# NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE (R)

## 1. Nombres complexes

### 1.1. Corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Si $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, on pose $c=\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}$, montrer que :

(*i*) $|c|=1\Leftrightarrow(|a|=1)$ ou $(|b|=1)$.

(*ii*) $|c|<1\Leftrightarrow\big((|a|<1)$ et $(|b|<1)\big)$ ou $\big((|a|>1)$ et $(|b|>1)\big)$

---

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{F}}$

Calculer la somme $C=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\cos k\alpha}{(\cos\alpha)^k}$, $\cos\alpha\neq 0$.

---

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{I C}}$

Soient $z_1,z_2,\dots,z_n$ $n$ nombres complexes.

(1) Montrer que $|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$.

(2) Montrer que l'on a égalité dans l'inégalité ci-dessus ssi $\exists\theta\in\mathbb{R}$, $\exists(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^+$ tels que $z_1=\lambda_1e^{i\theta}$, $z_2=\lambda_2e^{i\theta}$,..., $z_n=\lambda_ne^{i\theta}$.

---

### 1.2. Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

Exercice 1.2.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Calculer les sommes :

$$S_0=\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\cdots,S_1=\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\cdots,S_2=\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\cdots$$

---

Exercice 1.2.2. $\boxed{\textbf{F}}$

(1) Résoudre l'équation $(z+1)^n=\cos 2na+i\sin 2na$ où $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}$.

(2) En déduire une expression simple de $P_n(a)=\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\left(a+\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

---

Exercice 1.2.3. $\boxed{\textbf{I C T}}$

Montrer l'égalité :

$$\sum_{q=0}^{2n-1}\cos^{2p}\left(x+\frac{q\pi}{2n}\right)=\frac{2n\binom{2p}{p}}{2^{2p}},\quad p<n.$$

Utiliser les formules d'Euler (cf. proposition 1.1.4 page 14) et la formule du binôme de Newton.

---

### 1.3. **Équation du second degré.**

EXERCICE 1.3.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Résoudre les équations :

$$z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0 \; ; \; z^8 = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}, \; \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = e^{i\theta}.$$

---

EXERCICE 1.3.2. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $z \in \mathbb{C}$ tels que : $z^2 = xy$. Montrer alors que :

$$|x| + |y| = \left|\frac{x+y}{2} + z\right| + \left|\frac{x+y}{2} - z\right|.$$

---

EXERCICE 1.3.3. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit l'équation : $z^2 - 2(2+i)z + a + ib = 0$ (1) (où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$)
En désignant par $P$ le point du plan complexe de coordonnées $a$ et $b$, déterminer l'ensemble des points $P$ de façon que l'équation (1) possède l'une des propriétés suivantes :

(1) les 2 racines ont même module,
(2) les 2 racines ont même argument,
(3) les images des racines dans le plan complexe sont alignées avec l'origine,
(4) la droite joignant les images des racines est parallèle à la droite $y = x$,
(5) $M$ et $M'$ étant les images des racines, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux.

---

EXERCICE 1.3.4. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit l'équation $z^2 - 2pz + 1 = 0$ où $p = \sin\varphi + i\cos\varphi$. On appelle $z'$ et $z''$ les racines.

(1) Trouver le module et l'argument de $z' - p$, $z'' - p$.
(2) Si $\cos\varphi < 0$ montrer alors que $z' + i$ et $z'' + i$ ont même module, que $z' - i$ et $z'' - i$ ont même argument.
    Que dire du cas où $\cos\varphi > 0$?
(3) Donner une interprétation géométrique du 2.

---

### 1.4. **Exponentielle complexe.**

EXERCICE 1.4.1. $\boxed{\textbf{I}}$
Caractériser les fonctions exponentielles complexes par leur équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ où $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On utilisera le théorème du relèvement qui dit que si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un intervalle $I$ à valeurs dans $\mathbb{U}$ alors il existe une fonction $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $I$ à valeurs réelles telle que $f(t) = e^{ig(t)}$ pour tout $t \in I$.

---

EXERCICE 1.4.2. $\boxed{\textbf{I}}$

Soient $a$, $b$, $c$ 3 réels vérifiant $\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c & = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c & = 0 \end{cases}$ montrer que

$$\begin{cases} \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c & = 0 \\ \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c & = 0 \end{cases}.$$

---

### 1.5. **Nombres complexes et géométrie plane.**

Exercice 1.5.1. $\boxed{\textbf{I C}}$
On dit que 4 points $A, B, C, D$ du plan complexe forment un quadrangle harmonique ssi leurs affixes $a, b, c, d$ vérifient $B(a, b, c, d) = -1$ où $B(a, b, c, d)$ désigne le birapport et vaut $B(a, b, c, d) = \dfrac{d-a}{d-b} : \dfrac{c-a}{c-b}$.
Montrer que, si $M$ désigne le milieu de $AB$, la droite $CD$ est symétrique de la droite $CM$ par rapport aux bissectrices de $AC$ et $BC$.
Réciproque ?

---

Exercice 1.5.2. $\boxed{\textbf{I C}}$
On considère $n$ points $A_k$ d'affixe $z_k$, $n \geqslant 3$. Ces points sont supposés distincts, non situés sur la même droite partant de l'origine, aucun n'étant d'affixe nulle.

On pose $a_k = \dfrac{z_k}{|z_k|}$ et on suppose que $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$. Soit $M$ un point quelconque d'affixe $z$.

(1) Étudier le nombre complexe : $\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k(z - z_k)$.
(2) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$ ; étudier les cas d'égalité.
(3) Interprétation : étant donné un triangle $A$, $B$, $C$ dont les angles sont compris entre 0 et $2\pi/3$, trouver les points $M$ du plan réalisant le minimum de $MA + MB + MC$.

---

## 2. Géométrie élémentaire du plan

### 2.1. **Modes de repérage dans le plan.**

Exercice 2.1.1. $\boxed{\textbf{F T}}$
Soient $A, B, C$ un triangle équilatéral et $M$ un point de son plan. On note $A', B', C'$ les symétriques de $M$ par rapport à $BC, CA, AB$.
Montrer que les droites $AA', BB', CC'$ sont en général concourantes (utiliser les coordonnées barycentriques dans $ABC$).

---

Exercice 2.1.2. $\boxed{\textbf{I T}}$
Soient $D_1, D_2, D_3$ trois droites 2 à 2 non parallèles dans le plan affine.
Trouver l'ensemble des points $P$ qui sont isobarycentres de 3 points alignés $M_1M_2M_3$ tels que pour $i \in [1, 3]$ $M_i$ soit sur $D_i$ (prendre un repère où $D_1$ est l'axe des $x$, $D_2$ l'axe des $y$ et $D_3$ la droite d'équation $x + y = 1$).

