SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 4H/6H

Partie I $\boxed{24}$

I.1. On sait que toute fonction continue sur $[x_0, +\infty[$ qui admet une limite en $+\infty$ est bornée donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. . . . . $\boxed{1}$

$\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$: prendre par exemple $f(x) = \sin x$. . . . . $\boxed{1}$

I.2. **a.** On pose $g(x) = f(1/x)$ et on définit $g(0) = a_0$ alors g admet un développement limité à tout ordre. On utilise ensuite l'unicité du développement limité. . . . . $\boxed{2}$

b. Soit $f(x) = e^{-x}$ alors $g(x) = e^{-1/x} = o(x^n)$ donc g admet un développement limité à tout ordre dont les coefficients sont tous nuls. $\boxed{2}$

I.3. Pour $f + g$, il suffit d'additionner terme à terme les éléments des DA de f et g. . . . . . $\boxed{1}$

Pour fg, on utilise le produit de convolution : le coefficient c_n du DA de fg s'écrira $c_n = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$. . . . . $\boxed{2}$

Enfin, $\dfrac{1}{f}$ admet un DA ssi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$. $\boxed{2}$

Les coefficients du DA de $\dfrac{1}{f}$ s'obtiendront à partir du développement limité de $f(1/x)$. $\boxed{2}$

I.4. Il faut que f' soit intégrable sur $[x_0, +\infty[$ ce qui impose $c_0 = c_1 = 0$. Dans ce cas f admet une limite en $+\infty$, soit $b_0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. . . . . $\boxed{1}$

Montrons que cette condition est suffisante :

soit n un entier supérieur ou égal à 2, on a

$$f'(t) - \sum_{p=2}^{n} c_p t^{-p} = t^{-n}\varphi(t)$$

où $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$. On traduit cette dernière hypothèse :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists X \mid \forall t \geqslant X,\ |\varphi(t)| \leqslant \varepsilon$$

On intègre alors cette égalité de x à $+\infty$ pour $x \geqslant X$, ce qui donne

$$\left| \int_x^{+\infty} \left(f'(t) - \sum_{p=2}^{n} c_p t^{-p} \right) \mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_x^{+\infty} t^{-n}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_x^{+\infty} t^{-n}\varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon \frac{x^{-n+1}}{n+1}$$

et en intégrant le membre de gauche, on obtient

$$f(x) - b_0 - \sum_{q=1}^{n-1} \frac{c_{q+1}}{q} x^{-q} = o(x^{-n+1})$$

d'où l'équivalence. . . . . $\boxed{5}$

On peut donc conclure, f admet un DA à tout ordre, ses coefficients sont donnés par la relation ci-dessus. . . . . $\boxed{1}$

Contre-exemple : $f(x) = e^{-x} \sin e^x$, $f'(x) = -f(x) + \cos(e^x)$ et comme $\cos e^x$ n'est pas dans $\mathcal{A}$, on tient bien notre contre-exemple. 4

Partie II 23

II.1. a. Après une intégration par parties, on trouve

$$\psi_\beta(x) - \psi_\beta(x_0) = \alpha J_\beta(x) + \beta J_{\beta-1}(x). \qquad 2$$

b. On utilise dans un premier temps le résultat du **a** : comme pour la question **I.4**, vu que $\psi_{\beta-1}(t) = o(\psi_\beta(t))$, alors $J_{\beta-1}(x) = o(J_\beta(x))$ et comme $\psi(x_0)$ est une constante, on a bien $J_\beta(x) \sim \dfrac{1}{\alpha}\psi_\beta(x)$. 4

