

## SPÉCIALE MP\* : DEVOIR SURVEILLÉ

On désigne par  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices à  $p$  lignes et  $q$  colonnes dont les coefficients sont des nombres complexes. Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$  on note  $A^T$  la matrice transposée de  $A$ ,  $\overline{A}$  la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de la matrice  $A$  et  $\text{Rg}(A)$  le rang de  $A$ .

On fixe un entier  $n \geq 2$  et on considère  $V = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ,  $E = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$  munis des opérations usuelles. Les vecteurs nuls sont notés respectivement  $0_V$  et  $0_E$  ou  $0$  s'il n'y a pas de confusion possible.

L'espace vectoriel  $V$  admet pour base canonique

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour  $(k, m) \in [1, n]^2$  on pose  $E_{k,m} = e_k e_m^T$  ce qui donne une matrice à  $n$  lignes et  $n$  colonnes dont le coefficient d'indice  $(i, j)$  vaut 1 si  $(i, j) = (k, m)$  et 0 sinon. La base canonique de  $E$  est constituée des  $n^2$  matrices  $E_{k,m}$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq m \leq n$ . On note  $I$  la matrice identité,

$$I = \sum_{k=1}^n E_{k,k}.$$

Si  $A$  est une matrice élément de  $E$  et  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ ,  $A(W)$  désigne l'ensemble  $\{Aw \mid w \in W\}$ .

Si  $F$  est un sous-ensemble de  $E$ , on dit que  $W$  est stable par  $F$  si

$$\forall A \in F, A(W) \subset W.$$

Pour tout ensemble  $\mathcal{L}$  de  $E$  on s'intéresse aux propriétés suivantes :

- P<sub>1</sub> :  $\mathcal{L}$  contient (au moins) une matrice de rang 1,
- P<sub>2</sub> :  $\mathcal{L}$  contient (au moins) une matrice de rang  $n$ ,
- P<sub>3</sub> :  $\mathcal{L}$  contient  $I$ ,
- P<sub>4</sub> :  $\mathcal{L}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,
- P<sub>5</sub> :  $\mathcal{L}$  est stable par produit de matrices :  $(A, B) \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow AB \in \mathcal{L}$ ,
- P<sub>6</sub> : si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par  $\mathcal{L}$  alors soit  $W = \{0_V\}$  soit  $W = V$ .

### PREMIÈRE PARTIE : ÉTUDE DE QUELQUES EXEMPLES

**I.1.** Dans cette question  $\mathcal{L}$  désigne l'ensemble des matrices  $A$  de  $E$  inversibles :  $\mathcal{L} = \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

**a.** Soit  $x$  un vecteur non nul de  $V$ . Montrer que, pour tout vecteur  $y$  non nul de  $V$ , il existe une matrice inversible  $A$  telle que  $Ax = y$ .

*Indication* : on peut considérer 2 cas

- la famille  $(x, y)$  est liée,
- la famille  $(x, y)$  est libre.

En déduire que la propriété P<sub>6</sub> est vérifiée par  $\mathcal{L}$ .

**b.** Indiquer celles des propriétés P<sub>1</sub>, ..., P<sub>5</sub> qui sont vérifiées par  $\mathcal{L}$  ; justifier les réponses.

**I.2.** Dans cette question  $\mathcal{L}$  désigne l'ensemble des matrices  $T = (t_{k,m}) \in E$  qui sont triangulaires inférieures, c'est à dire telles que

$$m > k \Rightarrow t_{k,m} = 0.$$

- a. Montrer que  $e_n$  est un vecteur propre de tout  $T \in \mathcal{L}$  (i.e. il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  dépendant de  $T$  tel que  $Te_n = \lambda e_n$ ). Que peut-on dire de la propriété  $P_6$  pour  $\mathcal{L}$  ?
- b. Indiquer celles des propriétés  $P_1, \dots, P_5$  qui sont vérifiées par  $\mathcal{L}$  ; justifier les réponses.
- I.3.** Dans cette question  $n = 2$  et  $\mathcal{L}$  est un sous-ensemble de  $E$  pour lequel  $P_3$  et  $P_4$  sont vérifiées.
- a. On suppose que  $P_1$  n'est pas vérifiée par  $\mathcal{L}$ . Soit  $A \in \mathcal{L}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ .  
Quelles sont les valeurs possibles du rang de  $A - \lambda I$  ?  
Montrer que  $\mathcal{L}$  est l'ensemble des homothéties vectorielles.
- b. On suppose que  $P_6$  est vérifiée par  $\mathcal{L}$ . Montrer qu'alors la propriété  $P_1$  est vérifiée par  $\mathcal{L}$ .

