SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

Corrigé du devoir : ENS Paris 91

Première partie

I.1. a. Soit $\varphi_k(\theta) = \dfrac{e^{2ik\pi\theta}}{1 - we^{-2i\pi\theta}}$, alors, comme $|w| < 1$,

$$\varphi_k(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n e^{2i\pi(k-n)\theta}$$

est une série normalement convergente pour $\theta \in [0,1]$ et, en intégrant terme à terme sur $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \varphi_k(\theta)\,\mathrm{d}\theta = w^k. \qquad \boxed{2}$$

On pose alors $z = a + re^{2i\pi t}$ où $0 \leqslant r < R$ et $t \in \mathbb{R}$. En utilisant le résultat prouvé et la formule du binôme, on a :

$$\int_0^1 \frac{(a + Re^{2i\pi\theta})^n}{1 - \dfrac{r}{R}e^{2i\pi(t-\theta)}}\,\mathrm{d}\theta = (a + re^{2i\pi t})^n.$$

Ensuite on écrit

$$f(a + Re^{2i\pi\theta})\frac{Re^{2i\pi\theta}}{a + Re^{2i\pi\theta} - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(a + Re^{2i\pi\theta})^n \frac{Re^{2i\pi\theta}}{a + Re^{2i\pi\theta} - z}.$$

Or $\left| a_n(a + Re^{2i\pi\theta})^n \dfrac{Re^{2i\pi\theta}}{a + Re^{2i\pi\theta} - z} \right| \leqslant |a_n|(|a| + R)^n \dfrac{R}{R - |a - z|}$ qui est le terme général d'une série convergente donc on peut intégrer terme à terme de 0 à 1 la relation ci-dessus d'où

$$\int_0^1 f(a + Re^{2i\pi\theta})\frac{Re^{2i\pi\theta}}{a + Re^{2i\pi\theta} - z}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(a + re^{2i\pi t})^n = f(z). \qquad \boxed{4}$$

b. Si on remplace z par $a + z$ dans la relation ci-dessus, on a

$$g(z) = f(a + z) = \int_0^1 f(a + Re^{2i\pi\theta})\frac{Re^{2i\pi\theta}}{Re^{2i\pi\theta} - z}\,\mathrm{d}\theta.$$

Si on choisit $|z| < R$ alors

$$\frac{Re^{2i\pi\theta}}{Re^{2i\pi\theta} - z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{R}\right)^n e^{-2i\pi n\theta}$$

donne une série normalement convergente pour $\theta \in [0,1]$ que l'on intègre sur $[0,1]$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{R^n}\int_0^1 f(a + Re^{2i\pi\theta})e^{-2i\pi\theta}\,\mathrm{d}\theta\right) z^n$$

pour tout $R > 0$. Comme on a unicité du développement en série entière, le coefficient de z^n dans la série ci-dessus ne dépend pas de R. Le rayon de cette série est bien infini, ce qui prouve le résultat. . . . . $\boxed{5}$

c. Si f n'est pas nulle, g non plus et dans le développement en série entière de g, il existe un terme non nul. On note n l'indice du premier terme non nul, dans ce cas, $g(z) = z^n\tilde{g}(z)$ avec $\tilde{g}(0) \neq 0$, $\tilde{g}$ étant la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. Il suffit alors de poser $\tilde{f}(z) = \tilde{g}(z - a)$. . . . . $\boxed{3}$

d. Si a est un zéro de f alors, vu le résultat précédent, il existe un disque ouvert $D(a,r)$ dans lequel f n'a pas d'autre 0. Les zéros de f sont isolés donc il n'y a qu'un nombre fini de zéros de f dans tout compact.
On utilise alors Bolzano-Weierstrass en faisant une démonstration par l'absurde.
On suppose qu'il existe une infinité d'éléments de K, tous distincts, annulant f. On sait alors que l'on peut en extraire une suite convergente, i.e. il existe $(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
Par continuité, on a $f(x) = 0$ or x n'est pas un point isolé car il y a une infinité de x_n dans tout voisinage, ce qui fournit une contradiction. .... $\boxed{3}$

