delta \in]0, +\infty[$), donc

$$V_n(x,t) \leqslant \left(\frac{2n}{e}\right)^{n/2}\frac{(t+\delta)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\delta}}\exp\frac{x^2}{4\delta}. \qquad \boxed{4}$$

Pour terminer, on choisit $\delta > 0$ tel que $|t| + \delta < t_0$ et on a

$$|a_nV_n| \leqslant K\left(\frac{e}{2nt_0}\right)^{n/2}\left(\frac{2n}{e}\right)^{n/2}(|t|+\delta)^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\delta}}\exp\frac{x^2}{4\delta} = K\left(\frac{|t|+\delta}{t_0}\right)^{n/2}\left(\frac{|t|+\delta}{\delta}\right)^{1/2}\exp\frac{x^2}{4\delta}$$

(en utilisant la majoration de a_n du **IV.1**). Or le dernier terme est le terme général d'une série convergente. . . . . $\boxed{2}$

De même les séries de terme général :

$$a_nnV_{n-1}, a_nn(n-1)V_{n-2}, a_nn(n-1)(n-2)V_{n-3},\ a_nn(n-1)(n-2)(n-3)V_{n-4}$$

sont normalement convergentes sur $[-a, +a]$ où $a < t_0$ donc on peut conclure que la somme de la série est de classe $\mathcal{C}^2$ dans U et qu'elle appartient à $H(U)$. . . . . $\boxed{2}$

IV.7. On pourra effectivement définir la notion de bande de convergence pour les séries du type (S) en cherchant la plus grande valeur de t_0 telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nV_n(x,t_0)$ converge, sa somme appartenant à $\mathrm{H}(U)$. . . . . $\boxed{2}$

Pour calculer la largeur de cette bande, on remarque que la propriété qui nous a effectivement servi dans ce **IV** est que $\exists M\ :\ \left(\dfrac{2nt_0}{e}\right)^{n/2} a_n \leqslant M$ d'où l'idée de prendre

$$t_0 = \inf_{n\in\mathbb{N}, a_n\neq 0}\frac{e}{2n}\left(\frac{1}{a_n}\right)^{2/n} \qquad \boxed{5}$$

(cette quantité est la même que $\inf_{n\in\mathbb{N}, a_n\neq 0}\dfrac{e}{2n}\left(\dfrac{M}{a_n}\right)^{2/n}$ car $\lim_{n\to+\infty} M^{2/n} = 1$).