Étudions le cas complexe : $|J_{\beta-1}(x)| \leqslant \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{at} t^{b-1}\,\mathrm{d}t \sim |\psi_{\beta-1}(x)|$ (grâce à ce qu'on vient juste de faire !). On a cette fois-ci $J_{\beta-1}(x) = o(\psi_\beta(x))$ donc la conclusion persiste. 3

c. D'après le **II.1.a**, $Q_\beta(x) = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha x} Q_{\beta-1}(x) + K_1 e^{-\alpha x} x^{-\beta}$. On remarque que $K_1 e^{-\alpha x} x^{-\beta} = o(x^{-n})$ pour tout n (car $\Re(\alpha) > 0$). 1

et on poursuit le développement :

$$Q_\beta(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2 x} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\beta(\ldots)(\beta-n+2)}{\alpha^n x^{n-1}} + (-1)^n \frac{\beta(\ldots)(\beta-n+1)}{\alpha^n x^n} Q_{\beta-n}(x) + K_n e^{-\alpha x} x^{-\beta}$$

On exprime ensuite que $Q_{\beta-n}(x) = \dfrac{1}{\alpha} + o(1)$ ce qui donne le développement asymptotique annoncé. 3

Finalement, comme Q_β est continue, on peut conclure $Q_\beta \in \mathcal{A}$. 1

II.2. a. Évident ! 1

b. On intègre par parties : $\alpha \displaystyle\int_x^X \varphi_\beta(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_x^X \varphi_{\beta+1}(t)\,\mathrm{d}t = e^{-\alpha x} x^{-\beta} - e^{-\alpha X} X^{-\beta}$. Alors, en passant à la limite, on obtient la relation :

$$\alpha I_\beta(x) + \beta I_{\beta+1}(x) = \varphi_\beta(x). \qquad 2$$

II.3. a. On a $|I_\beta(x)| \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} t^{-\beta}\,\mathrm{d}t$. La relation du **a** est toujours valable en prenant a et b à la place de α et β, comme $I_{b+1}(x) = o(I_b(x))$ on en déduit que $I_b(x) \sim \dfrac{1}{a} e^{-ax} x^{-b}$.

Première conclusion : $\dfrac{|I_\beta(x)|}{|\varphi_\beta(x)|}$ est borné et $\dfrac{|I_{\beta+1}(x)|}{|\varphi_\beta(x)|} = o(1)$.

Finalement $I_\beta(x) \sim \dfrac{1}{\alpha}\varphi_\beta(x)$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P_\beta(x) = \frac{1}{\alpha}$. 3

b. On utilise la relation du **II.2.b** : $P_\beta(x) = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{\beta}{\alpha x} P_{\beta+1}(x)$ et par une récurrence immédiate :

$$P_\beta(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2}x + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\beta(\beta+1)(\ldots)(\beta+n-2)}{\alpha^n x^{n-1}} + (-1)^n \frac{\beta(\beta+1)(\ldots)(\beta+n-1)}{\alpha^n x^n} P_{\beta+n}(x).$$

On utilise le résultat du **a.** pour conclure :

$$P_\beta(x) \approx \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\beta(\beta+1)(\ldots)(\beta+n-1)}{\alpha^{n+1}x^n}.$$ 3

Partie III 18

III.1. a. On a $\dfrac{|K(x,t)h(t)|}{t^2} \leqslant \dfrac{A\|h\|}{t^2}$ donc $t \mapsto \dfrac{K(x,t)h(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ et par conséquent $\mathrm{T}h$ est bien définie. 1

b. On a immédiatement (en utilisant l'inégalité ci-dessus) $|\mathrm{T}h(x)| \leqslant A\dfrac{\|h\|}{x}$. 1

Il reste à montrer que $\mathrm{T}h$ est continue :

$$\begin{aligned}|\mathrm{T}h(x+k) - \mathrm{T}h(x)| &= \left| \int_{x+k}^{x} \frac{K(x+k,t)h(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{[K(x+k,t)-K(x,t)]h(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \left| \int_{x+k}^{x} \frac{K(x+k,t)h(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \right| + \left| \int_x^{+\infty} \frac{[K(x+k,t)-K(x,t)]h(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \right|\end{aligned}$$

