CENTRALE 2001 PC II

Première partie $\boxed{29}$

I.1. **a.**
- Si x et y sont non nuls et liés alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $y = \lambda x$. Il suffit alors de prendre $A = \lambda I \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ car $\lambda \neq 0$. .... $\boxed{2}$
- Si la famille (x, y) est libre alors on peut la compléter en une base de V : $(x, y, e_3, \ldots, e_n)$. On prend pour A la matrice de l'endomorphisme f défini par $f(x) = y$, $f(y) = x$, $f(e_i) = e_i$ qui transforme une base en une base. A est bien inversible. .... $\boxed{3}$

Remarque : on pouvait directement compléter les familles à un élément (x) et (y) en deux bases et prendre pour A la matrice de passage.

Propriété P_6 : si W est stable par $\mathcal{L}$, on distingue deux cas
- $W = \{0_V\}$,
- $W \neq \{0_V\}$ donc $\exists x \neq 0$ tel que $x \in W$. Pour tout $y \in V \setminus \{0_V\}$ on sait qu'il existe $A \in \mathcal{L}$ tel que $Ax = y$ et par hypothèse $Ax \in W$ donc $y \in W$. Comme $0_V \in W$ on peut effectivement conclure que $W = V$. .... $\boxed{3}$

b.
- P_1 non vérifiée : $n \geqslant 2$ et toutes les matrices de $\mathcal{L}$ sont de rang n.
- P_2 et P_3 sont vérifiées : $I \in \mathcal{L}$ est bien de rang n.
- P_4 n'est pas vérifiée : $0_E \notin \mathcal{L}$.
- P_5 est vérifiée : en effet le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible. .... $\boxed{4}$

I.2. **a.** On a immédiatement $Te_n = t_{n,n}e_n$ et par conséquent e_n est bien vecteur propre de T pour tout $T \in \mathcal{L}$. .... $\boxed{2}$

L'espace $W = \mathrm{Vect}(e_n)$ est un sous-espace stable par $\mathcal{L}$ et $W \neq \{0_V\}$ ainsi que $W \neq V$ donc la propriété P_6 n'est pas vérifiée. .... $\boxed{2}$

b. L'ensemble des matrices triangulaires inférieures est une algèbre d'élément unité I inversible ce qui permet d'avoir immédiatement les propriétés P_i pour i allant de 2 à 5.

Comme $E_{1,1} \in \mathcal{L}$ alors la propriété P_1 est aussi vérifiée. .... $\boxed{3}$

I.3. **a.** $\mathcal{L}$ étant une algèbre contenant I et A alors $A - \lambda I \in \mathcal{L}$. Les valeurs possibles du rang de $A - \lambda I$ sont donc 0 et 2. .... $\boxed{2}$

$\det(A - \lambda I)$ est un polynôme non nul à coefficients complexes, il admet donc une racine. Soit λ cette valeur, $A - \lambda I$ est de rang inférieur ou égal à 1, donc de rang nul soit $A = \lambda I$. .... $\boxed{4}$

On vient de prouver que $\mathcal{L}$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{H}$ des homothéties vectorielles. L'inclusion $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ étant évidente, on peut conclure : $\mathcal{L} = \mathcal{H}$. .... $\boxed{1}$

b. On procède par contraposée : si P_1 n'est pas vérifiée par $\mathcal{L}$ alors, vu le résultat de la question précédente, $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ et dans ce cas $\mathcal{L}$ ne vérifie pas P_6.

Conclusion : $\mathrm{P}_6 \Rightarrow \mathrm{P}_1$. .... $\boxed{3}$

Deuxième partie $\boxed{19}$

II.1. $\{\mathrm{Rg}(M) \mid M \in \mathcal{L} \setminus \{0_E\}\}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$, il possède un plus petit élément m donc il existe $M_0 \in \mathcal{L} \mid \mathrm{Rg}(M_0) = m$. . . . . $\boxed{1}$

