SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ 4H/6H

Soit x_0 un réel strictement positif fixé dans tout le problème, les fonctions étudiées seront définies sur $[x_0, +\infty[$ et à valeurs complexes.

- On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications continues sur $[x_0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$,
- On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des applications continues sur $[x_0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ qui sont bornées.
- Soit f un élément de $\mathcal{C}$, on dit que f admet un développement asymptotique en $+\infty$ (en abrégé un DA) lorsqu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes telle que l'on ait pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$
On note alors cette propriété $f(x) \approx \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{-n}$ (attention, il se peut que la série que l'on vient d'écrire soit divergente).
- On note enfin $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions continues sur $[x_0, +\infty[$ admettant un DA (sous-entendu que l'on se place toujours en $+\infty$).

Partie I - Opérations sur les DA

Toutes les applications considérées ici sont des éléments de $\mathcal{C}$.

I.1. Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$.

I.2. **a.** Soit f un élément de $\mathcal{A}$, montrer l'unicité des a_n figurant dans le développement asymptotique de f.

b. Donner un exemple d'application f qui ne s'annule pas sur $[x_0, +\infty[$ et qui admet un DA à coefficients tous nuls.

I.3. Soient f et g dans $\mathcal{A}$, étudier l'existence des DA de $f+g$, fg, $\dfrac{1}{f}$.

I.4. Soit f une application de classe C^1 de $[x_0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ telle que f' est dans $\mathcal{A}$. Si $f'(x) \approx \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^{-n}$, à quelle condition sur les c_n l'application f admet-elle un DA. Quels en sont les coefficients ?

Donner un exemple de fonction f C^∞ de $\mathcal{A}$ telle que $f' \notin \mathcal{A}$.

Partie II - Étude de certaines fonctions définies par des intégrales

- On note Ω l'ensemble des (α, β) de $\mathbb{C}^2$ tels que $\Re(\alpha) > 0$, β étant quelconque.
- Soit (α, β) un élément de Ω, on note $a = \Re(\alpha)$ et $b = \Re(\beta)$. On pose
$$\psi_\beta(x) = e^{\alpha x} x^\beta, \quad \varphi_\beta(x) = \frac{1}{\psi_\beta(x)}, \quad J_\beta(x) = \int_{x_0}^{x} \psi_\beta(t)\,\mathrm{d}t$$
et
$$Q_\beta(x) = \frac{J_\beta(x)}{\psi_\beta(x)}$$
où $x \in [x_0, +\infty[$.

II.1. **a.** Trouver une relation entre $J_\beta(x)$, $J_{\beta-1}(x)$, $\psi_\beta(x)$, $\psi_\beta(x_0)$.

b. Montrer que $J_\beta(x) \sim \dfrac{1}{\alpha}\psi_\beta(x)$ (commencer par traiter le cas où α et β sont réels).

c. En déduire que Q_β est dans $\mathcal{A}$ et que

$$Q_\beta(x) \approx \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\beta(\beta-1)(\ldots)(\beta-n+1)}{\alpha^{n+1}x^n}.$$

II.2. **a.** Montrer que φ_β est intégrable sur $[x,+\infty[$, on pose $I_\beta(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi_\beta(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Trouver une relation entre $I_\beta(x)$, $I_{\beta+1}(x)$ et $\varphi_\beta(x)$.

II.3. On pose $P_\beta(x) = \dfrac{I_\beta(x)}{\varphi_\beta(x)}$.

a. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P_\beta(x) = \frac{1}{\alpha}$.

b. Montrer que P_β est dans $\mathcal{A}$ et expliciter son DA.

Partie III - Une équation intégrale

- On note Δ l'ensemble des $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_0 \leqslant x \leqslant t$.
- Soit K une application continue bornée de Δ dans $\mathbb{C}$. On pose $A = \displaystyle\sup_{(x,t)\in\Delta} |K(x,t)|$ et, pour tout g de $\mathcal{B}$: $\|g\| = \displaystyle\sup_{t\geqslant x_0} |g(t)|$.

III.1. Soit $h \in \mathcal{B}$, on pose $\mathrm{T}h(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{K(x,t)h(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Prouver que $\mathrm{T}h(x)$ est bien définie.

b. Montrer que, pour $x \geqslant x_0$, $|\mathrm{T}h(x)| \leqslant A\dfrac{\|h\|}{x}$. Montrer que $\mathrm{T}h$ est un élément de $\mathcal{B}$.

c. Prouver que l'application $\mathrm{T} : h \in \mathcal{B} \mapsto \mathrm{T}h \in \mathcal{B}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$.

III.2. On rappelle que T^0 est l'application identique de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$.

a. Montrer la convergence normale de la série de fonctions $g = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{T}^n h$ sur $[x_0,+\infty[$, $h \in \mathcal{B}$.

b. Montrer que $g \in \mathcal{B}$ et que g est l'unique élément de $\mathcal{B}$ tel que $g - \mathrm{T}g = h$.

Partie IV - DA de la solution d'un problème du type précédent

On fixe ici un élément (α,β) de Ω. On pose pour tout (x,u) de Δ :

$$L(x,u) = \int_x^u \exp[2\alpha(t-u)] \left(\frac{t}{u}\right)^{2\beta} \mathrm{d}t \text{ et } L_0(u) = L(x_0,u).$$

IV.1. **a.** Montrer que L est continue sur Δ (démonstration élémentaire).

b. Prouver que $\theta : (t,u) \mapsto \exp[2\alpha(t-u)] \left(\dfrac{t}{u}\right)^{2\beta}$ est bornée sur Δ.

En déduire que L est bornée sur Δ (en écrivant $L = L_0 - \theta L_0$).