La première intégrale est majorée par $A\|h\| \left| \dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x} \right|$ qui tend vers 0, pour la deuxième, on utilise le théorème de Lebesgue de continuité sous le signe intégral

- $(k,t) \mapsto \dfrac{[K(x+k,t)-K(x,t)]h(t)}{t^2}$ est continue,
- $\left| \dfrac{[K(x+k,t)-K(x,t)]h(t)}{t^2} \right| \leqslant \dfrac{2A\|h\|}{t^2}$

donc $\lim\limits_{k\to 0} \mathrm{T}h(x+k) - \mathrm{T}h(x) = 0$ par conséquent $\mathrm{T}h$ est continue. 5

Remarque : il a fallu ici redémontrer le résultat de la remarque 6.2.7 (*iii*) page 269...

c. La linéarité provient de l'intégrale, la continuité est une conséquence de l'inégalité $|\mathrm{T}h(x)| \leqslant \dfrac{A}{x}\|h\| \leqslant \dfrac{A}{x_0}\|h\|$. 2

III.2. a. Par récurrence, on a $|\mathrm{T}^n h(x)| \leqslant \dfrac{A^n}{n!x^n}\|h\| \leqslant \dfrac{A^n}{n!x_0^n}\|h\|$ et comme la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A^n}{n!x_0^n}$ converge, on a bien la convergence normale. 4

b. Comme $\mathcal{B}$ est complet et que la série du **a** converge normalement, g est dans $\mathcal{B}$. . 2

Vu que T est continue, $\mathrm{T}g = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{T}^{n+1}h = g - h$ c.q.f.d. 1

Unicité : si g_1 et g_2 sont deux solutions alors, en posant $g = g_1 - g_2$ on a $g = \mathrm{T}g = \mathrm{T}^n g \to 0$ donc $g = 0$ soit $g_1 = g_2$. 2

Partie IV $\boxed{26}$

IV.1. **a.** On a $L(x,u) = e^{-2\alpha u}u^{-2\beta}\displaystyle\int_x^u e^{2\alpha t}t^{2\beta}\,dt$ ce qui permet d'affirmer que L est continue (et même C^∞). . . . . $\boxed{1}$

b. On a $A(x,u) = \left|\exp[2\alpha(t-u)]\left(\dfrac{t}{u}\right)^{2\beta}\right| = \dfrac{f(t)}{f(u)}$ où $f(t) = e^{2at}t^{2b}$. f' est du signe de $at+b$ et on étudie les deux cas suivants :

- f est croissante sur $[x_0, +\infty[$ et on majore A par 1,
- f atteint son minimum en $-\dfrac{b}{a}$ et on majore A par $\dfrac{f(x_0)}{f(-b/a)}$. . . . . $\boxed{4}$

On obtient ensuite : $L(x,u) = L_0(u) - \exp[2\alpha(x-u)]\left(\dfrac{x}{u}\right)^{2\beta} L_0(u)$. Comme $L_0(u)$ admet la limite $\dfrac{1}{\alpha}$ en $+\infty$, $L_0(u)$ est bornée et grâce au résultat que l'on vient de démontrer, on peut dire que $L(x,u)$ est bornée. . . . . $\boxed{2}$

IV.2. **a.** On utilise la relation : $L(x,u) = L_0(u) - \exp[2\alpha(x-u)]\left(\dfrac{x}{u}\right)^{2\beta} L_0(u)$. On a donc

$$\int_x^{+\infty}\frac{L(x,u)}{u^{n+2}}\,du = \int_x^{+\infty}\frac{L_0(u)}{u^{n+2}}\,du - \frac{L_0(x)}{x^{n+2}}\int_x^{+\infty}\exp[2\alpha(x-u)]\left(\frac{x}{u}\right)^{2\beta+n+2}du.$$