II.2. a. Soit $W = \{Nz_1 \mid N \in \mathcal{L}\}$. Il suffit de prouver que W est un sous-espace vectoriel stable non réduit à $\{0_V\}$.
- W sous-espace vectoriel : évident car $\mathcal{L}$ vérifie P_4.
- W stable par $\mathcal{L}$: conséquence de la propriété P_5.
- $W \neq \{0_V\}$ car $z_1 = Iz_1 \in W$ et $z_1 \neq 0_V$ en tant qu'élément d'une base. . . . . $\boxed{3}$

b. Soit $\lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 = 0$ alors, en appliquant cette égalité au vecteur x_1 on obtient

$$\begin{aligned}\lambda_0 M_0 x_1 + \lambda_1 M_1 x_1 &= \lambda_0 z_1 + \lambda_1 M_0 N_0 z_1\\ &= \lambda_0 z_1 + \lambda_1 M_0 x_2\\ &= \lambda_0 z_1 + \lambda_1 z_2 = 0\end{aligned}$$

et comme la famille (z_1, z_2) est libre on en déduit que $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ ce qui permet de conclure que la famille (M_0, M_1) est libre. . . . . $\boxed{2}$

II.3. a.
- Comme $N_0(M_0(V)) \subset V$ on a bien évidemment $M_0N_0(M_0(V)) \subset M_0(V)$. . . $\boxed{1}$
- Soit L_0 l'endomorphisme de $M_0(V)$ obtenu en restreignant M_0N_0 à $M_0(V)$. Comme L_0 est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ alors le polynôme $\det(L_0 - \lambda I)$ (qui est non nul) possède une racine α. L'endomorphisme $L_0 - \alpha I$ n'est pas injectif, il existe donc un vecteur non nul z tel que $L_0 z = \alpha z$ ce qui répond à la question. . . . . $\boxed{4}$

b. D'une part, si $x \in \operatorname{Ker} M_0$ alors $(M_1 - \alpha M_0)x = M_0N_0M_0x = 0$ par conséquent $\operatorname{Ker} M_0 \subset \operatorname{Ker}(M_1 - \alpha M_0)$. . . . . $\boxed{2}$

D'autre part $z = M_0(y)$ et $y \in \operatorname{Ker}(M_1 - \alpha M_0)$ mais $y \notin \operatorname{Ker} M_0$ donc $\operatorname{Ker} M_0 \neq \operatorname{Ker}(M_1 - \alpha M_0)$.

Par le théorème du rang on peut donc conclure que $\mathrm{Rg}(M_1 - \alpha M_0) < \mathrm{Rg}\, M_0$. . . . $\boxed{2}$

Ensuite, $M_1 - \alpha M_0 \neq 0$ car (M_0, M_1) forme une famille libre donc $\mathrm{Rg}(M_1 - \alpha M_0) > 0$, finalement $0 < \mathrm{Rg}(M_1 - \alpha M_0) < \mathrm{Rg}\, M_0$. . . . . $\boxed{1}$

c. $\mathcal{L}$ étant une algèbre, $M_1 - \alpha M_0 \in \mathcal{L}$, $M_1 - \alpha M_0 \neq 0$ et on vient de prouver que $\mathrm{Rg}(M_1 - \alpha M_0) < m$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur m. $m \geqslant 2$ est impossible et $m > 0$ donc $m = 1$, ce qui établit P_1. . . . . $\boxed{3}$

Troisième partie $\boxed{47}$

III.1. a. Par les propriétés des combinaisons linéaires, $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel de E. Comme W est stable par $\mathcal{L}$, il est évident que $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$. . . . . $\boxed{1}$

b. Soit X un supplémentaire de W dans V, m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice M. Soit enfin $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $V = W \oplus X$. On a alors

$$M \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \text{ la matrice de } m \text{ dans } \mathcal{B} \text{ s'écrit } \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{C})$, $0 \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-k,n-k}(\mathbb{C})$. L'ensemble des matrices qui s'écrivent de cette façon est un espace vectoriel de dimension $n^2 - k(n-k)$ ce qui, grâce à l'isomorphisme $M \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, permet d'affirmer que $\dim \mathcal{K} = n^2 - k(n-k)$. . . . . $\boxed{6}$

c. On a ainsi
$$n^2-1 \leqslant \dim \mathcal{L} \leqslant \dim E_W = n^2 - n(n-k)$$
soit $0 \leqslant k(n-k) \leqslant 1$. On distingue alors deux cas :

- $k(n-k)=1$ soit, puisque k et n sont des entiers et que $k \in [0,n]$, $k=1$, $n-k=1$. Cette éventualité à été écartée par l'hypothèse $n>2$.
- $k(n-k)=0$ fournit alors $k=0$ ou $k=n$.

