SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

Notations et rappels :

(1) L'expression "série entière" signifiera "série entière à coefficients complexes".

(2) Pour tout $(a, R) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}$, on note $\overset{\circ}{D}(a; R)$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z-a| < R$.

(3) On notera $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (respectivement, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$) l'ensemble des fonctions continues f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ (respectivement, de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{C}^2$) telles que pour tout (x, n) appartenant à $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ (respectivement à $\mathbb{R}^2\times\mathbb{Z}^2$) on ait :

$$f(x+n) = f(x).$$

(4) Soit n un entier $\geqslant 1$ et soit F une fonction continue de $[0,1]^n$ vers $\mathbb{C}$.
On admettra que l'on définit par recurrence sur l'entier $k \in \{0, \dots, n-1\}$ une suite de fonctions continues $G_k \ : [0,1]^{n-k} \to \mathbb{C}$ en posant :

$$G_0 = F,\ G_k(x_1, \dots, x_{n-k}) = \int_0^1 G_{k-1}(x_1, \dots, x_{n-k}, t)\, \mathrm{d}t$$

et l'on posera

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 F(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \int_0^1 G_{n-1}(t)\, \mathrm{d}t.$$

On admettra de plus que, pour toute permutation σ de $[\![1, n]\!]$, on a

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 F(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \int_0^1 \dots \int_0^1 F(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

Ces énoncés étendent aux fonctions de n variables la definition et les propriétés des intégrales doubles et triples.

(5) On admettra l'inégalité suivante :
Si $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,d]\!]^2}$ est une matrice complexe a d lignes et d colonnes. on a

$$|\det A|^2 \leqslant \prod_{j=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} |a_{ij}|^2 \right).$$

Première partie

I.1. On dit qu'une application f de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ est une fonction entière s'il existe une série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence infini telle que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

a. Soit $f \ : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une *fonction entière* et soit $a \in \mathbb{C}$.
Montrer que, pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $z \in \overset{\circ}{D}(a; R)$, on a

$$f(z) = \int_0^1 f(a + R\,\mathrm{e}^{2\pi i\theta}) \frac{R\,\mathrm{e}^{2\pi i\theta}}{a + R\,\mathrm{e}^{2\pi i\theta} - z}\, \mathrm{d}\theta.$$

(On pourra commencer par montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| < 1$, on a

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2\pi ik\theta}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi i\theta}\,w}\,\mathrm{d}\theta = w^k.)$$

b. Montrer que la fonction

$$g\ : z \in \mathbb{C} \mapsto f(z+a) \in \mathbb{C}$$

est une fonction entière.

c. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une fonction entière $\tilde{f}$ telle que

$$\tilde{f}(a) \neq 0 \quad \text{ et } \quad \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (z-a)^n \tilde{f}(z).$$

d. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors pour toute partie compacte K de $\mathbb{C}$, l'ensemble

$$\{z \in K \mid f(z) = 0\}$$

est fini.

I.2. **a.** Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence est supérieur ou égal R.

Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe une unique série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R telle que, si l'on pose, pour tout $z \in \overset{\circ}{D}(0;R)$,

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad A'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \quad \text{ et } B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n,$$

alors on ait

$$\forall z \in \overset{\circ}{D}(0;R),\ A'(z) = B(z)A(z) \quad \text{ et } A(0) = \lambda.$$

(On pourra exprimer ces conditions sous forme de relations entre les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis montrer que ces relations déterminent uniquement $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que, si $(C,r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sont tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |b_n| \leqslant C r^{-n},$$

alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leqslant |\lambda| r^{-n} \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{Cr-1}{i}\right).)$$

b. Montrer que pour toute série entière $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R, il existe une unique série entière $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal R telle que

$$\forall z \in \overset{\circ}{D}(0;R),\ g(z) = \mathrm{e}^{f(z)}.$$

I.3. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à R telle que $\forall z \in \overset{\circ}{D}(0;R),\ f(z) \neq 0$.

a. On pose, pour tout $(r,\theta) \in [0,R[\times\mathbb{R}$,
$$F(r,\theta) = f(r\,\mathrm{e}^{2\pi i\theta}).$$
Montrer que F est une fonction continue sur $[0,R[\times\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,R[\times\mathbb{R}$ et que
$$\forall (r,\theta) \in]0,R[\times\mathbb{R},\ r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{i}{2\pi}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = 0.$$
b. Montrer qu'iI existe une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de fonctions continues de $[0,R[$ vers $\mathbb{R}$, dérivables sur $]0,R[$ telles que
$$\forall (r,\theta) \in [0,R[\times\mathbb{R},\ \frac{1}{F(r,\theta)} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N} B_n(r)\,\mathrm{e}^{2\pi i n\theta}.$$
Quelle équation différentielle la fonction B_n verifie-t-elle ?