Comme $L_0(u) = Q_\beta(u)$, on sait que $L_0 \in \mathcal{A}$ d'après le **II.1.c** et que l'on peut intégrer de DA de $\dfrac{L_0(u)}{u^{n+2}}$ d'après le **I.4**. On remarque ensuite que la deuxième intégrale vaut $P_{2\beta+n+2}$ donc admet un DA d'après le **II.3.b**. . . . . $\boxed{4}$

On peut donc conclure que $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{L(x,u)}{u^{n+2}}\,du$ est dans $\mathcal{A}$.

b. Soit $\rho(u) = \displaystyle\sum_{q=0}^{n} b_q u^{-q} + u^{-n}\varepsilon(u)$ où ε est une fonction continue qui tend vers 0 en $+\infty$ (et qui est donc nécessairement bornée). On a alors

$$\int_x^{+\infty}\frac{L(x,u)\rho(u)}{u^2}\,du = \sum_{q=0}^{n} b_q\int_x^{+\infty}u^{-q-2}L(x,u)\,du + \int_x^{+\infty}\frac{L(x,u)\varepsilon(u)}{u^{n+2}}\,du.$$

La première quantité admet un DA donc admet un développement limité à l'ordre $n+1$. La deuxième, pour $\varepsilon > 0$ fixé est majoré par $\varepsilon \sup|L|\dfrac{1}{(n+1)x^{n+1}}$ si on choisit $x \geqslant X$. En conclusion, on a bien un DL à l'ordre $n+1$. . . . . $\boxed{3}$

IV.3. **a.** On applique les résultats du **III** ici en prenant $K(x,t) = -F(t)L(x,t)$ qui est continue, bornée. g existe donc bien et est unique. . . . . $\boxed{2}$

Il reste à prouver que $g \in \mathcal{A}$. g étant dans $\mathcal{B}$, $\left|\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{F(u)L(x,u)}{u^2}g(u)\,du\right| \leqslant \dfrac{K}{x}$ (car on peut majorer la fonction $u \mapsto \dfrac{F(u)L(x,u)}{u^2}g(u)$ par K). On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lambda$, g admet un DL à l'ordre 0.
On procède alors par récurrence sur n : si g admet un DL à l'ordre n, alors, en prenant $\rho(u) = F(u)g(u)$ et en appliquant le résultat du **IV.2.b**, on peut en déduire que g admet un DL à l'ordre $n+1$.

Conclusion : g admet bien un DA. 3

b. On a $g(x) = \lambda - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{L_0(u)F(u)g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u + \frac{L_0(x)}{\varphi^2(x)}\int_x^{+\infty} \frac{\varphi^2(u)F(u)g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ où $\varphi(x) = e^{-\alpha x}x^{-\beta}$ a été définie au **II**. On peut dire de façon élémentaire que g est dérivable. 2
Avec la même formule, on pourra dire que

$$g'(x) = \int_x^{+\infty} \exp[2\alpha(x-u)]\left(\frac{x}{u}\right)^{2\beta}\frac{F(u)g(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

donc g est de classe $\mathcal{C}^1$. 1

c. On sait que Fg est dans $\mathcal{A}$: $F(u)g(u) = \sum\limits_{q=0}^{n} \alpha_q u^{-q} + u^{-n}\varepsilon(u)$,

$$g'(x) = \sum_{q=0}^{n} \alpha_q \int_x^{+\infty} \exp[2\alpha(x-u)]\left(\frac{x}{u}\right)^{2\beta}\frac{1}{u^{2+q}}\,\mathrm{d}u + \int_x^{+\infty} \exp[2\alpha(x-u)]\left(\frac{x}{u}\right)^{2\beta}\frac{\varepsilon(u)}{u^{n+2}}\,\mathrm{d}u.$$

Les intégrales figurant dans la somme admettent un DA (elles sont égales à $P_{2\beta+q+2}$), le reste s'écrit sous la forme d'un $o\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)$ en faisant le même raisonnement qu'au **IV.2.b**. 4