I.2. a. Prouvons tout d'abord l'unicité :
En écrivant le produit de Cauchy de B par A on obtient les égalités :

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \text{ et } a_0 = \lambda. \tag{1}$$

Ces relations permettent de prouver l'unicité par récurrence. .... $\boxed{2}$

Si $r < R$ alors $|b_n|r^n \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |b_k|r^k = C$ qui converge, on a bien le premier résultat. ..... $\boxed{1}$
Prouvons maintenant par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$|a_n| \leqslant |\lambda| r^{-n} \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{Cr-1}{i}\right). \tag{2}$$

Pour $n = 1$: $|a_1| = |a_0 b_1| \leqslant |\lambda|.\dfrac{C}{r} = |\lambda|.r^{-1}(1 + \dfrac{Cr-1}{1})$.
On fait l'hypothèse de récurrence

$$0 \leqslant k \leqslant n, \quad |a_k r^k| \leqslant |\lambda| P_k(Cr)$$

où $P_k(X) = \prod\limits_{i=1}^{k}\left(1 + \dfrac{X-1}{i}\right) = \dbinom{X}{i}$, $P_0(X) = 1$.
À l'ordre $n+1$, on a

$$|a_{n+1}r^{n+1}| \leqslant \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |a_k r^k|.|b_{n-k}r^{n-k}| \leqslant \frac{Cr}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |\lambda| P_k(Cr)$$

Il suffit donc de prouver que

$$P_{n+1}(X) = \frac{X}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_k(X) = Q(X).$$

Cette dernière propriété se prouve par une récurrence triviale.
En effet, elle est vraie pour $n = 0$.
Si $\dfrac{X}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} P_k(X) = P_n(X)$ alors

$$\begin{aligned}\frac{X}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_k(X) &= \frac{n}{n+1}P_n(X) + \frac{X}{N+1}P_n(X) \quad \text{en appliquant l'hyp. de réc.}\\ &= \frac{X+n}{n+1}P_n(X) = P_{n+1}(X)\end{aligned}$$

$\boxed{4}$

On a donc $|a_n| \leqslant |\lambda| P_n(Cr) r^{-n} = A_n$ or

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{P_{n+1}(Cr)}{P_n(Cr)}\frac{r^n}{r^{n+1}} = \left(1 + \frac{Cr-1}{n+1}\right)\frac{1}{r} \to \frac{1}{r}$$

ce qui nous permet d'affirmer que la série $A(z)$ a un rayon de convergence $\geqslant r$, pour tout $r < R$, il est donc $\geqslant R$. .... $\boxed{3}$

Vu les relations de récurrence, on vérifie que A répond bien à la question. .... $\boxed{2}$

b. On a $\forall z_0 \in C(O,r)$, $\forall t \in [0,1]$, $A'(z_0t) = f'(z_0t)A(z_0t)$ et $A(0) = e^{f(0)}$ d'où $A(z_0t) = e^{f(z_0t)}$ et on sait dans ce cas que A_0 est D.S.E. donc

$$\forall z \in D(0,r), \quad e^{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad \boxed{4}$$

I.3. a. F est continue car composée des applications continues $z \mapsto f(z)$ et $(r,\theta) \mapsto re^{i\theta}$. . . . . . $\boxed{1}$
Pour prouver que F est de classe $\mathcal{C}^1$, on écrit

$$F(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

et on remarque que, pour r dans un compact de $D(0,R)$ et θ dans $\mathbb{R}$, les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n r^{n-1} e^{in\theta} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} ina_n r^n e^{in\theta}$$

convergent normalement donc F admet des dérivées partielles continues. F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,R[\times\mathbb{R}$. . . . . $\boxed{2}$
On a de plus

