SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

Partie I $\boxed{69}$

Quelques propriétés de l'exponentielle de matrice

I.1. a. C'est un résultat du cours, la série converge absolument car, par récurrence, on a $\dfrac{\|A^k\|}{k!} \leqslant \dfrac{\|A\|^k}{k!}$ terme général d'une série convergente de somme $e^{\|A\|}$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est complet en tant qu'espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$, cette série converge. .... $\boxed{2}$

b. En reprenant l'inégalité ci-dessus, $\dfrac{\|A^k\|}{k!} \leqslant \dfrac{\|A\|^k}{k!}$, et on a $\left\|\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{A^k}{k!}\right\| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{\|A\|^k}{k!}$, grâce à l'inégalité triangulaire. Comme chacune de ces quantités admet une limite en $+\infty$, on a bien, vu la continuité de la norme,

$$\|\exp A\| \leqslant \exp \|A\|. \qquad \boxed{2}$$

c. On écrit $B\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{A^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{N} B\dfrac{A^k}{k!}$ et comme le produit matriciel est continu, on peut prendre la limite de part et d'autre de cette égalité. Conclusion :

$$B \exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} BA^k. \qquad \boxed{2}$$

Si $A_1 = PA_2P^{-1}$ alors on sait que $A_1^k = PA_2^kP^{-1}$ d'où, par continuité du produit matriciel

$$\exp A_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P\frac{A_2^k}{k!}P^{-1} = P \exp A_2 P^{-1}$$

donc $\exp A_1$ et $\exp A_2$ sont semblables. .... $\boxed{2}$

I.2. On a immédiatement $\exp D = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$. .... $\boxed{0}$

On remarque ensuite que $F^3 = 0$ d'où

$$\exp F = I_3 + F + \frac{1}{2}F^2 = D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{2}$$

Enfin, comme $E = \exp F.D.\exp(-F)$ on a

$$\exp E = \exp F.\exp D.\exp(-F) = \begin{pmatrix} e & e^2 - e & \dfrac{e^3}{2} - e^2 + \dfrac{e}{2} \\ 0 & e^2 & e^3 - e^2 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{2}$$

Vu que $\exp(-F) \neq I_3$, $\exp E \neq \exp F.\exp D$.

Conclusion : F et D ne commutent pas et $\exp(F + D) = \exp E \neq \exp F.\exp D$; on a un contre-exemple. .... $\boxed{2}$

I.3. a. La série donnant $f_A(x)$ converge normalement sur tout intervalle $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$, sa somme définit bien une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. .... $\boxed{3}$
On pouvait aussi utiliser la composée des deux applications continues : $x \mapsto xA$ et $B \mapsto \exp B$.

b. On peut effectivement intégrer terme à terme grâce à la convergence normale. .. $\boxed{2}$
On aura alors :

$$A\int_0^x f_A(t)\,\mathrm{d}t = A\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^x \frac{t^k}{k!}A^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^{k+1}x^{k+1}}{(k+1)!} = f_A(x) - I_n. \qquad \boxed{2}$$

En réécrivant cette égalité on a $f_A(x) = I_n + A\displaystyle\int_0^x f_A(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui permet d'affirmer que f_A est dérivable (car f_A est continue et l'intégrale d'une fonction continue est dérivable) et que $f_A'(x) = Af_A(x)$. .... $\boxed{1}$
Par une récurrence immédiate, on prouve alors que f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n et que $f_A^{(n)}(x) = A^n f_A(x)$. .... $\boxed{0}$

I.4. a. Un calcul rapide nous donne $(C_\theta)^{2n} = (-1)^n\theta^{2n}I_2$ et $(C_\theta)^{2n+1} = (-1)^n\theta^{2n+1}J_2$ où $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on aura alors

$$\sum_{k=0}^{2N+1}\frac{1}{k!}(C_\theta)^k = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}I_2 + \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{((2n+1)!}J_2$$

ce qui donne, par passage à la limite (toutes les quantités écrites ci-dessus ont une limite) :

$$\exp C_\theta = \cos\theta I_2 + \sin\theta J_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \boxed{3}$$

matrice de la rotation $-\theta$.
On peut tout de suite conclure que l'application $A \mapsto \exp A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas injective. En effet, pour $n \geqslant 3$, il suffit de prendre $A_\theta = \begin{pmatrix} C_\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dans ce cas $\exp(A_\theta) = \begin{pmatrix} \exp(C_\theta) & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ et $\exp(A_{\theta+2\pi}) = \exp(A_\theta)$. .... $\boxed{1}$

b. $\exp(A) - I_n$ peut s'écrire $A(I_n + S_A)$ avec $S_A = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^{k-1}$ .... $\boxed{1}$
d'où