Partie V 10

V.1. a. On obtient $z'' - 2\left(\alpha + \dfrac{\beta}{x}\right)z' + \left(\alpha^2 + q(x) + \dfrac{2\alpha\beta}{x} + \dfrac{\beta(\beta+1)}{x^2}\right)z = 0$. 2

b. $g''(x) = 2\left(\alpha + \dfrac{\beta}{x}\right)g'(x) + \left(\alpha^2 + q(x) + \dfrac{2\alpha\beta}{x} + \dfrac{\beta(\beta+1)}{x^2}\right)g(x)$, donc g'' est dans $\mathcal{A}$ comme somme et produit de fonctions de $\mathcal{A}$. 2

V.2. a. On sait que lorsque g, g' et g'' sont dans $\mathcal{A}$, leur DA s'obtiennent par dérivation formelle. En identifiant les coefficients constants et ceux de $\dfrac{1}{x}$, on obtient (S) (en tenant compte de l'hypothèse $c_0 \neq 0$). 1
De la même manière, l'identification des coefficients de x^{-n-2} donne :

$$-2\alpha(n+1)c_{n+1} = (n+\beta)(n+\beta+1)c_n + \sum_{k=0}^{n} a_{k+2}c_{n-k}. \qquad 2$$

Les c_n sont donc définis à un facteur multiplicatif près. 1

b. On a donc deux choix pour α (car $a_0 \neq 0$), ce qui donne deux choix pour le couple (α, β). 1
On aura un seul couple dans Ω ssi $a_0 \notin \mathbb{R}_+$. 1

Partie VI 26

VI.1. On écrit que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varphi\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) &= \varphi\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} - 2\left(\alpha + \frac{\beta}{x}\right)\varphi\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\\ &= -\varphi\left(\alpha^2 + q + 2\frac{\alpha\beta}{x} + \frac{\beta(\beta+1)}{x^2}\right)z.\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $F(x) = x^2(\alpha^2 + q(x)) + 2\alpha\beta x + \beta(\beta+1)$. . . . . $\boxed{2}$

F est dans $\mathcal{A}$ car les termes en x^2 et x s'éliminent. . . . . $\boxed{2}$

VI.2. **a.** Le résultat est immédiat en intégrant de x à X la relation du **VI.1**. . . . . $\boxed{1}$

b. L'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)F(t)g(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est bien définie car $\varphi F g$ est bornée par conséquent $t \mapsto \dfrac{\varphi(t)F(t)g(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$. . . . . $\boxed{1}$

On peut donc passer à la limite dans le **a.**, φg a bien une limite en $+\infty$ et on a la relation :

$$\varphi(x)g'(x) = l + \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)F(t)g(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t. \qquad \boxed{1}$$

c. D'après le **IV.1.b**, il existe M_1 tel que $\left|\dfrac{\varphi(t)}{\varphi(x)}\right| \leqslant M_1$ et on sait en outre que, pour tout t, $|F(t)g(t)| \leqslant M_2$ d'où $\left|g'(x) - \dfrac{l}{\varphi(x)}\right| \leqslant \dfrac{M_1M_2}{x} = \dfrac{M}{x}$. . . . . $\boxed{2}$

On a donc

$$\left|g(x) - g(x_0) - l\frac{1}{\varphi(x)}\int_{x_0}^x \frac{\varphi(x)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M \ln\frac{x}{x_0}.$$

On sait que $\displaystyle\int_{x_0}^x \frac{\varphi(x)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t \to \frac{1}{2\alpha}$ (cf. **II.3.a**) et dans tous les cas $\varphi(x)\ln x \to 0$.

Si $l \neq 0$ alors $\left|\dfrac{g(x)}{\ln x}\right| \to +\infty$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse g bornée.