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n r^{n-1} e^{in\theta} \text{ et } \frac{\partial F}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{+\infty} ina_n r^n e^{in\theta}$$

d'où la relation demandée. . . . . $\boxed{1}$

b. Soit $r \in [0,R[$, la fonction $\dfrac{1}{F(r,\theta)}$ est 1-périodique, de classe C^1, elle est donc égale à la somme de sa série de Fourier. On a bien

$$\frac{1}{F(r,\theta)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} B_n(r) e^{2i\pi\theta} \qquad \boxed{2}$$

avec $B_n(r) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2in\pi\theta}}{F(r,\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.
$\dfrac{1}{F}$ étant de classe C^1 sur $]0,R[\times\mathbb{R}$, on peut dériver sous le signe $\int$ d'où :

$$B_n'(r) = -\int_0^1 \frac{\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)}{F(r,\theta)^2} e^{-2i\pi n\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{i}{2\pi r}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{F(r,\theta)}\right) e^{-2i\pi n\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

en utilisant l'équation du a.
En intégrant par parties, compte tenu de la périodicité, on obtient :

$$B_n'(r) = \frac{n}{r} B_n(r). \qquad \boxed{3}$$

c. En intégrant l'équation différentielle précédente, on peut écrire $B_n(r) = g_n r^n$ pour $r \in]0,R[$.
Or B_n est continue sur $[0,R[$ donc $g_n = 0$ pour $n < 0$, on a donc

$$\forall (r,\theta) \in [0,R[\times\mathbb{R},\ \frac{1}{F(r,\theta)} = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n (re^{2i\pi\theta})^n$$

et, en posant $z = re^{2i\pi\theta}$ et $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n z^n$ (qui a nécessairement un rayon de convergence $\geqslant R$), on a

$$\forall z \in D(0,R),\ f(z)g(z) = 1. \qquad \boxed{3}$$

d. Soit h la série entière définie par :

$$h(0)=a \quad h'(z)=f'(z)g(z).$$

On sait que $e^{-h(z)}=H(z)$ est une série entière (d'aprés le 2.b). On considère alors la série entière $f(z)H(z)=K(z)$.
Pour tout x de $]-R,R[$, $K'(x)=0$ et, en reprenant l'argument du 2.b, $K'(z)=0$ pour $z\in D(0,R)$, i.e. $K(z)=1$ et donc

$$\forall z\in D(0,R),\quad e^{h(z)}=f(z). \qquad \boxed{4}$$

Deuxième partie

II.1. **a.** K_h est bien une application linéaire, il suffit en fait de vérifier que $K_h(\varphi)\in\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.
$K_h(\varphi)$ est bien continue grâce au théorème de continuité sous le signe $\int$.
Vu que $h(x+1,y)=h(x,y)$ la 1-périodicité de $K_h(\varphi)$ en découle immédiatement....... $\boxed{2}$

b. C'est une application directe de l'inégalité d'Hadamard :

$$|\Lambda^n f(x_1,\dots,y_n)| \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(x_i,y_j)|^2\right)^{1/2} \leqslant n^{\frac{n}{2}}\left(\sup_{(x,y)\in[0,1]^2}|f(x,y)|\right)^n. \qquad \boxed{2}$$

en remarquant que

$$\forall(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2,\ |f(x_0,y_0)|=|f(x_0-E(x_0),y_0-E(y_0))|\leqslant \sup_{(x,y)\in[0,1]^2}|f(x,y)|$$

On note par la suite $\Lambda^n f(t_1,\dots,t_n,t_1,\dots,t_n)$ sous la forme abrégée $\Lambda^n f(t_1,\dots,t_n)$.