**Dans toute la suite du problème,  $P_4$  et  $P_5$  sont supposées vérifiées.**

#### DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, les propriétés  $P_3$  et  $P_6$  sont supposées vérifiées par  $\mathcal{L}$  (en plus de  $P_4$  et  $P_5$ ). On veut montrer qu'alors  $P_1$  est aussi vérifiée.

On note

$$m = \min\{\text{Rg}(M) \mid M \in \mathcal{L} \setminus \{0_E\}\},$$

et on se propose de montrer que  $m = 1$ , ce qui établira  $P_1$ .

On suppose dans un premier temps que  $m \geq 2$ .

**II.1.** Montrer que  $m$  est bien défini et qu'il existe une matrice  $M_0 \in \mathcal{L}$  telle que  $\text{Rg}(M_0) = m$ .

On considère une base  $(z_i)_{1 \leq i \leq m}$  de  $M_0(V)$ . On note  $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$  des éléments de  $V$  tels que  $\forall i \in [1, m], M_0 x_i = z_i$ .

**II.2. a.** Montrer que  $\{Nz_1 \mid N \in \mathcal{L}\} = V$ .

On note alors  $N_0$  un élément de  $\mathcal{L}$  qui vérifie  $N_0 z_1 = x_2$  et on pose  $M_1 = M_0 N_0 M_0$ .

**b.** Montrer que  $(M_0, M_1)$  est une famille libre.

**II.3. a.** Montrer que  $M_0(V)$  est stable par  $M_0 N_0$  puis que

$$\exists (\alpha, z) \in \mathbb{C} \times M_0(V) \text{ tels que } z \neq 0_V \text{ et } M_0 N_0 z = \alpha z.$$

**b.** En déduire que  $0 < \text{Rg}(M_1 - \alpha M_0) < \text{Rg}(M_0)$ .

**c.** Conclure.

#### TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie on suppose que  $n > 2$  et que la dimension de  $\mathcal{L}$  est supérieure ou égale à  $n^2 - 1$ . On veut montrer que  $P_3$  et  $P_6$  sont vérifiées puis que  $\mathcal{L} = E$ , c'est à dire qu'il n'existe pas d'hyperplan de  $E$  stable par produit matriciel.

**III.1.** Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par  $\mathcal{L}$  ; on note  $k$  la dimension de  $W$ .

**a.** Montrer que  $\mathcal{K} = \{M \in E \mid M(W) \subset W\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $\mathcal{L}$ .

**b.** Donner la dimension de  $\mathcal{K}$ .

**c.** En déduire que  $W = \{0_V\}$  ou  $W = V$ .

*Remarque :* on a donc démontré  $P_6$ .

**III.2. a.** On suppose dans cette question que

$$\exists(k, m) \in [1, n]^2, k \neq m \text{ tels que } E_{k,m} \in E \setminus \mathcal{L}. \quad (*)$$

On note alors  $\mathcal{H} = \text{Vect}(E_{k,m}, I)$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $E_{k,m}$  et  $I$ .

Montrer que  $\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \geq 1$  puis que  $\mathcal{L}$  contient une matrice inversible.

**b.** On suppose ici que c'est le contraire de (\*) qui est vrai.

Montrer que  $\mathcal{L}$  contient une matrice inversible.

**III.3. a.** Montrer que, pour toute matrice  $A$  de  $E$ , la famille  $(A, A^2, \dots, A^{n^2+1})$  est une famille liée.

**b.** Prouver que  $P_3$  est vérifiée.

**c.** En déduire qu'il existe une matrice  $M_0$  de rang 1 qui appartient à  $\mathcal{L}$  et montrer qu'il existe  $(v_0, w_0) \in (V \setminus \{0_V\})^2$  tels que  $M_0 = v_0 \overline{w_0}^T$ .

**III.4.** Pour tout vecteur  $v \in V$  on pose

$$A_v = \{Lv \mid L \in \mathcal{L}\}, \quad B_v = \{\overline{L}^T v \mid L \in \mathcal{L}\}, \quad C_v = \{w \in V \mid \forall x \in B_v, \overline{x}^T w = 0\}.$$

**a.** Soit  $u \in V, u \neq 0_V$ . Montrer que  $C_u$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable par  $\mathcal{L}$  et que  $B_u$  n'est pas réduit à  $\{0_V\}$ .

**b.** En déduire que  $C_u = \{0_V\}$  et que  $B_u = V$ .

**c.** Montrer que  $A_u = V$ .

**d.** Déduire de ce qui précède que toute matrice de rang 1 appartient à  $\mathcal{L}$ .

**e.** Conclure.