Conclusion : $l = 0$. . . . . $\boxed{3}$

d. On reprend le **b** avec $l = 0$. . . . . $\boxed{1}$

VI.3. **a.** Il faut intégrer par parties : soit $\Phi(t) = \displaystyle\int_x^t \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)}$, alors $(\Phi\varphi)(t) = L(x,t)$, on utilise le **VI.2.d** :

$$\begin{aligned} g(X) - g(x) &= \int_x^X g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^X \left(\int_t^{+\infty} \frac{(Fg\varphi)(u)}{u^2\varphi(t)}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\Phi(t)\int_t^{+\infty} \frac{(Fg\varphi)(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u\right]_{t=x}^{t=X} + \int_x^X \frac{(\Phi Fg\varphi)(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \Phi(X)\int_X^{+\infty} \frac{(Fg\varphi)(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^X \frac{L(x,t)(Fg)(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On remarque alors que le premier terme est bien $(\Phi\varphi g')(X) = L(x,X)g'(X)$. . . . . $\boxed{3}$

b. L est bornée sur Δ et $g'(X) \to 0$ quand $X \to +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} L(x,X)g'(X) = 0$.

Dans la relation du **VI.3.a**, la fonction $t \mapsto \dfrac{L(x,t)(Fg)(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$, g admet donc une limite λ en $+\infty$ et on a bien

$$g(x) = \lambda - \int_x^{+\infty} \frac{L(x,t)(Fg)(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t. \qquad \boxed{1}$$

VI.4. **a.** On reprend le **IV.3.a**, $L(x,t)F(t)$ est continue bornée donc il existe une seule fonction g bornée satisfaisant l'égalité du **VI.3.b** pour λ donné. . . . . $\boxed{1}$

Si $\lambda = 0$, $g = 0$, on suppose maintenant que $\lambda \neq 0$:

alors, d'après le **IV.3**, g et g' sont dans $\mathcal{A}$, donc $f(x) = e^{-\alpha x}x^{-\beta}g(x)$ est normale ; f est bornée car $e^{-\alpha x}x^{-\beta}$ et $g(x)$ sont bornées.
Conclusion : pour λ donné, il existe une seule solution de $(\mathcal{E})$ f normale et bornée, l'ensemble donné est donc un espace vectoriel de dimension 1. $\boxed{2}$

b. Si f est non nulle, la fonction g associée admet une limite non nulle en $+\infty$, il existe donc x_1 tel que si $x \geqslant x_1$ alors $g(x)$ (et donc $f(x)$) ne s'annule pas.
Comme $f'' + qf = 0$ alors $(fw)'' + fw = 0$ implique $fw'' + 2f'w' = 0$. Cette dernière égalité permet d'affirmer qu'il existe une constante h non nulle telle que $w'(x) = \dfrac{h}{f^2(x)}$ (si $h = 0$ alors y est proportionnelle à f ce qui est écarté).
On pourra donc écrire $w'(x) = e^{2\alpha x}x^{2\beta}r(x)$ où r est dans $\mathcal{A}$ (tout ceci grâce aux opérations sur les DA) avec en prime $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x) \neq 0$.
On écrit $r(x) = \sum\limits_{q=0}^{n} \alpha_q x^{-q} + x^{-n}\theta(x)$ avec $\alpha_0 \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x) = 0$, d'où

$$w(x) - w(x_2) = \sum_{q=0}^{n} \alpha_q \int_{x_2}^{x} e^{2\alpha t}t^{2\beta-q}\,\mathrm{d}t + \int_{x_2}^{x} e^{2\alpha t}t^{2\beta-n}\theta(t)\,\mathrm{d}t.$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned}\int_{x_2}^{x} e^{2\alpha t}t^{2\beta-q}\,\mathrm{d}t &= e^{2\alpha x}x^{2\beta-q}\int_{x_2}^{x} e^{2\alpha(t-x)}\left(\frac{t}{x}\right)^{2\beta-q}\mathrm{d}t\\ &= e^{2\alpha x}x^{2\beta-q}\left(\sum_{p=0}^{n-q} c_{q,p}x^{-p} + o(x^{q-n})\right)\end{aligned}$$