$$\begin{aligned}\|S_A\| &\leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}\|A\|^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^k}{(k+1)!}\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^k}{k!} = e^a - 1\end{aligned}$$

où on a posé $a = \|A\|$. Comme $e^t - 1 < 1$ pour $t < \ln 2$, on en déduit l'existence d'un réel $\alpha = \ln 2 > 0$ tel que $\|A\| < \alpha$ implique $\|S_A\| < 1$. .... $\boxed{3}$

c. Là encore, c'est un résultat du cours. .... $\boxed{2}$

d. Si $\exp M = I_n$ on a $M(I_n + S_M) = 0$ et comme $\|S_M\| < \alpha$, la matrice $I_n + S_M$ est inversible et donc $M = 0$. La réciproque est immédiate car $\exp 0 = I_n$. .... $\boxed{2}$

I.5. a. Comme g_k est une fonction polynomiale en x, elle est bien entendu dérivable. ... $\boxed{2}$
On a alors $g_1'(x) = H$, puis, comme $g_k(x) = (B + xH)g_{k-1}(x)$, on en déduit que $g_k'(x) = Hg_{k-1}(x) + (B + xH)g_{k-1}'(x)$, d'où

$$g_2'(x) = H(B+xH)+(B+xH)H,\ g_3'(x) = H(B+xH)^2+(B+xH)H(B+xH)+(B+xH)^2H \quad \boxed{1}$$

et, par une récurrence immédiate :

$$g_k'(x) = \sum_{h=1}^{k}(B + xH)^{h-1}H(B + xH)^{k-h}. \quad \boxed{4}$$

b. On a

$$\|g_k'(x)\| \leqslant \sum_{h=1}^{k}(\|B\| + x\|H\|)^{h-1}.\|H\|.(\|B\| + x\|H\|)^{k-h} = k\|H\|.(\|B\| + x\|H\|)^{k-1}$$

pour $x \geqslant 0$. On utilise alors l'inégalité des accroissements finis :

$$\|(B + H)^k - B^k\| \leqslant k\|H\|.(\|B\| + \|H\|)^{k-1}. \quad \boxed{3}$$

I.6. a. Comme $T(A, x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\dfrac{x^kA^k}{k!}\right) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{x^kA^{k+2}}{(k + 2)!}$ est la somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement sur tout intervalle $[-a, a]$. $x \mapsto T(A, x)$ se prolonge bien par continuité en 0 en posant $T(A, 0) = \dfrac{1}{2}A^2$. .... $\boxed{2}$
Il suffit d'utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, appliquée à la fonction $f_A(x) = \exp(xA)$. On a $\exp(xA) = I_n + xA + x^2A^2\int_0^1(1 - t)\exp(txA)\,\mathrm{d}t$, d'où $T(A, x) = A^2\int_0^1(1 - t)\exp(txA)\,\mathrm{d}t$ .... $\boxed{3}$
et

$$\begin{aligned}\|T(A, x)\| &\leqslant \|A\|^2\int_0^1(1 - t)\|exp(tx)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \|A\|^2\int_0^1(1 - t)\exp(tx\|A\|)\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \|A\|^2\int_0^1(1 - t)\exp(x\|A\|)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|A\|^2\exp(x\|A\|)\end{aligned} \quad \boxed{1}$$

b. On a $\exp\left(\dfrac{1}{k}A\right) - \dfrac{1}{k^2}T\left(A, \dfrac{1}{k}\right) = I_n + \dfrac{1}{k}A$ et $\left(\exp\left(\dfrac{1}{k}A\right)\right)^k = \exp A$ d'où

$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k - \exp A = \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right) - \frac{1}{k^2}T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right)^k - \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\right)^k. \quad \boxed{1}$$

Avec $B = \exp\left(\dfrac{1}{k}A\right)$ et $H = -\dfrac{1}{k^2}T\left(A, \dfrac{1}{k}\right)$ alors, la formule du I.5.b. donne

$$\begin{aligned}\left\|\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k - \exp A\right\| &\leqslant \frac{1}{k}\left\|T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right\|\left[\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right) + \frac{1}{k^2}\left\|T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right\|\right]^{k-1}\\ &\leqslant \frac{1}{2k}\|A\|^2\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)\left[\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right) + \frac{1}{2k^2}\|A\|^2\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right)\right]^{k-1}\\ &\leqslant \frac{1}{2k}\|A\|^2\exp\left(\frac{1}{k}\|A\|\right).\exp\left(\frac{k-1}{k}\|A\|\right)\left[1 + \frac{1}{2k^2}\|A\|^2\right]^{k-1}\\ &\leqslant \frac{1}{2k}\|A\|^2\exp(\|A\|)\left[1 + \frac{1}{2k^2}\|A\|^2\right]^{k-1}.\end{aligned}$$