c. Par une récurrence élémentaire, on a :

$$\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 \Lambda^n f(t_1,\dots,t_n,t_1,\dots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_n\right| \leqslant n^{\frac{n}{2}}\|f\|_\infty^n$$

et comme la série de terme général $\dfrac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}\|f\|_\infty^n$ converge (d'après le critère de d'Alembert), la série en question converge absolument par domination. .... $\boxed{3}$
Vu que $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ alors $\sup_{(x,y)\in[0,1]^2}|f(x,y)|=\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}|f(x,y)|$ donc

$$m(x,y)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1\cdots\int_0^1 \Lambda^{n+1}f(x,t_1,\dots,t_n,y,t_1,\dots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_n$$

converge normalement. Chacune des fonctions intervenant dans cette série est continue (on utilise le théorème de continuité sous le signe $\int$ assorti d'une récurrence) donc la somme est continue. .... $\boxed{2}$
On vérifie aussi que m est $\mathbb{Z}^2$-périodique. .... $\boxed{1}$

d. Dans la suite de cette partie, nous noterons $\displaystyle\int_n$ l'intégrale sur le pavé $[0,1]^n$.
En développant le déterminant $\Lambda_n(x,y)=\Lambda^{n+1}f(x,t_1,\dots,t_n,y,t_1,\dots,t_n)$ par rapport à la première ligne, on a :

$$\Lambda_n(x,y)=f(x,y)\Lambda^n f(t_1,\dots,t_n,t_1,\dots,t_n) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x,t_i)\Lambda^n f(t_1,\dots,t_n,y,\dots,\widehat{t_i},\dots,t_n). \quad (4)$$

On remarque ensuite que les intégrales $\displaystyle\int_n(-1)^i f(x,t_i)\Lambda^n f(t_1,\dots,t_n,y,\dots,\widehat{t_i},\dots,t_n)$ sont égales à $\displaystyle -\int_0^1\left(f(x,t)\int_{n-1}\Lambda^n f(t,t_1,\dots,t_{n-1},y,t_1,\dots,t_{n-1})\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_{n-1}\right)\mathrm{d}t$

(on a permuté $t_1,\dots,t_n$ en $t_i,t_1,\dots,\widehat{t_i},t_n$ par un cycle de signature $(-1)^{i-1}$ et on a posé $t_i\to t$, $t_1\to t_1$, ..., $t_{i-1}\to t_{i-1}$, $t_{i+1}\to t_i$, ..., $t_n\to t_{n-1}$.)
On utilise le résultat précédent et la relation (4) d'où

$$\begin{aligned}m(x,y)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg(&\frac{f(x,y)}{n!}\int_n \Lambda^n f(t_1,\dots t_n,t_1,\dots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_n\\ &-\frac{n}{n!}\int_0^1 f(x,t)\int_n \Lambda^n f(t,t_1,\dots,t_{n-1},y,t_1,\dots,t_{n-1})\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_{n-1}\Bigg)\end{aligned}$$

et comme on a convergence uniforme sur $[0,1]$, on peut permuter somme et intégration pour trouver

$$\begin{aligned}m(x,y)&=f(x,y)D(f)\\ &\quad-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1\left(f(x,t)\int_{n-1}\Lambda^n f(t,t_1,\dots,t_{n-1},y,t_1,\dots,t_{n-1})\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_{n-1}\right)\mathrm{d}t\\ &=f(x,y)D(f)-\int_0^1 f(x,t)m(t,y)\,\mathrm{d}t. \qquad (5)\end{aligned}$$

On obtient l'autre égalité de la même manière... .... 8+

e. Soit $e(x,y)=-\dfrac{m(x,y)}{D(f)}$, on va prouver que l'on a les égalités $(\mathrm{Id}+K_f)\circ(\mathrm{Id}+K_e)=\mathrm{Id}$ et $(\mathrm{Id}+K_e)\circ(\mathrm{Id}+K_f)=\mathrm{Id}$ ce qui permettra de répondre à la question.
On utilise la relation (5), soit $\varphi\in\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, alors

$$m(x,y)\varphi(y)+\left(\int_0^1 f(x,t)m(t,y)\,\mathrm{d}t\right)\varphi(y)=D(f)f(x,y)\varphi(y)$$

que l'on intégre sur $[0,1]$ par rapport à y :

$$\int_0^1 m(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1 f(x,t)\left(\int_0^1 m(t,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t=D(f)\int_0^1 f(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

grâce à Fubini. On obtient alors

$$(\mathrm{Id}+K_f)\circ K_m(\varphi)=D(f)K_f(\varphi)$$

ce qui donne la relation attendue.
Là aussi, on obtient l'autre égalité de la même manière. 6