(on a utilisé ici le fait que $\displaystyle\int_{x_2}^{x} e^{2\alpha(t-x)}\left(\frac{t}{x}\right)^{2\beta-q}\mathrm{d}t = L(x_2, x)$ qui admet un DA, cf. la relation du **IV.1.b**.).
On choisit x_2 tel que $|\theta(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant x_2$ donc la dernière intégrale dans l'expression de $w(x) - w(x_2)$ est majorée par $K\varepsilon|e^{2\alpha x}x^{2\beta-n}|$.
En rassemblant toutes ces relations, on pourra écrire

$$w(x) = w(x_2) + \left(\sum_{q=0}^{n} d_q x^{-q} + o(x^{-n})\right)e^{2\alpha x}x^{2\beta}.$$

Comme $w(x_2)e^{-2\alpha x}x^{-2\beta} = o(x^{-n})$ pour tout n, w admet un DA, on obtient finalement

$$\begin{aligned}y &= e^{2\alpha x}x^{2\beta}\left(\sum_{q=0}^{n} d_q x^{-q} + o(x^{-n})\right)e^{-\alpha x}x^{-\beta}\left(\sum_{q=0}^{n} c_q x^{-q} + o(x^{-n})\right)\\ &= e^{\alpha x}x^{\beta}\left(\sum_{q=0}^{n} e_q x^{-q} + o(x^{-n})\right)\end{aligned}$$

y est bien normale, non bornée. . . . . $\boxed{6}$

Partie VII $\boxed{10}$

VII.1. t est bien définie car $m/2 < -1$, $t = \dfrac{2}{m+2}x^{m/2+1}$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{m}{4}x^{-\frac{m}{4}-1}z(t) + x^{\frac{m}{4}}z'(t),\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{m(m+4)}{16}x^{-\frac{m}{4}-2}z(t) + x^{\frac{3m}{4}}z''(t)\\ &= \lambda^2 x^{\frac{3m}{4}}z(t).\end{aligned}$$

On a donc $z'' + \left(\dfrac{k}{t^2} - \lambda^2\right)z = 0$, $k = \dfrac{m(m+4)}{4(m+2)^2}$. . . . . $\boxed{3}$

VII.2. On résout (S) : $a_0 = -\lambda^2$, $a_1 = 0$, $a_2 = k$, $a_3 = a_4 = \ldots = 0$ d'où

$$\alpha = \varepsilon\lambda\ (\varepsilon = \pm 1) \text{ et } \beta = 0.$$

On en déduit que $2\varepsilon\lambda(n+1)c_{n+1} = -n(n+1)c_n - kc_n$ ce qui donne

$$c_n = c_0(-\varepsilon)^n\frac{\prod_{q=0}^{n-1}(q^2+q+k)}{(2\lambda)^n n!}. \qquad \boxed{2}$$

VII.3. On a ici $\lambda = m = 1$, $k = \dfrac{5}{36}$, $k^2 + q + q^2 = \dfrac{1}{36}(6q+1)(6q+5)$, $c_n = c_0(-\varepsilon)^n d_n$ avec

$$d_n = \frac{\prod\limits_{q=0}^{n-1}(6q+1)(6q+5)}{n!2^{3n}3^{2n}} = \frac{(6n)!}{2^{5n}3^{2n}(2n)!(3n)!}. \qquad \boxed{2}$$

Solutions normales bornées :

$$y \approx ce^{-\frac{2}{3}x\sqrt{x}}x^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(6n)!}{2^n 12^{2n}(2n)!(3n)!}x^{-\frac{3n}{2}}. \qquad \boxed{1}$$

Solutions normales non bornées :

$$y \approx c'e^{\frac{2}{3}x\sqrt{x}}x^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(6n)!}{2^n 12^{2n}(2n)!(3n)!}x^{-\frac{3n}{2}}. \qquad \boxed{1}$$

D'après la règle de D'Alembert, les séries entières concernées ne convergent pour aucun x dans $]0, +\infty[$. . . . . $\boxed{1}$