c. Montrer qu'il existe une unique série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n z^n$ de rayon de convergence supérieur où égal à R telle que
$$\forall z \in \overset{\circ}{D}(0;R),\ f(z)g(z) = 1.$$
d. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^a = f(0)$, il existe une unique série entière $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à R telle que
$$h(0) = a \quad \text{et que} \quad \forall z \in \overset{\circ}{D}(0;R),\ \mathrm{e}^{h(z)} = f(z).$$

Deuxième partie

II.1. Pour tout $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, on pose
$$K_h(\varphi)\ : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^1 h(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \in \mathbb{C}.$$

a. Verifier que l'on définit ainsi un endomorphisme K_h de I'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

b. Dans la suite de cette partie, on désigne par f un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction $\Lambda^n f\ : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ en posant
$$\Lambda^n f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = \det(f(x_i,y_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}.$$
Majorer $|\Lambda^n f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)|$ en termes de n et de $\sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |f(x,y)|$.

c. Montrer que la série
$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1\cdots\int_0^1 \Lambda^n f(t_1,\ldots,t_n,t_1,\ldots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n$$
converge. On notera sa somme $D(f)$.
Montrer que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, la série
$$f(x,y) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1\cdots\int_0^1 \Lambda^{n+1} f(x,t_1,\ldots,t_n,y,t_1,\ldots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n$$
converge et que sa somme $m(x,y)$ définit une fonction de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ qui appartient à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$.

d. Établir les identités suivantes, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$m(x,y) + \int_0^1 f(x,t)m(t,y)\,\mathrm{d}t = D(f)f(x,y)$$

$$m(x,y) + \int_0^1 m(x,t)f(t,y)\,\mathrm{d}t = D(f)f(x,y).$$

e. Montrer que lorsque $D(f) \neq 0$, $\mathrm{Id} + K_f$ est un endomorphisme bijectif de $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ et que l'endomorphisme $(\mathrm{Id} + K_f)^{-1} - \mathrm{Id}$ est de la forme K_e, ou e désigne un element de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ que I'on explicitera.

II.2. **a.** Montrer que la fonction

$$\Delta \ : z \in \mathbb{C} \mapsto D(zf) \in \mathbb{C}$$

est une fonction entière.

b. Montrer que la restriction de Δ à $\mathbb{R}$ admet comme dérivée en 1

$$\Delta'(1) = \int_0^1 m(x,x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer aussi que, si $D(f) \neq 0$, alors l'application $(\mathrm{Id} + K_f)^{-1} \circ K_f$ est de la forme K_σ, où $\sigma \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$, et l'on a

$$\frac{\Delta'(1)}{\Delta(1)} = \int_0^1 \sigma(x,x)\,\mathrm{d}x.$$

II.3. **a.** Montrer qu'il existe une fonction $I \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ telle que $I(0) = 0$ et que, pour tout élément ψ de $K_f(\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\psi(x) - \psi(0)| \leqslant CI(x).$$

b. Montrer que l'application K_f n'est pas surjective.

c. On appelle spectre de K_f, et on note $\mathrm{Sp}\, K_f$ la partie de $\mathbb{C}$ formée des nombres complexes λ tel que l'endomorphisme $\lambda\,\mathrm{Id} - K_f$ de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ne soit pas bijectif.
Montrer que $\mathrm{Sp}\, K_f$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

Troisième partie

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hermitien $< .,. >$. On note $\|.\|$ la norme sur $\mathcal{H}$ associée et $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre des applications linéaires continues de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{H}, \|.\|)$ dans lui-même. Pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on pose

$$|||T||| = \sup_{\|u\| \leqslant 1} \|Tu\| \text{ où } u \in \mathcal{H}.$$

III.1. On appelle $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ l'ensemble des applications linéaires T de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$ telles qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(Tr 1)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.\|v_n\| < +\infty$$

(Tr 2)
$$\forall v \in \mathcal{H},\ \lim_{N\to+\infty} \|Tv - \sum_{n=0}^{N} < u_n, v > v_n\| = 0$$