II.2. a. On a $\Lambda^n(zf)(t_1,\dots,t_n)=z^n\Lambda^n f(t_1,\dots,t_n)$ donc la série définissant $D(zf)$ est une série entière qui converge pour tout z. Elle a donc un rayon de convergence infini, c.q.f.d. ... 2

b. On sait que

$$\Delta'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\int_n \Lambda^n f(t_1,\dots,t_n,t_1,\dots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_n\right)$$

et

$$\int_0^1 m(x,x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1\left(\int_n \Lambda^{n+1}f(x,t_1,\dots,t_n,x,t_1,\dots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_n\right)\mathrm{d}x$$

et on remarque que ces deux quantités sont bien égales (en changeant l'indice de sommation et en renommant les variables). 2

On calcule ensuite

$$(\mathrm{Id}+K_f)^{-1}\circ K_f=(\mathrm{Id}+K_e)\circ K_f=(\mathrm{Id}+K_e)\circ(\mathrm{Id}+K_f)-\mathrm{Id}-K_e=-K_{-e},$$

il suffit donc de prendre $\sigma=-e=\dfrac{m}{D(f)}$. 2

On a alors immédiatement
$$\int_0^1 \sigma(x,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Delta(1)}\int_0^1 m(x,x)\,\mathrm{d}x. \qquad \boxed{0}$$

II.3. a. Soit $\psi = K_f(\varphi)$ et $x \in \mathbb{R}$ alors
$$|\psi(x)-\psi(0)| \leqslant \int_0^1 |f(0,y)-f(x,y)|.|\varphi(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \|\varphi\|_\infty I(x)$$
où l'on a posé
$$I(x) = \int_0^1 |f(0,y)-f(x,y)|\,\mathrm{d}y. \qquad \boxed{2}$$
$I(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ grâce d'une part au théorème de continuité sous le signe $\int$ et d'autre part à la périodicité de f. . . . . $\boxed{1}$
On vérifie aussi que $I(0) = 0$.

b. Si $I = 0$, l'ensemble $K_f(\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$ ne contient que des fonctions constantes, K_f ne peut être surjective. . . . . $\boxed{1}$
Si $I \neq 0$, on va montrer par l'absurde que $\sqrt{I}$ ($I \geqslant 0$) n'appartient pas à l'image de K_f :
Si $\sqrt{I} \in \mathrm{Im}(K_f)$ alors il existe $C > 0$ telle que $\sqrt{I(x)} \leqslant CI(x)$ pour tout réel x.
Soit $O = \{x \in \mathbb{R} | I(x) \neq 0\}$, O est un ouvert non vide et distinct de $\mathbb{R}$ ($I(0) = 0$). Soit a un point d'accumulation de O, on sait alors qu'il existe une suite $(a_n) \in O^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a.
On aura alors $\dfrac{1}{\sqrt{I(a_n)}} \leqslant C$ ce qui est impossible car $I(a_n) \to 0$. . . . . $\boxed{4}$

c. $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach et vu que
$$\|K_f(\varphi)\| \leqslant \|f\|_\infty.\|\varphi\|_\infty$$
K_f est bien un endomorphisme continu de E.
Par contraposée de la question **II.1.e**, si $\mathrm{Id} - \frac{1}{\lambda}K_f$ n'est pas bijectif alors $D(-\frac{1}{\lambda}f) = 0$. Or, si $\lambda > \|K_f\|$ alors $\mathrm{Id} - \frac{1}{\lambda}K_f$ est inversible donc $\mathrm{Sp}(K_f) \subset \overline{D(0, \|K_f\|}$ qui est compact. On sait alors (**I.1.d**) que $D(zf) = \Delta(z)$ n'a qu'un nombre fini de 0 dans tout compact.
Conclusion : $\mathrm{Sp}(K_f)$ est fini donc compact. . . . . $\boxed{2}$