En prenant le logarithme, on prouve facilement que $\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2k^2}\|A\|^2\right)^{k-1}=1$ d'où l'on déduit :

$$\lim_{k\to+\infty}\left\|\left(I_n+\frac{1}{k}A\right)^k-\exp A\right\|=0$$

ce qui donne $\lim_{k\to+\infty}\left(I_n+\frac{1}{k}A\right)^k=\exp A$. .... $\boxed{5}$

Remarque : Il est beaucoup plus facile de prouver ce résultat en utilisant une convergence normale comme on a pu le faire en cours...

c. $A\mapsto\det A$ est une fonction polynomiale des a_{ij}, elle est donc continue. .... $\boxed{1}$
Ensuite, vu que l'application $X\mapsto\det X$ est continue

$$\begin{aligned}\det\exp(A)&=\det\lim_{k\to+\infty}\left(I_n+\frac{1}{k}A\right)^k=\lim_{k\to+\infty}\det\left(I_n+\frac{1}{k}A\right)^k\\&=\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\operatorname{Tr}(A)+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^k=\exp(\operatorname{Tr}(A))\text{ (prendre le log).}\end{aligned}$$

On en déduit que $\det\exp(A)=\exp(\operatorname{Tr}(A))$ .... $\boxed{3}$

I.7. a. Avec l'égalité $\exp(xM)=I_n+xM+x^2T(M,x)$ appliquée à A et B on obtient

$$U(A,B;x)=T(A,x)+T(B,x)+AB+x[AT(B,x)+T(A,x)B]+x^2T(A,x)T(B,x)$$

et, comme toutes les quantités du membre de gauche ont une limite en 0, on peut passer à la limite lorsque $x\to0$:

$$\lim_{x\to0}U(A,B;x)=\lim_{x\to0}T(A,x)+\lim_{x\to0}T(B,x)+AB=\frac{1}{2}(A^2+B^2)+AB. \qquad \boxed{2}$$

Pour terminer on applique la formule de Taylor avec le reste intégral à la fonction $g(t)=\exp(txA)\exp(txB)$ à l'ordre 2 d'où, comme $g'(t)=x[Ae^{txA}e^{txB}+e^{txA}Be^{txB}]$ et $g''(t)=x^2[A^2e^{txA}e^{txB}+2Ae^{txA}Be^{txB}+B^2e^{txA}e^{txB}]$

$$g(t)=I+x(A+B)+x^2\int_0^1(1-t)[A^2e^{txA}e^{txB}+2Ae^{txA}Be^{txB}+B^2e^{txA}e^{txB}]\,\mathrm{d}t$$

et en conclusion

$$\|U(A,B;x)\|\leqslant\frac{1}{2}(\|A\|+\|B\|)^2e^{x(\|A\|+\|B\|)} \qquad \boxed{3}$$

b. On écrit que

$$P_k=\left[I_n+\frac{1}{k}(A+B)+\frac{1}{k^2}U\left(A,B;\frac{1}{k}\right)\right]^k-\left[I_n+\frac{1}{k}(A+B)\right]^k$$

et, en appliquant l'inégalité du I.5.b. à $I_n+\frac{1}{k}(A+B)$ à la place de B et $\frac{1}{k^2}U\left(A,B;\frac{1}{k}\right)$ à la place de H, on obtient

$$\|P_k\|\leqslant\frac{1}{k}\left\|U\left(A,B;\frac{1}{k}\right)\right\|\left[1+\frac{1}{k}(\|A\|+\|B\|)+\frac{1}{k^2}\left\|U(A,B;\frac{1}{k}\right\|\right]^{k-1}.$$

P_k tend alors vers 0 car il est majoré par un $O\left(\frac{1}{k}\right)$. .... $\boxed{4}$

c. On a alors immédiatement :

$$Q_k = \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right).\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k \to \exp(A+B). \qquad \boxed{1}$$

Partie II $\boxed{26}$

Groupes à un paramètre

II.1. On sait déjà que f_A est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (I.3.a.). Comme xA et yA commutent, on a $f_A(x+y) = \exp(xA+yA) = \exp(xA).\exp(yA) = f_A(x).f_A(y)$. Il suffit de prouver que $f_A(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour conclure.