---

Exercice 2.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $E$ un espace affine de dimension 2 et 4 points $A$, $B$, $C$, $D$ dont 3 quelconques ne sont pas alignés. La droite passant par $A$ et parallèle à $BC$ coupe $BD$ en $M$. La droite passant par $B$ et parallèle à $AD$ coupe $AC$ en $N$.
Montrer que $MN$ est parallèle à $CD$.

---

Exercice 2.1.4. **I T**

On considère 3 points $a$, $b$, $c$ non alignés. Soit $m \notin \{a,b,c\}$, on définit $a' \in D_{am} \cap D_{bc}$, $b' \in D_{bm} \cap D_{ac}$ et $c' \in D_{cm} \cap D_{ab}$. Soient $a''$, $b''$, et $c''$ les milieux respectifs de $(b',c')$, $(c',a')$, $(a',b')$.

Montrer que $D_{aa''}$, $D_{bb''}$ et $D_{cc''}$ sont concourantes (on est bien sûr dans le plan et on pourra utiliser les coordonnées barycentriques).

---

## 2.2. Produit scalaire.

Exercice 2.2.1. **I T**

Dans le plan affine euclidien identifié au corps des complexes on considère 3 points $A$, $B$, $C$, d'affixes respectives $a$, $b$, $c$.

(1) On suppose $b \neq c$, calculer l'affixe du projeté orthogonal de $A$ sur la droite passant par les points $B$ et $C$.

(2) Montrer que toute droite du plan complexe admet une équation qui se met sous la forme $\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z = h$ où $z$ désigne l'affixe d'un point qui décrit la droite, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $h \in \mathbb{R}$.
Donner, sous la forme précédente, l'équation de la droite orthogonale à $\overrightarrow{BC}$ passant par $A$.

(3) Calculer l'affixe de l'orthocentre du triangle $ABC$.

(4) Si $a$, $b$, $c$ sont dans $\mathbb{U}$, donner une expression très simple de l'affixe de l'orthocentre du triangle $ABC$.
En déduire que, pour un triangle quelconque, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre sont alignés.

---

## 2.3. Déterminant.

Exercice 2.3.1. **F**

Soit $ABC$ un vrai triangle, on construit le triangle $A'B'C'$ de la manière suivante

- $A'$ est le symétrique de $A$ par rapport à $B$,
- $B'$ est le symétrique de $B$ par rapport à $C$,
- $C'$ est le symétrique de $C$ par rapport à $A$.

Déterminer l'aire du triangle $A'B'C'$ en fonction de celle du triangle $ABC$.

---

Exercice 2.3.2. **F**

Soient $(a,b,c,d)$ 4 vecteurs du plan euclidien orienté. Montrer que

$$\det(a,b)\det(c,d) = \begin{vmatrix} (a|c) & (a|d) \\ (b|c) & (b|d) \end{vmatrix}.$$

---

## 2.4. Droites.

Exercice 2.4.1. **I**

Soit $A$ un ensemble de $n$ points du plan affine euclidien vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (a,b) \in A^2, \exists c \in A \setminus \{a,b\} \mid a,b,c \text{ alignés.}$$

Que penser de $A$ ?

(Considérer l'ensemble des droites passant par trois points de $A$ et l'ensemble des distances des points à ces droites.)

---

### 2.5. Cercles.

Exercice 2.5.1. **F**

Soit $(C)$ un billard circulaire et $A$ un point intérieur à $(C)$. Montrer qu'il est possible de repasser par $A$ après 2 réflexions sur la face interne de $(C)$.

---

## 3. Géométrie élémentaire de l'espace

### 3.1. Produit vectoriel.

Exercice 3.1.1. **F**

Soient 2 points $A$ et $B$ distincts et un vecteur $\overrightarrow{C}$ constant.
Déterminer l'ensemble $(E)$ des points $M$ de l'espace tels que : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{C}$.

---

### 3.2. Déterminant ou produit mixte.

Exercice 3.2.1. **F T C**

Calculer les déterminants :

$$A = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

---

Exercice 3.2.2. **I T**

Si $\alpha, \beta, \gamma$ sont positifs et si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \tan(\alpha/2) \\ 1 & \cos\beta & \tan(\beta/2) \\ 1 & \cos\gamma & \tan(\gamma/2) \end{vmatrix} = 0.$$

---

Exercice 3.2.3. **C**

Soit $D = \begin{vmatrix} r_1 & b & b \\ a & r_2 & b \\ a & b & r_3 \end{vmatrix}$ où $a$, $b$, $r_i$ sont des réels. On appelle $D(x)$ le déterminant obtenu à partir de $D$ en ajoutant $x$ à chacun de ses éléments.

(1) Montrer que $D'(x)$ est constant.
(2) Si $a \neq b$ en déduire l'expression développée de $D$
 (utiliser la fonction $\omega(x) = (r_1 - x)(r_2 - x)(r_3 - x)$).
(3) Étudier le cas où $a = b$.

---

Exercice 3.2.4. **I C**

Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a_1 & \cos 2a_1 \\ 1 & \cos a_2 & \cos 2a_2 \\ 1 & \cos a_3 & \cos 2a_3 \end{vmatrix}$$

## 3.3. **Droites et plans.**

Exercice 3.3.1. **D C**

(1) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension $n$ et $(C_1, C_2, \dots, C_p)$, $p \geqslant n+1$ une famille de parties convexes de $\mathcal{E}$ telle que l'intersection de toute sous-famille de cardinal $n+1$ soit non vide. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} C_i$ est non vide (on raisonnera par récurrence sur $p$).

Le résultat subsiste-t-il avec une famille $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant la même hypothèse ? Que dire si on impose aux $C_i$ d'être compacts ?

(2) Application : $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_p)$ est une famille de segments de droites parallèles d'un plan affine réel, admettant 3 à 3 une sécante commune. Montrer qu'il existe une droite rencontrant tous les $\mathcal{S}_i$.

---

Exercice 3.3.2. **F C**

Soient $D$ et $D'$ 2 droites dans l'espace, montrer que l'on peut trouver un repère orthonormé, 2 réels $h$ et $m$ tels que les équations de $D$ et $D'$ s'écrivent :

$$D\begin{cases} z = h \\ y = mx \end{cases} \qquad D'\begin{cases} z = -h \\ y = -mx \end{cases}$$

---

Exercice 3.3.3. **F**

Déterminer la perpendiculaire commune à $D_1\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ , $D_2\begin{cases} x + cy - z = 0 \\ cx - y - z = 0 \end{cases}$ .

---

## 3.4. **Sphères.**

Exercice 3.4.1. **I TC**

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé de l'espace. Un cercle de rayon $a$ varie en restant tangent aux 3 plans de coordonnées.

Déterminer le lieu du centre du cercle.

---

Exercice 3.4.2. **I T**

Soit $A, B, C, D$ un tétraèdre régulier et $k > 0$.

Étudier la nature de l'ensemble $S_k$ des points dont la somme des distances aux quatre faces du tétraèdre est $k^2$.

