

SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

- On désigne par \mathcal{C} l'espace des fonctions continues 2π -périodiques à valeurs complexes. Si f appartient à \mathcal{C} , on note

$$\|f\| = \sup_{|t| \leq \pi} |f(t)|, \quad \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)| dt$$

et, si $0 < \alpha < \pi$, on pose

$$I_\alpha = [-\alpha, \alpha] \text{ et } \|f\|_{I_\alpha} = \sup_{t \in I_\alpha} |f(t)|.$$

Un sous-espace \mathcal{E} de \mathcal{C} est dit associé à $\alpha \in]0, \pi[$ s'il existe un réel positif M (dépendant de \mathcal{E} et α) tel que

$$\forall f \in \mathcal{E}, \quad \|f\| \leq M \|f\|_{I_\alpha}.$$

- Si f est un élément de \mathcal{C} , on note \widehat{f} la fonction de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-int} dt$$

et on pose

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= \{n \in \mathbb{Z} \mid \widehat{f}(n) \neq 0\} \\ \mathcal{P} &= \{f \in \mathcal{C} \mid \sigma(f) \text{ fini}\} \end{aligned}$$

et, pour toute partie A de \mathbb{Z} ,

$$\mathcal{C}_A = \{f \in \mathcal{C} \mid \sigma(f) \subset A\} \text{ et } \mathcal{P}_A = \mathcal{C}_A \cap \mathcal{P}.$$

- Si f et g appartiennent à \mathcal{C} , on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x-t)g(t) dt.$$

- Pour tout k de \mathbb{Z} , on désigne par e_k la fonction

$$e_k(t) = e^{ikt}.$$

PARTIE I

I.1. Montrer que, pour f et g dans \mathcal{C} ,

$$f * g \in \mathcal{C}, \quad f * g = g * f, \quad \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f * e_k = \widehat{f}(k) e_k.$$

I.2. Caractériser l'ensemble \mathcal{P} .

I.3. Montrer que

$$\forall A \subset \mathbb{Z}, \quad \overline{\mathcal{P}_A} \subset \mathcal{C}_A$$

(où l'adhérence est relative à la norme $\|\cdot\|$ sur \mathcal{C}).

On admettra pour la suite qu'il y a égalité de ces deux ensembles.

I.4. Montrer que, si f appartient à \mathcal{C} et P appartient à \mathcal{P} ,

$$\forall \lambda \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{fP}(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\lambda - n) \widehat{P}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \widehat{P}(\lambda - n)$$

où les sommes sont, en fait, des sommes finies.

(On regardera d'abord le cas où $P = e_k$).

Dans toute la suite du problème, on désigne par Λ une partie de \mathbb{Z} de la forme

$$\Lambda = \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{avec} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_k \in \mathbb{N}^* \text{ et } \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \geq 3.$$

PARTIE II

II.1. Montrer que, si m appartient à \mathbb{N}^* et si, pour tout k de \mathbb{N}^* inférieur ou égal à m , ε_k est un élément de \mathbb{Z} avec $|\varepsilon_k| \leq 2$,

$$\sum_{k=1}^m \varepsilon_k \lambda_k = 0 \Rightarrow \forall k, \varepsilon_k = 0$$

(on montrera tout d'abord que $\varepsilon_m = 0$).

En déduire que, si $m \in \mathbb{N}^*$, un élément n de \mathbb{Z} s'écrit au plus d'une façon sous la forme

$$n = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k \lambda_k$$

avec, pour tout k , ε_k dans $\{-1, 0, +1\}$.

On fixe, dans toute la suite de cette partie,

$$m \in \mathbb{N}^*, \quad \delta \in]0, 1[, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon \in]0, \pi[$$

et on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S(t) = \frac{2}{\delta} \prod_{k=1}^m [1 + \delta \cos(\lambda_k t + \varphi_k)].$$

On désigne par a l'unique élément de \mathcal{C} vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t) = a(-t), \quad \forall t \in [0, \varepsilon], \quad a(t) = \frac{2\pi}{\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} t\right), \quad \forall t \in [\varepsilon, \pi], \quad a(t) = 0.$$