Troisième partie

III.1. a. Soient T et T' deux éléments de $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, (u_n) et (v_n) (respectivement (u'_n) et (v'_n)) deux suites d'éléments de $\mathcal{H}$ satisfaisant aux conditions (Tr 1) et (Tr 2) relativement à T (respectivement à T').
Soit B la boule unité fermée de $\mathcal{H}$ et v dans B. Moyennant les hypothèses et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a
$$\|Tv\| = \lim_{n\to+\infty}\left\|\sum_{n=0}^{N} < u_n, v > v_n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\|u_n\|.\|v_n\|,$$
donc T est borné sur B et en conséquence continu.
On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{2n} = u_n,\ a_{2n+1} = u'_n,\ b_{2n} = v_n,\ b_{2n+1} = v'_n.$$
On vérifie aisément que les suites (a_n) et (b_n) ont les propriétés (Tr 1) et (Tr 2) pour $T+T'$. Les autres propriétés étant évidentes, on peut conclure $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. . . . . $\boxed{4}$
La démonstration de la continuité de T nous donne $\|T\| \leqslant \|T\|_1$. . . . . $\boxed{1}$

b. $\|.\|_1$ est positive et l'inégalité $\|.\|_1 \geqslant \|.\|$ montre que $\|T\|_1 = 0 \Rightarrow T = 0$.
Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, l'application $((u_n),(v_n)) \mapsto ((\lambda u_n),(v_n))$ établit une bijection entre les suites qui satisfont à (Tr 1) et (Tr 2) pour $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ et celles qui vérifient les mêmes propriétés pour λT, donc $\|.\|_1$ est positivement homogène.
Avec les notations du **a)** on voit que

$$\|T + T'\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|.\|b_n\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.\|v_n\| + \sum_{n=0}^{+\infty} \|u'_n\|.\|v'_n\|$$

par conséquent

$$\|T + T'\|_1 \leqslant \|T\|_1 + \|T'\|_1$$ $\boxed{3}$

c. Si (u_n) et (v_n) vérifient (Tr 1) et (Tr 2) pour $T' \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ alors, pour $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} \|u_n\|.\|Tv_n\| \leqslant \|T\| \sum_{n=0}^{N} \|u_n\|.\|v_n\|$$

donc la série à termes positifs $\sum \|u_n\|.\|Tv_n\|$ converge.
La continuité de T nous assure ensuite que, pour tout $v \in \mathcal{H}$

$$T(T'(v)) = \lim_{N \to +\infty} T\left(\sum_{n=0}^{N} < u_n, v > v_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} < u_n, v > T(v_n).$$

On en déduit que les suites (u_n) et (Tv_n) font de $T \circ T'$ un élément de $\mathcal{H}$. . . . . $\boxed{3}$

III.2. a. Pour tout k de $\mathbb{N}$ on a

$$0 \leqslant | < e_k, v_1 > |.| < e_k, v_2 > | \leqslant \frac{1}{2}(| < e_k, v_1 > |^2 + | < e_k, v_2 > |^2),$$ $\boxed{2}$

d'où la convergence de la série $\sum | < e_k, v_1 > |.| < e_k, v_2 > |$ par domination. Pour la deuxième égalité, il suffit d'écrire la formule de polarisation

$$< v_1, v_2 >= \frac{1}{4}\left(\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2 + i\|v_1 - iv_2\|^2 - i\|v_1 + iv_2\|^2\right)$$

et d'écrire, pour chacun des vecteurs v du membre de droite,

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} | < e_k, v > |^2$$ $\boxed{3}$

b. $\sum | < u_n, v_n > |$ converge par l'inégalité de Schwarz.
$\sum | < e_k, Te_k > |$ converge et l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} < u_n, v_n >= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} < e_k, Te_k >$ sont des conséquences du théorème de sommation des séries doubles.
En effet, soit $U_{k,n} =< e_k, u_n >< e_k, v_n >$ alors, en appliquant Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{k=0}^{K} | < e_k, u_n >< e_k, v_n > | \leqslant \left(\sum_{k=0}^{K} | < e_k, u_n > |^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{K} | < e_k, v_n > |^2\right)^{1/2}$$

donc $\sum_k |U_{k,n}|$ converge et sa somme est majorée par

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} | < e_k, u_n > |^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} | < e_k, v_n > |^2\right)^{1/2} = \|u_n\|.\|v_n\|.$$