---

Exercice 3.4.3. **I T**

Soit $OABC$ une pyramide trirectangle dont les points ont respectivement les coordonnées suivantes dans un repère orthonormé

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2c \end{pmatrix}.$$

On suppose que $abc \neq 0$.

(1) Déterminer le centre $\Omega$ et le rayon $R$ de la sphère contenant les 4 sommets ainsi que le projeté orthogonal $\omega$ de $\Omega$ sur le plan $ABC$.

(2) Que peut-on dire du projeté orthogonal $H$ de $O$ sur le plan $ABC$ ?

## 1. Indications :

**Indication 1.1.1** Utiliser $|c|^2 = c\overline{c}$.

**Indication 1.1.2** Reconnaître une suite géométrique, la somme vaut : $\frac{1}{\cos^{n+1}\alpha}\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$.

**Indication 1.1.3**

(1) Raisonner par récurrence sur $n$ à partir de l'inégalité triangulaire.
(2) Dans le cas $n = 2$, on sait qu'on a égalité ssi $z_1$ et $z_2$ sont situés sur la même demi-droite partant de l'origine. Faire ensuite une démonstration par récurrence.

**Indication 1.2.1** Utiliser la formule du binôme de Newton, $S_0+S_1+S_2 = 2^n$, $S_0+jS_1+j^2S_2 = (1+j)^n = (-1)^n j^{2n}$, $S_0 + j^2S_1 + j^4S_2 = (1 + j^2)^n = (-1)^n j^n$ et faire la somme pour $S_0$. Faire intervenir $j$ pour en déduire $S_1$ et $S_2$.

**Indication 1.2.2**

(1) On trouve $z_k = 2i\exp\left[i\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right]$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.
(2) Avec le produit des racines on a $P_n(a) = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{\sin na}{\sin a}$.

**Indication 1.2.3** $\cos^{2p}\left(x + \frac{q\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^{2p}}\left(\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}\exp\left(i2(p-k)(x + \frac{q\pi}{n})\right)\right)$ d'où $\sum_{q=0}^{2n-1}\cos^{2p}\left(x + \frac{q\pi}{2n}\right) = \frac{2n\binom{2p}{p}}{2^{2p}}$.

**Indication 1.3.1** On a $z = 1\pm 2i$, $z = -4\pm 2i$ pour la première, $z_k = 2^{-1/16}\exp\left[-\frac{i\pi}{96} + i\frac{k\pi}{4}\right]$ pour la seconde, et enfin $x_k = \tan(\frac{\theta_k}{2})$ pour $\frac{\theta_k}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

**Indication 1.3.2** Poser $x = {x_1}^2, y = {y_1}^2, x_1$ et $y_1$ étant choisis pour que : $z = x_1y_1$ d'où $\left|\frac{x+y}{2} + z\right| = \frac{1}{2}(|x_1|^2 + |y_1|^2) + \frac{1}{2}(x_1\overline{y}_1 + \overline{x}_1y_1)$, de même avec $\left|\frac{x+y}{2} - z\right|$.

**Indication 1.3.3** $\Delta' = (3-a)+i(4-b)$, les solutions sont $z_1 = 2+i+\delta, z_2 = 2+i-\delta$, $\delta^2 = \Delta'$.
(1) $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x, x \geqslant 3$.
(2) $\mathrm{Arg} z_1 = \mathrm{Arg} z_2 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x,\ 0 < x \leqslant 1$.
(3) On a la même chose qu'en 2. mais $k$ est quelconque, donc $x \leqslant 1$.
(4) On doit avoir : $z_1 - z_2 = k(1 + i)$ où $k \in \mathbb{R}^*$ et on obtient $x = 3, y < 4$.
(5) $P$ décrit le cercle de centre $O$ et de rayon 5.

**Indication 1.3.4** On a $z = p \pm \delta$ où $\delta^2 = \Delta = p^2 - 1$, le module et l'argument demandé sont : $\sqrt{2|\cos\varphi|}$ et $-\frac{\varphi}{2}$ si $\cos\varphi < 0$, $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ si $\cos\varphi > 0$.
$z' + i$ et $z'' + i$ ont pour module $\sqrt{2}$, $p - i \pm \delta = e^{-i\varphi/2}\left[2\sin(\varphi/2) \pm \sqrt{-2\cos\varphi}\right]$. Si $\cos\varphi > 0$, c'est le contraire.
Si $\cos\varphi < 0$ alors construire les solutions de l'équation du second degré en prenant l'intersection d'une droite passant par le point $A(0, 1)$ avec le cercle de centre $B(0, -1)$ de rayon $\sqrt{2}$.

**Indication 1.4.1** On montre que $|f(x)| = e^{\alpha x}$ (on a supposé $f$ non nulle) puis on pose $f(x)e^{-\alpha x} = e^{ig(x)}$ grâce au théorème du relèvement. On a alors $g(x+y) = g(x)+g(y)+N(x, y)2\pi$ où $N$ est une fonction continue qui prend des valeurs entières donc $N = 0$.

**Indication 1.4.2** Écrire que $e^{ia}+e^{ib}+e^{ic} = 0$, soit $1+e^{i(b-a)}+e^{i(c-a)} = 0$ d'où (à une permutation près) $e^{i(b-a)} = j$ et $e^{i(c-a)} = j^2$ ou utiliser une interprétation géométrique.

**Indication 1.5.1** $B(a, b, c, d) = -1 \Leftrightarrow 2(ab + cd) = (a + b)(c + d) \Leftrightarrow 2ab = (a + b)d$ en prenant $c$ comme origine, ce qui donne bien la propriété demandée.
Pour la réciproque, supposer $(A, B, C, D)$ cocycliques avec $D$ l'unique point du cercle circonscrit au triangle $ABC$ tel que $CD$ soit symétrique de $CM$ par rapport aux bissectrices de $AC$ et $BC$. Si $D'$ est le point d'affixe $d'$ tel que $B(a, b, c, d') = -1$, on montre que $d' = d$.

**Indication 1.5.2**

(1) On a $\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_k(z - z_k) = -\sum_{k=1}^{n}|z_k|$.
(2) Prendre les modules dans l'égalité ci-dessus. On aura égalité ssi les nombres complexes $\bar{a}_k(z - z_k)$ ont tous le même argument ou sont nuls (par récurrence sur $n$).

(3) On cherche l'unique point $O$ tel que les angles $\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}} = \widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}} = \widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}} = \dfrac{2\pi}{3}$.

**Indication 2.1.1** Soient $(a,b,c)$ un système de coordonnées barycentriques de $M$, les coordonnées barycentriques de $A'$ sont $(-a, a+b, a+c)$ et l'équation barycentrique de $AA'$ : $(a+c)y - (a+b)t = 0$ ($y$ et $t$ étant les $2^{\text{ième}}$ et $3^{\text{ième}}$ coordonnées barycentriques). Par symétrie on a la solution : $x = (a+b)(a+c), y = (b+c)(b+a), t = (c+a)(c+b)$ à condition que $x+y+t \neq 0$.