Conclusion : si $k=0$ alors $W=\{0_V\}$ et si $k=n$ alors $W=V$. . . . . $\boxed{3}$

III.2. a. $E_{k,m}$ et I sont linéairement indépendants donc $\dim \mathcal{H}=2$. On utilise alors l'égalité de Grassman :
$$\begin{aligned}\dim \mathcal{H}\cap\mathcal{L} &= \dim\mathcal{H} + \dim\mathcal{L} - \underbrace{\dim(\mathcal{H}+\mathcal{L})}_{\leqslant n^2}\\ &\geqslant 2+(n^2-1)-n^2 = 1.\end{aligned}$$ $\boxed{2}$

$\mathcal{L}$ contient donc une matrice de la forme $\alpha I + \beta E_{k,m}$ non nulle. α ne peut être nul sinon $\beta \neq 0$ et $E_{k,m}\in\mathcal{L}$, hypothèse écartée. On a par conséquent $\alpha \neq 0$ et la matrice $\alpha I + \beta E_{k,m}$ est bien inversible.

$\mathcal{L}$ contient une matrice inversible. . . . . $\boxed{3}$

b. On prend par exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} E_{k+1,k} + E_{1,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1\\ 1 & & & 0\\ & \ddots & & \vdots\\ 0 & & 1 & 0\end{pmatrix} \in \mathcal{L}$ (car $\mathcal{L}$ est stable par combinaison linéaire) qui est inversible en tant que matrice de permutation. . . . . . $\boxed{3}$

Remarque : on a aussi $E_{k,m}E_{m,k} = E_{k,k}$ d'où la conclusion immédiate que $\mathcal{L} \supset \mathrm{Vect}(E_{k,m}) = E$.

Conclusion : les deux cas envisagés représentent l'ensemble des possibilités donc on peut dire que, dans tous les cas, $\mathcal{L}$ contient une matrice inversible (et la propriété P_2 est satisfaite).

III.3. a. La famille $(A, A^2, \dots, A^{n^2+1})$ est une famille de n^2+1 vecteurs dans un espace de dimension n^2, elle est par conséquent liée. . . . . $\boxed{1}$

b. On sait qu'il existe une matrice $A\in\mathcal{L}$ inversible grâce à la question III.2. . . . . $\boxed{1}$

On peut alors trouver des scalaires $(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{n^2+1})$ non tous nuls tels que
$$\mu_1 A + \mu_2 A^2 + \dots + \mu_{n^2+1}A^{n^2+1} = 0.$$
Soit $k=\min\{q\in[1,n^2+1] \mid \mu_k \neq 0\}$, comme A^k est inversible, on peut simplifier la relation précédente et avoir
$$\mu_k I + \mu_{k+1}A + \dots + \mu_{n^2+1}A^{n^2+1-k} = 0.$$
avec $\mu_k \neq 0$.

$\mathcal{L}$ étant une algèbre et $\mu_k\neq 0$ alors
$$I = \frac{-1}{\mu_k}(\mu_{k+1}A + \dots + \mu_{n^2+1}A^{n^2+1-k}) \in \mathcal{L}.$$ $\boxed{3}$

c.
- Grâce aux résultats du III.1 et du III.3.b, P_3 et P_6 sont vérifiées, par conséquent la partie II nous assure que P_1 est vérifiée. Il existe donc $M_0\in\mathcal{L}$ de rang 1. $\boxed{1}$
- Si $v_0 = \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$ et $w_0 = \begin{pmatrix} w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$ alors $v_0\overline{w_0}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} v_1\overline{w_1} & \dots & v_1\overline{w_n}\\ \vdots & & \vdots\\ v_n\overline{w_1} & \dots & v_n\overline{w_n}\end{pmatrix}$.