IV.2. **a.** Soit n un entier naturel quelconque. Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{L(x,u)}{u^{n+2}}\,\mathrm{d}u$ admet un DA.

b. Soit ρ une application continue de $[x_0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ admettant un développement limité généralisé à l'ordre n en $+\infty$.
Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{L(x,u)\rho(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ admet un développement limité généralisé à l'ordre $n+1$ en $+\infty$.

IV.3. Soit F un élément de $\mathcal{A}$ et λ un complexe quelconque.

a. Montrer qu'il existe une et une seule application g, élément de $\mathcal{B}$, telle que, pour tout $x \geqslant x_0$,

$$g(x) = \lambda - \int_x^{+\infty} \frac{F(u)L(x,u)}{u^2} g(u)\,\mathrm{d}u,$$

et que g admet un DA.

b. Montrer que g est de classe C^1 sur $[x_0, +\infty[$ et que

$$g'(x) = \int_x^{+\infty} \exp[2\alpha(x-u)] \left(\frac{x}{u}\right)^{2\beta} \frac{F(u)g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

c. En déduire que g' admet un DA.

FIN DES 4 H.

Partie V - Solutions normales de $(\mathcal{E})$: $y'' + qy = 0$

- On appelle $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ qui ont une limite non nulle en $+\infty$.
- Soit q un élément de $\mathcal{A}^*$, $q(x) \approx \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{-n}$ vérifiant $a_0 \neq 0$.
- On dit que f, solution de $(\mathcal{E})$ est normale s'il existe (α, β) dans $\mathbb{C}^2$ tel que

$$f(x) = e^{-\alpha x} x^{-\beta} g(x)$$

pour $x \geqslant x_0$, où g est dans $\mathcal{A}^*$, g' dans $\mathcal{A}$.
- On dit que le couple (α, β) est normal s'il existe au moins une solution normale f de $(\mathcal{E})$ qui lui est associée. On suppose dans cette partie que (α, β) et f sont ainsi choisis.
- On pose $g(x) \approx \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^{-n}$, $c_0 \neq 0$.

V.1. **a.** Écrire l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{\alpha,\beta})$ transformée de $(\mathcal{E})$ par le changement de fonction inconnue $y = e^{-\alpha x} x^{-\beta} z$.

b. En déduire que g'' est dans $\mathcal{A}$.

V.2. **a.** Montrer que (α, β) vérifie (S) : $\begin{cases} \alpha^2 = -a_0 \\ 2\alpha\beta = -a_1 \end{cases}$, les coefficients c_n du DA de g étant alors définis par une relation de récurrence à préciser.
Que peut-on dire de l'ensemble des suites (c_n) vérifiant cette relation ?

b. Montrer qu'il existe exactement deux couples (α, β) vérifiant (S) et discuter leur appartenance à Ω.

Partie VI - Développement des solutions de ($\mathcal{E}$)

- On suppose désormais que $a_0 \in]-\infty, 0[$ (a_0 est le premier terme dans le DA de q).
- On note (α, β) le seul élément de Ω qui vérifie (S).

VI.1. Montrer que $(\mathcal{E}_{\alpha,\beta})$ peut s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varphi(x)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{\varphi(x)}{x^2}F(x)z = 0,$$

où $\varphi(x) = e^{-2\alpha x}x^{-2\beta}$, F un élément de $\mathcal{A}$ à préciser.

VI.2. On note encore L la fonction définie au IV. Soient g une solution bornée de $(\mathcal{E}_{\alpha,\beta})$, (x, X) un élément de Δ. Montrer les propriétés suivantes :

a. $\varphi(X)g'(X) - \varphi(x)g'(x) = -\displaystyle\int_x^X \frac{\varphi(t)F(t)g(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t,$
b. $\varphi g'$ a une limite l en $+\infty$,
c. g' tend vers 0 en $+\infty$,
d. $g'(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{F(t)g(t)}{t^2}e^{2\alpha(x-t)}\left(\frac{x}{t}\right)^{2\beta}\mathrm{d}t.$

VI.3. Montrer que :

a. $g(X) - g(x) = g'(X)L(x, X) + \displaystyle\int_x^X \frac{L(x,t)F(t)g(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t,$
b. g a une limite λ en $+\infty$ et $g(x) = \lambda - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{L(x,t)F(t)g(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

VI.4. a. Montrer que ($\mathcal{E}$) admet une et une seule solution normale bornée f, à un facteur multiplicatif près.
b. Montrer enfin que toute solution non nulle de ($\mathcal{E}$) qui n'est pas du type précédent est normale, non bornée (effectuer dans ($\mathcal{E}$) le changement de fonction $y = fw$ où f est normale, bornée, non nulle).

Partie VII - DA des fonctions d'Airy

Soient m un réel strictement supérieur à -2, λ un nombre complexe de partie réelle strictement positive et $(\mathcal{E}_0)$ l'équation différentielle : $y'' - \lambda^2 x^m y = 0$.

VII.1. On effectue le changement de variable : $t = \displaystyle\int_0^x u^{m/2}\,\mathrm{d}u$ et le changement de fonction inconnue : $y = x^{-m/4}z$.

Montrer que $(\mathcal{E}_0)$ se transforme en $(\mathcal{E}_1)$: $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \left(\dfrac{k}{t^2} - \lambda^2\right)z = 0$ où k est une constante à préciser.

VII.2. Indiquer les coefficients des DA intervenant dans les solutions de $(\mathcal{E}_1)$.

VII.3. Traiter complètement l'exemple $y'' - xy = 0$:

on obtient des fonctions $f(x) = ce^{-\alpha x}x^{-\beta}g(x)$ avec $g(x) \approx \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^{-n}$.

Étudier pour chacune la convergence de la série entière de terme général $c_n t^n$.