**Indication 2.1.2** Si les coordonnées des points $M_i$ sont : $M_1(a,0)$, $M_2(0,b)$, $M_3(c, 1-c)$ alors $M_1M_2M_3$ alignés $\Leftrightarrow ab - bc - a + ac = 0$, $P\left(\frac{a+c}{3}, \frac{b+1-c}{3}\right) = (x,y)$. On remplace $a$ et $b$ en fonction de $x,y$ et on exprime que l'équation obtenue a au moins une solution. On obtient la condition $x^2 + y^2 + xy - x - y \geqslant 0$.

**Indication 2.1.3** Soit par le calcul, on prend le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ou par la géométrie.

**Indication 2.1.4** Équations barycentriques de $D_{am}$ : $\begin{pmatrix} t\alpha + 1 - t \\ t\beta \\ t\gamma \end{pmatrix}$, $D_{bc}$ : $\begin{pmatrix} 0 \\ t' \\ 1-t' \end{pmatrix}$ où $m$ $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ avec $\alpha+\beta+\gamma = 1$. $D_{aa''}$ $\begin{pmatrix} 1 - t + \frac{t\alpha}{2}\left(\frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma}\right) \\ \frac{t\beta}{2(1-\gamma)} \\ \frac{t\gamma}{2(1-\beta)} \end{pmatrix}$ et on remarque que $\begin{pmatrix} \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)} \\ \frac{\beta(1-\beta)}{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)} \\ \frac{\gamma(1-\gamma)}{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)} \end{pmatrix}$ appartient à $D_{aa''} \cap D_{bb''}$, symétrique en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ c.q.f.d.

**Indication 2.2.1**

(1) On exprime que $a' = tb + (1-t)c$ et que $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC}$ d'où $a' = \frac{a}{2} + \frac{\overline{a}}{2}\frac{b-c}{\overline{b-c}} + \frac{\overline{b}c - b\overline{c}}{2(\overline{b-c})}$.

(2) Soit $ux + vy = h$ l'équation d'une droite, poser $\alpha = \frac{u+iv}{2}$ et $z = x + iy$. L'équation de la droite orthogonale à $\overrightarrow{BC}$ et passant par $A$ s'écrit : $(b-c)\overline{z} + (\overline{b-c})z = h$ où $h = 2\operatorname{Re}[(b-c)\overline{a}] = (b-c)\overline{a} + (\overline{b-c})a$.

(3) Écrire que l'orthocentre cherché est à l'intersection de la hauteur issue de $A$ et de celle issue de $C$ d'où $z = \frac{(b-c)(b-a)(\overline{c-a}) + (b-c)(\overline{b-a})c - (b-a)(\overline{b-c})a}{(b-c)(\overline{b-a}) - (\overline{b-c})(b-a)} = \frac{N}{D}$.

(4) Simplifier la dernière formule et obtenir $z = a + b + c$.

**Indication 2.3.1** L'aire du triangle $ABC$ est la moitié du déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ d'où l'aire du triangle $A'B'C'$ vaut 7 fois celle du triangle $ABC$.

**Indication 2.3.2** Choisir une b.o.n. dans laquelle $a$ est proportionnel au premier vecteur et faire une homothétie.

**Indication 2.4.1** Raisonner par l'absurde en supposant que $A$ n'est pas contenu dans une droite, Prendre $a \in A$ et $D$ une droite tels que $\mathrm{d}(a, D) > 0$ soit minimum puis considérer la projection orthogonale de $a$ sur $D$.

**Indication 2.5.1** On appelle $O$ le centre du cercle, $P$ et $Q$ les points où se font les réflexions, $A(-a, 0)$ et $R$ le rayon du cercle. $Q(x, \sqrt{R^2 + x^2})$, $x \in [0, R]$. On a : $\sin\alpha = \frac{x}{R}$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}$, $\sin\beta = \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + R^2 - x^2}}$. Poser $f(x) = \sin\beta - \sin 2\alpha$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

**Indication 3.1.1** On choisit $P$ tel que $\overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{C} \wedge \overrightarrow{AB})/AB^2$ alors $(E)$ est la droite passant par $P$, parallèle à $\overrightarrow{AB}$.

**Indication 3.2.1** On trouve $A = a(a^2 - b^2)$, $B = \frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$ si $\sin\theta \neq 0$, $B = 1$ si $\sin\theta = 0$, $C = \cos 3\theta$.

**Indication 3.2.2** Développer le déterminant $\frac{2\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})\sin(\frac{\alpha-\gamma}{2})\sin(\frac{\gamma-\beta}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2} cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.

**Indication 3.2.3**

(1) Dériver $D(x)$ colonne par colonne.
(2) Comme $D'(x)$ est constant, $D(x)$ est une fonction affine de $x$.
(3) Le cas où $b = a$ se traite en en passant à la limite.

**Indication 3.2.4** On utilise ici la propriété suivante : $\cos(2a_k) = 2\cos^2 a_k - 1$ et on fait des manipulations sur les colonnes et les lignes, on trouve $\Delta = (\cos a_1 - \cos a_2)(\cos a_2 - \cos a_3)(\cos a_3 - \cos a_1)$.

**Indication 3.3.1**

(1) Pour $p = n+2$, $i \in [1,p]$, soit $x_i \in \bigcap_{j\neq i} C_j$. On sait qu'il existe des réels non tous nuls $\lambda_i$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$. On groupe alors les $x_i$ correspondant aux $\lambda_i \geqslant 0$ et ceux correspondant aux $\lambda_i < 0$. La réponse est non, il suffit de prendre en dimension 1 $C_i = ]0, 1/i[$.
Si les $C_i$ sont compacts, alors on choisit $x_p$ dans $\bigcap_{i=1}^{p} C_i$ et on extrait une suite convergente.
(2) Pour chaque valeur de $\alpha \in ]-\pi/2, +\pi/2[$, on projette $S_i$ selon la direction de la droite $D_\alpha$ du plan $xOy$, qui fait un angle $\alpha$ avec l'axe $Oy$, sur l'axe $Ox$. On reporte cette projection dans le plan $z = \tan\alpha$.

**Indication 3.3.2** On prend pour axe $Oz$ la perpendiculaire commune $L$ à $D$ et $D'$ et pour plan $xOy$ le plan parallèle à $D$ et $D'$ passant par le milieu de $AB$.