II.2. a. Montrer que S appartient à \mathcal{P} et calculer $\widehat{S}(n)$ pour tout n de \mathbb{Z} . (On distinguera suivant que n est de la forme $\sum_{k=1}^m \varepsilon_k \lambda_k$ avec les ε_k dans $\{-1, 0, +1\}$ ou que n n'est pas de cette forme. Dans le premier cas, on exprimera $\widehat{S}(n)$ en fonction de ε_k).

b. Montrer que

$$\forall 1 \leq k \leq m, \quad \widehat{S}(\lambda_k) = e^{i\varphi_k}, \quad \widehat{S}(-\lambda_k) = e^{-i\varphi_k}$$

et

$$|\widehat{S}(n)| \leq \frac{\delta}{2} \text{ si } n \notin \{\pm \lambda_k, 1 \leq k \leq m\} \cup \{0\}.$$

c. Montrer que $\|S\|_1 = \frac{2}{\delta}$.

II.3. a. Calculer $\widehat{a}(n)$ pour tout n de \mathbb{Z} .

b. Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{a}(n) = \frac{2\pi}{\varepsilon}.$$

c. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{|n| > N} \widehat{a}(n) \leq \frac{8}{N\varepsilon^2}.$$

II.4. On pose $T = aS$. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \geq N + 1, \quad |\widehat{S}(\lambda_k) - \widehat{T}(\lambda_k)| \leq \frac{\delta\pi}{\varepsilon} + \frac{16}{\varepsilon^2 N \delta}$$

(on pourra d'abord prouver que, pour tout N dans \mathbb{N}^* ,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{Z}, k \geq N + 1 \text{ et } 0 < |n| \leq N \Rightarrow \lambda_k - n > 0 \text{ et } \lambda_k - n \notin \Lambda.)$$

PARTIE III

On fixe, dans cette partie, ε appartenant à $]0, \pi[$.

III.1. Montrer qu'il existe un élément l de \mathbb{N}^* et un réel M tels que, pour tout entier $m \geq l$ et pour tout φ de \mathbb{R}^m , il existe un élément T de \mathcal{C} ayant les propriétés suivantes :

(i) La restriction de T à $[-\pi, \pi]$ est nulle hors de $[-\varepsilon, \varepsilon]$

(ii) $\forall l \leq k \leq m, |\widehat{T}(\lambda_k) - e^{i\varphi_k}| \leq \frac{1}{2}$

(iii) $\|T\|_1 \leq M$.

III.2. Soit $m \geq l$, on considère un élément P de \mathcal{P} de la forme :

$$P = \sum_{k=l}^m \zeta_k e^{-i\varphi_k} e_{\lambda_k}$$

avec $\forall l \leq k \leq m, \zeta_k \geq 0$ et $\varphi_k \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que

$$\sum_{k=l}^m \zeta_k \leq M \|P\|_{I_\varepsilon} + \frac{1}{2} \sum_{k=l}^m \zeta_k$$

(on pourra considérer $P * T(0)$).

b. On pose : $\Lambda' = \{\lambda_k, k \geq l\}$.

Montrer que $\mathcal{C}_{\Lambda'}$ est associé à ε .

PARTIE IV

IV.1. Soit $\varepsilon, \eta > 0$ avec $\varepsilon + \eta < \pi$. On considère une partie A de \mathbb{Z} telle que \mathcal{C}_A soit associé à ε .

a. On suppose qu'il existe un élément g de \mathcal{C}_A et un élément q de \mathbb{Z} tels que :

$$\forall t \in I_{\varepsilon+\eta}, g(t) = e_q(t).$$

On pose, pour $|h| \leq \eta$,

$$g_h(t) = g(t+h) - e^{iqh} g(t).$$

Montrer que g_h appartient à \mathcal{C}_A , puis que g_h est identiquement nulle.

En considérant \widehat{g}_h , en déduire que q appartient à A .

b. On considère maintenant un entier q n'appartenant pas à A .

Montrer qu'il existe un réel L (dépendant de ε, η, q) tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}_A, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq L \|f + ze_q\|_{I_{\varepsilon+\eta}}$$

(on pourra raisonner par l'absurde).

En déduire que $\mathcal{C}_{A \cup \{q\}}$ est associé à $\varepsilon + \eta$.

IV.2. Montrer que, pour tout ε dans $]0, \pi[$, \mathcal{C}_Λ est associé à ε .