Pour tout $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, on désigne par $\|T\|_1$ la borne inférieure de l'ensemble suivant :

$$\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.\|v_n\| \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ satisfont à (Tr 1) et (Tr 2)} \right\}.$$

a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et que l'on a

$$\forall T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}),\ |||T||| \leqslant \|T\|_1.$$

b. Montrer que $\|.\|_1$ est une norme sur $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$.

c. Montrer que, pour tout $(T, T') \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\times\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, on a

$$T \circ T' \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}) \text{ et } \|T \circ T'\|_1 \leqslant |||T|||.\|T'\|_1.$$

III.2. On suppose maintenant qu'il existe une suite orthonormale $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathcal{H}$ telle que

$$\forall v \in \mathcal{H},\ \|v\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |< e_k, v >|^2.$$

a. Montrer que, pour tout $(v_1, v_2) \in \mathcal{H}^2$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |< e_k, v_1 >|.|< e_k, v_2 >| < +\infty$$

et

$$< v_1, v_2 >= \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{< e_k, v_1 >}. < e_k, v_2 > .$$

b. Soit $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ et soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de vecteurs de $\mathcal{H}$ satisfaisant aux conditions (Tr 1) et (Tr 2). Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |< u_n, v_n >| < +\infty$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |< e_k, Te_k >| < +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} < u_n, v_n > = \sum_{k=0}^{+\infty} < e_k, Te_k > .$$

On notera $\operatorname{Tr} T$ la valeur commune des deux membres de cette égalité. Verifier qu'elle ne dépend que de T, et non pas du choix des $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ni de celui de $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

c. Comparer $|\operatorname{Tr} T|$ et $\|T\|_1$. Les normes $\|.\|_1$ et $|||.|||$ sur $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ sont-elles équivalentes ?

III.3. On suppose dans la suite de cette partie que $\mathcal{H} = \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ et que

$$< f, g >= \int_0^1 \overline{f(t)} g(t)\, \mathrm{d}t.$$

a. Verifier que les hypothèses de la question **III.2.** sont satisfaites.

b. Soit f un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ tel que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ existent et définissent des fonctions continues de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que K_f appartient à $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ et que

$$\operatorname{Tr} K_f = \int_0^1 f(x, x)\, \mathrm{d}x.$$

(On pourra considérer les fonctions $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ définies par

$$f_n(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n y}\, f(x,y)\,\mathrm{d}y.)$$

c. Montrer que, si l'on pose $\Delta_f(z) = D(zf)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ (cf. **II.2.a.**) et si l'on note $\Delta'_f(t)$ la dérivée en un point $t \in \mathbb{R}$ de la restriction à $\mathbb{R}$ de Δ_f, alors on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Delta_f(t) \neq 0 \Rightarrow \frac{\Delta'_f(t)}{\Delta_f(t)} = \mathrm{Tr}[(\mathrm{Id} + tK_f)^{-1} \circ K_f].$$

d. Que dire de $D(f)$ lorsque $\mathrm{Id} + K_f$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$?

e. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, K_f^n appartient à $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ et que le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathrm{Tr}(K_f^n) z^n$$

est strictement positif. Pour tout $z \in \overset{\circ}{D}(0;R)$, on note $T_f(z)$ la somme de cette série.

f. Montrer que

$$\forall z \in \overset{\circ}{D}(0;R),\ \mathrm{e}^{T_f(z)} = \Delta_f(z).$$

g. On note $\widetilde{\mathrm{Sp}} K_f$ la partie de $\mathbb{C}$ formée des nombres complexes λ tels que l'endomorphisme $\lambda\,\mathrm{Id} - K_f$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ne soit pas inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$. Exprimer R en fonction de $\widetilde{\mathrm{Sp}} K_f$.

III.4. Soit φ un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ de classe $\mathcal{C}^2$ et soit f la fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ définie par $f(x,y) = \varphi(x-y)$.

a. Exprimer $\mathrm{Tr}\, K_f^n$ au moyen des coefficients de Fourier

$$\widehat{\varphi}(k) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i k x}\, \varphi(x)\,\mathrm{d}x,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b. Établir, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'égalité suivante :

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{k=-N}^{N} (1 + z\widehat{\varphi}(k)) = \Delta_f(z).$$

Ce résultat peut-il s'étendre à des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ qui ne sont pas de c1asse $\mathcal{C}^2$.