**Indication 3.3.3** C'est la droite $L$ d'équations : $(c+1)x + (c-1)y - 2z = 0$, $(c+1)(x-a) + (c-1)(y-b) = 0$.

**Indication 3.4.1** Le cercle $\Gamma$ de centre $M(x,y,z)$ de rayon $a$ situé dans un plan $P$ orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$ a pour équations : $(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = a^2$, $\alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) = 0$. On exprime la condition de tangence avec le plan $XOY$, le lieu cherché est inclus dans la sphère $\Sigma$ d'équation $x^2+y^2+z^2 = 2a^2$ et est contenu (pour des raisons évidentes) dans le cube $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant a$.
Réciproque : il suffira de poser $\alpha^2 = a^2 - x^2$, $\beta^2 = a^2 - y^2$, $\gamma^2 = a^2 - z^2$, on remonte alors les calculs ci-dessus d'où l'ensemble cherché :

**Indication 3.4.2** On choisit un repère orthonormé tel que les points aient pour coordonnées : $A(a,0,0)$, $B(-a/2, a\sqrt{3}/2, 0)$, $C(-a/2, -a\sqrt{3}/2, 0)$, $D(0,0,a\sqrt{2})$. On trouve alors l'équation d'une sphère de centre $(0,0,\frac{a}{2\sqrt{2}})$ et rayon $\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{2k^2-a^2}$ lorsque $k \geqslant \frac{a}{\sqrt{2}}$.

**Indication 3.4.3**

(1) L'équation de la sphère s'écrit $x^2+y^2+z^2 = 2(px+qy+rz)$ où $(p,q,r)$ sont les coordonnées de $\Omega$, on en déduit que $p = a$, $q = b$, $r = c$ et $R^2 = p^2+q^2+r^2 = a^2+b^2+c^2$.
Les coordonnées de $\omega$ sont : $\frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$, $\frac{b^2(a^2+c^2)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$, $\frac{(a^2+b^2)c^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$.
(2) $H$ est l'orthocentre du triangle $ABC$.

# 1. Solutions

**Solution 1.1.1**

(*i*) Comme $|c|^2 = c\overline{c}$, on a :

$$|c|^2 = 1 \Leftrightarrow (a-b)(\overline{a}-\overline{b}) = (1-\overline{a}b)(1-a\overline{b}) \Leftrightarrow (1-|a|^2)(1-|b|^2) = 0.$$

(*ii*) On procède de même.

---

**Solution 1.1.2** On reconnaît une suite géométrique de raison $\dfrac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}$. La somme vaut :

$$\frac{1}{\cos^{n+1}\alpha}\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

---

**Solution 1.1.3**

(1) Immédiat, on raisonne par récurrence sur $n$ à partir de l'inégalité triangulaire.

(2) On étudie le cas $n = 2$. On sait que, dans l'inégalité triangulaire, on a égalité ssi $z_1$ et $z_2$ sont situés sur la même demi-droite partant de l'origine.

En effet, on peut supposer par exemple que $z_1 \neq 0$ et diviser par $z_1$ d'où $\left|1+\dfrac{z_2}{z_1}\right| = 1 + \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|$ soit, en posant $Z = \dfrac{z_2}{z_1}$ $|1+Z| = 1+|Z|$. On écrit $Z = a+ib$ et cette dernière condition se traduit immédiatement par $a \geqslant 0$ et $b = 0$.

On fait maintenant une démonstration par récurrence, on suppose que si $|z_1+\cdots+z_n| = |z_1|+\cdots+|z_n|$ alors les images des $z_i$ sont tous sur la même demi-droite.

Si $|z_1+\cdots+z_n+z_{n+1}| = |z_1|+\cdots+|z_n|+|z_{n+1}|$ alors on pose $z'_n = z_n+z_{n+1}$ et on utilise les inégalités

$$|z_1+\cdots+z'_n| \leqslant |z_1|+\cdots+|z'_n| \leqslant |z_1|+\cdots+|z_n|+|z_{n+1}|$$

et comme on a égalité aux deux bouts, c'est qu'il y a les égalités $|z_1+\cdots+z'_n| = |z_1|+\cdots+|z'_n|$ et $|z_n+z_{n+1}| = |z_n|+|z_{n+1}|$. Grâce à l'hypothèse de récurrence et la première égalité, on déduit que les images de $z_1,\dots,z'_n$ sont toutes sur la même demi-droite, puis que les images de $z_n$ et $z_{n+1}$ sont aussi sur cette même demi-droite.

---

**Solution 1.2.1** À l'aide de la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} S_0+S_1+S_2 &= 2^n,\\ S_0+jS_1+j^2S_2 &= (1+j)^n = (-1)^n j^{2n},\\ S_0+j^2S_1+j^4S_2 &= (1+j^2)^n = (-1)^n j^n \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{3}\left[2^n+(-1)^n(j^n+j^{2n})\right],\\ S_1 &= \frac{1}{3}\left[2^n+(-1)^n(j^{n+2}+j^{2n+1})\right],\\ S_2 &= \frac{1}{3}\left[2^n+(-1)^n(j^{n+1}+j^{2n+2})\right]. \end{aligned}$$

On peut alors faire des simplifications selon la congruence de $n$ modulo 3.

---

**Solution 1.2.2**

(1) Les solutions sont données par $z_k = 2i\exp\left[i\left(a+\dfrac{k\pi}{n}\right)\right]$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.

(2) Le produit des racines vaut $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^n[1-e^{i2na}] = 2^n e^{ina} i(-1)^{n+1}\sin a P_n(a)$ et donc $P_n(a) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\dfrac{\sin na}{\sin a}$.

---

**Solution 1.2.3** On a $\cos^{2p}\left(x+\dfrac{q\pi}{n}\right) = \dfrac{1}{2^{2p}}\left(\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}\exp\left(i2(p-k)(x+\dfrac{q\pi}{n}\right)\right)$. La somme à calculer s'écrit donc $\dfrac{1}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}S_k$ où $S_k = \sum_{q=0}^{2n-1}\exp\left(i2(p-k)(x+\dfrac{q\pi}{n}\right)$. Or $S_k = 0$ si $p \neq k$, $S_k = 2n$ si $p = k$ d'où la relation

$$\sum_{q=0}^{2n-1}\cos^{2p}\left(x+\frac{q\pi}{2n}\right) = \frac{2n\binom{2p}{p}}{2^{2p}}$$

et on remarque que le membre de droite est indépendant de $x$.

---

**Solution 1.3.1**

- On a $z^4+6z^3+9z^2+100 = (z^2+3z)^2+100 = (z^2+3z+10i)(z^2+3z-10i)$ et, en résolvant chacune des deux équations du second degré obtenues, on trouve $z = 1\pm 2i$, $z = -4\pm 2i$.

  Voir page 16 la résolution de l'équation du second degré sur $\mathbb{C}$.
- $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-i\pi}{12}}$, d'où les différentes valeurs de $z$ : $z_k = 2^{-1/16}\exp\left[-\dfrac{i\pi}{96}+i\dfrac{k\pi}{4}\right]$.
- On a $\dfrac{1+ix}{1-ix} = e^{i\theta_k}$ où $\theta_k = \dfrac{\theta+2k\pi}{n}$ et donc $x_k = \tan(\dfrac{\theta_k}{2})$ pour $\dfrac{\theta_k}{2} \notin \dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$.