Or $f_A(0) = I_n$ et $f_A(x).f_A(-x) = I_n$ ce qui prouve que $f_A(x)$ est inversible pour tout x de $\mathbb{R}$.

f_A est bien un morphisme continu du groupe additif $(\mathbb{R},+)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Conclusion : $f_A(\mathbb{R})$ est un groupe à un paramètre. .... $\boxed{2}$

II.2. On sait que $\mathrm{O}^+(2) = \{r_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$ où r_θ désigne la rotation vectorielle d'angle θ. Si on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ alors le I.4. nous permet d'affirmer que $f_A(\mathbb{R}) = \mathrm{O}^+(2)$ et donc $\mathrm{O}^+(2)$ est un groupe à un paramètre. .... $\boxed{2}$

II.3. On définit $h_\alpha(x) = \begin{cases} (x^2-\alpha^2)^2 & \text{si } |x| \leqslant \alpha \\ 0 & \text{si } |x| > \alpha \end{cases}$. C'est une fonction positive, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de l'intervalle $[-\alpha,\alpha]$ (le seul problème de dérivabilité se pose a priori pour $|x| = \alpha$). On pose $I = \displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} h(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

La fonction $g_\alpha = \dfrac{h_\alpha}{I}$ répond à la question. .... $\boxed{2}$

Les fonctions g_α et g'_α sont continues sur $[-\alpha,\alpha]$ donc uniformément continues sur cette intervalle. Comme elles sont nulles en dehors de cet intervalle, elles sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$ .... $\boxed{1}$

II.4. **a.** En développant l'expression polynomiale de g, on arrive à une expression du genre

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{4} t^k \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \Phi_k(u)\,\mathrm{d}u$$

où les fonctions Φ_k sont continues. Ceci permet d'affirmer que $\psi(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. .... $\boxed{4}$

b. On a $[t-\alpha, t+\alpha] \subset [-t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ et $g_\alpha(t-u) = 0$ pour $u \in [-t_0-\alpha, t-\alpha] \cup [t+\alpha, t_0+\alpha]$ donc

$$\psi(t) = \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} g_\alpha(t-u)\Phi(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} g_\alpha(t-u)\Phi(u)\,\mathrm{d}u. \qquad \boxed{2}$$

c. Si on change u en $t-u$ dans la dernière intégrale, on obtient

$$\psi(t) = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u)\Phi(t-u)\,\mathrm{d}u$$

et comme $\Phi(t-u) = \Phi(t)\Phi(-u) = \Phi(-u+t) = \Phi(-u)\Phi(t)$ on en déduit

$$\psi(t) = M_\alpha.\Phi(t) = \Phi(t).M_\alpha. \qquad \boxed{2}$$

II.5. **a.** Vu que $\Phi(0) = I_n$ et que $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u)\,\mathrm{d}u = 1$ alors

$$M_\alpha - I_n = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u)[\Phi(-u) - \Phi(0)]\,\mathrm{d}u.$$

Comme Φ est continue en 0, on sait que $\displaystyle\sup_{u\in[-\alpha,\alpha]} \|\Phi(u) - \Phi(u)\| = \varepsilon(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers 0.

À l'aide de l'inégalité de la norme, on obtient

$$\|M_\alpha - I_n\| \leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u)\|\Phi(-u) - \Phi(0)\|\,\mathrm{d}u \leqslant \varepsilon(\alpha)$$

et donc $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} M_\alpha = I_n$ .... $\boxed{3}$

b. Comme $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0} M_\alpha = I_n$, il existe $\beta > 0$ tel que $0 < \alpha < \beta$ entraîne $\|M_\alpha - I_n\| < 1$ et, en écrivant $M_\alpha = I_n + (M_\alpha - I_n)$ et en utilisant le résultat du I.4.c., on en déduit que M_α est inversible pour $\alpha \in]0, \beta[$. .... $\boxed{2}$

On peut plus simplement utiliser la continuité du déterminant.

c. Pour $\alpha \in]0, \beta[$, $\Phi(t) = (M_\alpha)^{-1}\psi(t)$ donc Φ est continûment dérivable. .... $\boxed{1}$

II.6. **a.** On dérive par rapport à u la relation $\Phi(t+u) = \Phi(t).\Phi(u)$ (Φ est de classe $\mathcal{C}^1$), on obtient

$$\Phi'(t+u) = \Phi(t)\Phi'(u)$$

et, avec $u = 0$,

$$\Phi'(t) = \Phi(t)\Phi'(0) = \Phi'(0)\Phi(t) = \Phi(t)A = A\Phi(t).$$ $\boxed{3}$

b. $\Omega(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $\Omega(0) = I_n$. Or

$$\Omega'(t) = \Phi'(t)e^{-tA} - \Phi(t)Ae^{-tA} = 0$$

donc Ω est constante et $\Phi(t) = e^{tA}$. .... $\boxed{2}$