Vu que la série $\sum \|u_n\|.\|v_n\|$ converge, on en déduit que l'on peut intervertir les sommations

$$\sum_{k=0}^{+\infty} < e_k, Te_k > = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} < e_k, \overline{< e_k, u_n >} v_n >\right) \text{ par continuité de } < e_k, . >$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{< e_k, u_n >} < e_k, v_n >\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \overline{< e_k, u_n >} < e_k, v_n >\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} < u_n, v_n > \text{ avec } \mathbf{a)}$$

ce qui assure la convergence de la série $\sum | < e_k, Te_k > |$ et prouve l'égalité. 4

Comme (e_k), (u_n), (v_n) sont choisis indépendamment, $\mathrm{Tr}(T)$ ne dépend que de T. 1

c. Avec la définition et les résultats du **b)**, on a $|\,\mathrm{Tr}(T)| \leqslant \|T\|_1$. 1

Les normes $\|.\|$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes. En effet, soit $N \in \mathbb{N}$ et posons

$$u_k = v_k = e_k \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant N, \quad u_k = v_k = 0 \text{ pour } k \geqslant N+1$$

et, pour $x \in E$, $T_N(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} < e_k, x > e_k$.

$T_N \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ et $\forall x \in E$, $\|T_N(x)\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{N} | < e_k, x > |^2 \leqslant \|x\|^2$. On en déduit que $\|T_N\| \leqslant 1$ puis $|\,\mathrm{Tr}(T)| \leqslant \|T_N\|_1$ soit $\|T\|_1 \geqslant \sum\limits_{k=0}^{N} | < u_k, v_k > | = N+1$ donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \|T_N\|_1 = +\infty$, les normes ne sont pas équivalentes. 3

III.3. a. Posons $e_k(x) = \mathrm{e}^{2\pi ikx}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Il suffit alors d'appliquer la formule de Parseval (quitte à se réindexer les termes de la suite pour se ramener à $\mathbb{N}$. 2

b. L'application $f(x, .)$ est 1-périodique et de classe $\mathcal{C}^2$ donc on sait que

$$f_n(x) = \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{e}^{-2\pi iny}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{(2\pi in)^2}\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathrm{e}^{-2\pi iny}\,\mathrm{d}y$$

et en posant $M = \sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \left\|\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right\|$ alors $\|f_n\| \leqslant \dfrac{M}{n^2}$.

Toujours avec la fonction $f(x, .)$ qui est somme uniforme de sa série de Fourier car elle est de classe $\mathcal{C}^2$, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ qui est une fonction bornée, on a la convergence normale de la série dans l'intégrale qui intervient ci-dessous, donc

$$K_f(\varphi)(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{e}^{2\pi iky}\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} < e_k, \varphi > f_k(x).$$

De plus, pour $k \in 0$, $|f_k(x)| \leqslant \dfrac{M}{k^2}$ et φ est bornée, donc la série ci-dessus converge normalement pour $x \in \mathbb{R}$. On a, a fortiori, convergence dans $(\mathcal{H}, < ., . >)$. Il suffit alors de prendre $u_k = e_k$ et $v_k = f_k$ pour conclure à $K_f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$. 3

Toujours grâce à la convergence normale des séries, on peut alors écrire

$$\mathrm{Tr}\, K_f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} < u_k, v_k > = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi ikx} f_k(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi ikx} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x,x)\,\mathrm{d}x$$

en utilisant le développement en série de Fourier de $f(x, .)$. 1