---

**Solution 1.3.2** On pose : $x = {x_1}^2, y = {y_1}^2, x_1$ et $y_1$ étant choisis pour que : $z = x_1y_1$. Dans ce cas :

$$\left|\frac{x+y}{2}+z\right| = \frac{1}{2}|{x_1}^2+2x_1y_1+{y_1}^2| = \frac{1}{2}|x_1+y_1|^2 = \frac{1}{2}(|x_1|^2+|y_1|^2)+\frac{1}{2}(x_1\overline{y}_1+\overline{x}_1y_1)$$

$$\left|\frac{x+y}{2}-z\right| = \frac{1}{2}|{x_1}^2-2x_1y_1+{y_1}^2| = \frac{1}{2}|x_1-y_1|^2 = \frac{1}{2}(|x_1|^2+|y_1|^2)-\frac{1}{2}(x_1\overline{y}_1+\overline{x}_1y_1)$$

ce qui donne $|x|+|y| = \left|\dfrac{x+y}{2}+z\right|+\left|\dfrac{x+y}{2}-z\right|$.

---

**Solution 1.3.3** Voir page 16 la résolution de l'équation du second degré sur $\mathbb{C}$.
$\Delta' = (3-a)+i(4-b)$ et les solutions $z_1, z_2$ s'écriront : $z_1 = 2+i+\delta, z_2 = 2+i-\delta$ où $\delta^2 = \Delta'$.

(1) $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \delta = ki(2+i)$ où $k \in \mathbb{R}$ et en élevant au carré (on garde toujours l'équivalence), on a : $a-3 = 3k^2$, $b-4 = 4k^2$ donc $P$ se trouve sur la $\frac{1}{2}$ droite : $y = \frac{4}{3}x, x \geqslant 3$.

(2) $\mathrm{Arg} z_1 = \mathrm{Arg} z_2 \Leftrightarrow \delta = k(2+i)$ où $k \in [-1,1] \Leftrightarrow \delta^2 = k^2(3+4i) \Leftrightarrow (a = 3(1-k^2))$, $(b = 4(1-k^2))$. On est donc sur la même droite, mais ici, $0 < x \leqslant 1$.

(3) On a la même chose qu'en 2. mais $k$ est quelconque, donc $x \leqslant 1$.

(4) On doit avoir : $z_1 - z_2 = k(1+i)$ où $k \in \mathbb{R}^*$ i.e. $2\delta = k(1+i) \Leftrightarrow a = 3, b < 4$, ce qui est représenté par la $\frac{1}{2}$ droite : $x = 3, y < 4$.

(5) Si on écrit $\delta = x + iy$ alors : $z_1 = 2 + x + i(1+y), z_2 = 2 - x + i(1-y)$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux ssi $x^2 + y^2 = 5$. Comme $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, $P$ décrit le cercle de centre $O$ et de rayon 5.

---

**Solution 1.3.4** Voir page 16 la résolution de l'équation du second degré sur $\mathbb{C}$.

(1) On a $z = p \pm \delta$ où $\delta^2 = \Delta = p^2 - 1$. Comme $p = e^{i(\pi/2-\varphi)}$ on a $p^2 - 1 = -2e^{-i\varphi}\cos\varphi$, d'où le module et l'argument demandé : $\sqrt{2|\cos\varphi|}$ et $\begin{cases} -\dfrac{\varphi}{2} & \text{si } \cos\varphi < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi}{2} & \text{si } \cos\varphi > 0 \end{cases}$.

(2) On a $p + i = i\left[e^{-i\varphi} + 1\right] = i2e^{-i\varphi/2}\cos(\varphi/2)$ et $p + i \pm \delta = e^{-i\varphi/2}\left[i2\cos(\varphi/2) \pm \sqrt{-2\cos\varphi}\right]$ donc $z' + i$ et $z'' + i$ ont pour module $\sqrt{2}$.

$p - i = 2e^{-i\varphi/2}\sin(\varphi/2)$ et $p - i \pm \delta = e^{-i\varphi/2}\left[2\sin(\varphi/2) \pm \sqrt{-2\cos\varphi}\right] = e^{-i\varphi/2}A_\pm$ ; or $A_+.A_- = 2 > 0$, donc $z' - i$ et $z'' - i$ ont même argument.

Si $\cos\varphi > 0$, c'est le contraire.

(3) Si $\cos\varphi < 0$ alors on peut construire les solutions de l'équation du second degré en prenant l'intersection d'une droite passant par le point $A(0,1)$ avec le cercle de centre $B(0,-1)$ de rayon $\sqrt{2}$.

---

**Solution 1.4.1** Montrons tout d'abord que $|f(x)| = e^{\alpha x}$ (on a supposé $f$ non nulle).

- Si $f$ s'annule en un point $a$ alors $f(x) = f(a)f(x-a) = 0$ ce qui a été écarté donc $f$ ne s'annule en aucun point.
- $f(x) = [f(\frac{x}{2})]^2 > 0$ donc $f$ prend des valeurs strictement positives.
- Posons $g = \ln f$, $g$ vérifie $g(x+y) = g(x) + g(y)$. On vérifie alors les points suivants :
  - $g(0) = 0$ et $g(-x) = -g(x)$,
  - $g(nx) = ng(x)$ d'abord pour $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$,
  - $qg(\frac{p}{q}x) = g(px) = pg(x)$ pour $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ donc $g(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}g(1)$.
  - Comme $g$ est continue on prend la suite $x_n = \dfrac{E(10^n x)}{10^n}$ qui tend vers $x$. $g(x_n) = x_n g(1)$ et par continuité, $g(x) = xg(1)$.

  On obtient le résultat annoncé en passant aux exponentielles.

d'où $f(x)e^{-\alpha x} = e^{ig(x)}$ grâce au théorème du relèvement. On a alors $g(x+y) = g(x) + g(y) + N(x,y)2\pi$ où $N$ est une fonction continue qui prend des valeurs entières donc $N = 0$.
*Remarque* le théorème du relèvement est encore valable dans le cas des fonctions simplement continues aussi peut-on supprimer l'hypothèse $f$ de classe $\mathcal{C}^1$.

---

**Solution 1.4.2** Les 2 relations proposées sont équivalentes à $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$, soit $1 + e^{i(b-a)} + e^{i(c-a)} = 0$ d'où (à une permutation près) $e^{i(b-a)} = j$ et $e^{i(c-a)} = j^2$ (si $1 + z + z' = 0$ où $z$ et $z'$ sont de module 1 alors, en prenant les parties réelles et imaginaires on obtient $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} z'$ et $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z' = -1$. Comme $|z| = |z'|$ alors $\operatorname{Re} z = \pm\operatorname{Re} z'$, mais $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Re} z'$ est impossible donc $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z' = \dfrac{1}{2}$ ce qui permet finalement de conclure—une interprétation géométrique donne aussi le résultat mais de manière immédiate). On a alors $e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} = e^{2ia}(1 + j^2 + j^4) = 0$.