$\text{Rg}(M_0) = 1$ donc toutes les colonnes de M_0 sont proportionnelles et il y a au moins une colonne non nulle. Soit C la colonne non nulle alors $M_0 = (\lambda_1 C, \dots, \lambda_n C)$ et les λ_i ne sont pas tous nuls car $M_0 \neq 0$.

On pose alors $v_0 = C$ et $w_0 = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} \\ \vdots \\ \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$ .... $\boxed{2}$

III.4. a.
- C_u est un sous-espace vectoriel en tant qu'orthogonal d'une partie de V. En effet, si $(w, w') \in (C_v)^2$ alors $\forall x \in B_v$, $\overline{x}^{\mathrm{T}}(\lambda w + \lambda' w') = 0$ par linéarité du produit matriciel donc C_v est stable par combinaison linéaire............... $\boxed{1}$
- $B_u \neq \{0\}$ car $I \in \mathcal{L}$ donc $u \in B_u$.. $\boxed{1}$
- C_u est stable par $\mathcal{L}$: soit $x \in C_u$ alors $\forall L \in \mathcal{L}$,

$$\overline{(\overline{L}^{\mathrm{T}} v)}^{\mathrm{T}} x = \overline{v}^{\mathrm{T}} L x = 0$$

donc $\forall M \in \mathcal{L}$,

$$\overline{(\overline{L}^{\mathrm{T}} v)}^{\mathrm{T}} M x = \overline{v}^{\mathrm{T}} L M x = 0$$

car $LM \in \mathcal{L}$. On peut donc conclure que C_u est stable par $\mathcal{L}$............... $\boxed{4}$

b. C_u est stable par $\mathcal{L}$ donc $C_u = \{0_V\}$ ou $C_u = V$. Or si $C_u = V$ alors

$$\forall x \in B_u,\ \forall w \in V,\ \overline{x}^{\mathrm{T}} w = 0$$

soit, en prenant $w = x$, $\overline{x}^{\mathrm{T}} x = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0$ donc $x = 0$. On aurait ainsi $B_u = \{0_V\}$ ce qui est impossible.
Conclusion : $C_u = \{0_V\}$.. $\boxed{3}$
Si $B_u \neq V$ alors soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de B_u (avec $k < n$). La matrice dont les lignes sont les $\overline{e_i}^{\mathrm{T}}$ est de rang $k < n$ donc son noyau n'est pas réduit à 0 donc

$$\exists w \neq 0 \mid \forall i \in [1, k],\ \overline{e_i}^{\mathrm{T}} w = 0$$

ce qui signifie que $w \in C_v$ (par linéarité) et entraîne une contradiction.
Conclusion : on a $B_u = V$.. $\boxed{3}$

c. A_u est stable par $\mathcal{L}$ (même démonstration qu'à la question II.A) et comme $u \in A_u$ alors $A_u \neq \{0_V\}$ donc $A_u = V$.. $\boxed{2}$

d. On procède en plusieurs points :
- Comme $A_{v_0} = V$ il est immédiat que $\forall x \in V$, $\exists L \in \mathcal{L}$, $Lv_0 = x$.
- De même, $B_{w_0} = V$ donc $\forall y \in V$, $\exists M \in \mathcal{L}$, ${}^t\overline{M} w_0 = y$.
- Toute matrice de rang 1 s'écrivant $x^t\overline{y}$ avec $(x, y) \in (V \setminus \{0_V\})^2$ alors

$$x^t\overline{y} = Lv_0^t\overline{w_0}M = LM_0M \in \mathcal{L}$$

donc $\mathcal{L}$ contient toutes les matrices de rang 1................................ $\boxed{5}$

e. $\mathcal{L}$ contient toutes les matrices $E_{k,m}$ et comme $\mathcal{L}$ est un espace vectoriel alors $\mathcal{L} \supset \text{Vect}(E_{k,m}) = E$. L'inclusion dans l'autre sens étant acquise on obtient finalement $L = E$.. $\boxed{2}$