---

**Solution 1.5.1** $B(a,b,c,d) = -1 \Leftrightarrow 2(ab+cd) = (a+b)(c+d) \Leftrightarrow 2ab = (a+b)d$ en prenant $c$ comme origine. Alors, comme $[\overrightarrow{CM}] = z = \dfrac{a+b}{2}$, $ab = zd$ ce qui donne bien la propriété demandée.

Pour la réciproque, on suppose $(A,B,C,D)$ cocycliques tel que $D$ soit l'unique point du cercle circonscrit au triangle $ABC$ tel que la droite $CD$ soit symétrique de la droite $CM$ par rapport aux bissectrices de $AC$ et $BC$. Soit $D'$ le point d'affixe $d'$ tel que $B(a,b,c,d') = -1$, compte tenu de la démonstration précédente on sait que $D'$ est situé sur l'intersection de la symétrique de la droite $CM$ par rapport aux bissectrices de $AC$ et $BC$. Comme cette intersection est déterminée de manière unique on a $D = D'$ d'où $d' = d$ i.e. $B(a,b,c,d) = -1$ c.q.f.d.

---

**Solution 1.5.2**

(1) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k(z - z_k) &= z\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|^2}{|z_k|} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} |z_k|\end{aligned}$$

car $\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k = 0$.

(2) On prend les modules dans l'égalité ci-dessus et on a immédiatement l'inégalité demandée.

On aura égalité ssi les nombres complexes $\bar{a}_k(z - z_k)$ ont tous le même argument ou sont nuls : on démontre ceci par récurrence sur $n$, nombre des $(a_k)$ non nuls.

Pour $n = 2$ c'est le cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski.

Si c'est vrai à l'ordre $n$ alors

$$|a_1 + \cdots + a_{n+1}| \leqslant |a_1 + \cdots + a_n| + |a_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right|$$

donc $|a_1 + \cdots + a_n| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, les $a_k$ ont donc même argument, il en est de même de $a_{n+1}$. Soit $\theta$ l'argument commun alors $\operatorname{Arg} \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k(z - z_k) = \theta$ donc $\theta = \pi$ et donc $z = z_k$ ou $\operatorname{Arg}(z - z_k) = \operatorname{Arg} z_k + \pi$ ce qui signifie autrement que $0, z, z_k$ sont alignés. Comme on a supposé que les points d'affixe $z_k$ sont non alignés alors $z = 0$.

(3) On cherche un point $O$ tel que les angles $\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}} = \widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}} = \widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}} = \dfrac{2\pi}{3}$ (il suffit de prendre l'intersection de la portion de cercle passant par les points $A$ et $B$, ensemble des points $M$ tels que $\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}} = \dfrac{2\pi}{3}$ avec la portion de cercle passant par les points $B$ et $C$, ensemble des points $M$ tels que $\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}} = \dfrac{2\pi}{3}$. Cet intersection est non vide car les angles ont étés supposés inférieurs à $\dfrac{2\pi}{3}$). $O$ sera pris comme origine, il est unique.

Soient maintenant $z_1$, $z_2$, $z_3$ les images des points $A$, $B$, $C$ ; $OA + OB + OC$ réalise le minimum cherché, et grâce au résultat de la question précédente, il est unique.

---

**Solution 2.1.1** Soient $(a,b,c)$ un système de coordonnées barycentriques de $M$, les coordonnées barycentriques de $A'$ sont $(-a, a+b, a+c)$ (il suffit de faire intervenir le symétrique $A_1$ de $A$

par rapport à $BC$) d'où l'équation barycentrique de $AA'$ : $(a+c)y-(a+b)t=0$ ($y$ et $t$ étant les $2^{\text{ième}}$ et $3^{\text{ième}}$ coordonnées barycentriques).
Puis, comme $BB'$ : $(b+c)x-(b+a)t=0$, $CC'$ : $(b+c)x-(c+a)y=0$ on a la solution : $x=(a+b)(a+c), y=(b+c)(b+a), t=(c+a)(c+b)$ à condition que $x+y+t\neq 0$ ce qui représente un cercle passant par les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ symétriques de $A$, $B$, $C$ par rapport à $BC$, $CA$, $AB$.

---

**Solution 2.1.2** Les coordonnées des points $M_i$ sont :

$$M_1(a,0), M_2(0,b), M_3(c,1-c).$$

$M_1M_2M_3$ alignés $\Leftrightarrow ab-bc-a+ac=0.$ (1)
Alors $P\left(\dfrac{a+c}{3},\dfrac{b+1-c}{3}\right)=(x,y)$. On remplace $a$ et $b$ en fonction de $x,y$ dans (1) et on exprime que l'équation obtenue : $c^2-c(2x-2y+1)+2x-3xy=0$ a au moins une solution. On obtient la condition

$$x^2+y^2+xy-x-y\geqslant 0$$

en exprimant que le discriminant de l'équation en $c$ est $\geqslant 0$. La réciproque est immédiate et l'ensemble cherché est une ellipse (voir page 205 comment réduire une conique ayant un terme en $xy$).

---

**Solution 2.1.3** On appelle $O$ le point d'intersection de $AC$ et $BD$ et on prend le repère $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ alors avec $D\begin{pmatrix}0\\ \lambda\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}\mu\\ 0\end{pmatrix}$ on a : $N\begin{pmatrix}1/\lambda\\ 0\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}0\\ 1/\mu\end{pmatrix}$ d'où

$$\lambda\mu\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DC}.$$

Ce résultat est immédiat si on fait un dessin et si on utilise le théorème de Thalès.

---

**Solution 2.1.4** Équations barycentriques de $D_{am}$ : $\begin{pmatrix}t\alpha+1-t\\ t\beta\\ t\gamma\end{pmatrix}$, $D_{bc}$ : $\begin{pmatrix}0\\ t'\\ 1-t'\end{pmatrix}$ où $m\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ avec $\alpha+\beta+\gamma=1$ (on s'est placé dans la base affine $(a,b,c)$). On obtient alors $a'\begin{pmatrix}0\\ \beta/(1-\alpha)\\ \gamma/(1-\alpha)\end{pmatrix}$ ainsi que $b'$ et $c'$ par symétrie ; on a : $a''\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha}{1-\beta}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha}{1-\gamma}\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\beta}{1-\gamma}\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma}{1-\beta}\end{pmatrix}$ d'où $D_{aa''}\begin{pmatrix}1-t+\dfrac{t\alpha}{2}\left(\dfrac{1}{1-\beta}+\dfrac{1}{1-\gamma}\right)\\ \dfrac{t\beta}{2(1-\gamma)}\\ \dfrac{t\gamma}{2(1-\beta)}\end{pmatrix}$ on remarque que $\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha(1-\alpha)}{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}\\ \dfrac{\beta(1-\beta)}{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}\\ \dfrac{\gamma(1-\gamma)}{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}\end{pmatrix}$ appartient à $D_{aa''}\cap D_{bb''}$, symétrique en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ c.q.f.d.

---

**Solution 2.2.1**

(1) On exprime que $a' = tb + (1-t)c$ et que $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC}$ soit

$$\mathrm{Re}[(a - tb - (1-t)c)(\overline{c-b})] = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\mathrm{Re}[(a-c)(\overline{c-b})}{|c-b|^2}.$$

d'où $a' = \dfrac{\mathrm{Re}[(a-c)(\overline{c-b})]b + \mathrm{Re}[(a-b)(\overline{b-c})]c}{|b-c|^2}$ ce qui se simplifie encore sous la forme $a' = \dfrac{a}{2} + \dfrac{\overline{a}}{2}\dfrac{b-c}{\overline{b-c}} + \dfrac{\overline{b}c - b\overline{c}}{2(\overline{b-c})}$.

(2) Soit $ux + vy = h$ l'équation d'une droite (avec $(u,v) \neq (0,0)$), on pose $\alpha = \dfrac{u+iv}{2}$ et $z = x + iy$ alors l'équation de la droite s'écrit de manière équivalente sous la forme $\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z = h = 2\,\mathrm{Re}(\alpha\overline{z})$. $\alpha$ est en fait l'affixe d'un vecteur perpendiculaire à $D$.
On obtient alors immédiatement l'équation de la droite orthogonale à $\overrightarrow{BC}$ et passant par $A$ : $(b-c)\overline{z} + (\overline{b-c})z = h$ où $h = 2\,\mathrm{Re}[(b-c)\overline{a}] = (b-c)\overline{a} + (\overline{b-c})a$.

(3) On écrit, par exemple, que l'orthocentre cherché est à l'intersection de la hauteur issue de $A$ et de celle issue de $C$

$$\begin{cases} (b-c)\overline{z} + \overline{b-c}z & = (b-c)\overline{a} + \overline{b-c}a \\ (b-a)\overline{z} + \overline{b-a}z & = (b-a)\overline{c} + \overline{b-a}c \end{cases}$$

et on résout ce système en $z$ d'où

$$z = \frac{(b-c)(b-a)(\overline{c-a}) + (b-c)(\overline{b-a})c - (b-a)(\overline{b-c})a}{(b-c)(\overline{b-a}) - (\overline{b-c})(b-a)} = \frac{N}{D}.$$

(4) On simplifie la dernière formule en utilisant le fait que $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$, $\overline{b} = \dfrac{1}{b}$, $\overline{c} = \dfrac{1}{c}$. On a ainsi

$$\begin{aligned} abcD &= (b-c)(a-b)c - (b-a)(c-b)a = (b-c)(a-b)(c-a) \\ abcN &= (b-c)(b-a)(a-c)b + (b-c)(a-b)c^2 - (b-a)(c-b)a^2 \\ &= (b-c)(b-a)(c-a)(b+c+a) \end{aligned}$$

soit finalement $z = a + b + c$.
*Remarque* : si on prend un triangle quelconque, on peut faire une translation pour ramener l'origine an centre du cercle circonscrit. Avec une homothétie on se ramène aussi au cas où ce cercle est de rayon 1. Le centre de gravité admet $\dfrac{a+b+c}{3}$ comme affixe et on vient de voir que l'orthocentre avait $a+b+c$ comme affixe donc les trois points en question sont alignés et on peut dire même que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ où $O$ est le centre du cercle circonscrit, $G$ le centre de gravité et $H$ l'orthocentre.

---

**Solution 2.3.1** On utilise le fait que l'aire du triangle $ABC$ est la moitié du déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (au signe près). On a alors

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) &= \det(\overrightarrow{A'B} + 2\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC'} + 2\overrightarrow{BA}) = -\det(-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}) \\ &= \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + 2\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) - 2\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) \\ &= \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + 2\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + 2\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) \\ &= 7\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$

donc l'aire du triangle $A'B'C'$ vaut 7 fois celle du triangle $ABC$.
*Remarque* : le rapport des aires ne change pas lorsque l'on fait une transformation affine,

on peut donc envoyer le triangle $ABC$ sur le triangle $A_1B_1C_1$ où $A_1$ est l'origine du repère orthonormé, $B_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $C_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. On obtient alors $A'\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $B'\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $C'\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et par un calcul simple on arrive à $\det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = 7$.

---

**Solution 2.3.2** On peut choisir une base orthonormée dans laquelle $a$ est proportionnel au premier vecteur, en faisant une homothétie, on peut même prendre pour $a$ ce premier vecteur. On a alors $\det(a, b) = b_2$ et

$$\begin{vmatrix}(a|c) & (a|d)\\(b|c) & (b|d)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}c_1 & d_1\\(b|c) & (b|d)\end{vmatrix} = (b|c_1d - d_1c) = b_2\det(c, d)$$

car la première coordonnée du vecteur $c_1d - d_1c$ est nulle.

---

**Solution 2.4.1** On raisonne par l'absurde en supposant que $A$ n'est pas contenu dans une droite.
Soient $a \in A$ et $D$ une droite tels que $\mathrm{d}(a, D) > 0$ soit minimum (on sait que c'est possible car on travaille sur un ensemble fini). $D$ passe par trois points de $A$ : $b, c, d$.

- Si la projection orthogonale de $a$ est à l'extérieur du segment $bcd$ alors la droite joignant $a$ au plus éloigné (par exemple $d$) et le point le plus proche de $a$ (dans la direction de $d$) permettent d'avoir une contradiction.
- Si la projection de $a$ est dans le segment $bcd$, en supposant que $bc$ soit du même coté, $c$ étant le plus éloigné, alors la droite $ac$ et le point $b$ permettent là aussi d'avoir une contradiction.

---

**Solution 2.5.1** On appelle $O$ le centre du cercle, $P$ et $Q$ les points où se font les réflexions, $A(-a, 0)$ et $R$ le rayon du cercle. $Q(x, \sqrt{R^2 + x^2})$, $x \in [0, R]$. On a :

$$\sin\alpha = \frac{x}{R},\ \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}},\ \sin\beta = \frac{x + a}{\sqrt{(x + a)^2 + R^2 - x^2}}.$$

Posons $f(x) = \sin\beta - \sin 2\alpha$, $f(R) = 1$ et $f\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right) = \sin\beta - 1 \leqslant 0$ donc le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'une solution.

---

**Solution 3.1.1** On a :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}.$$

Pour que l'ensemble soit non vide, il faut que $\overrightarrow{C} \perp \overrightarrow{AB}$.
On choisit $P$ tel que $\overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{C} \wedge \overrightarrow{AB})/AB^2$ alors $(E)$ est la droite passant par $P$, parallèle à $\overrightarrow{AB}$.
*Remarque* : la technique utilisée ici est celle des équations linéaires, lorsque le système est possible ($\overrightarrow{C} \perp \overrightarrow{AB}$) on cherche une solution particulière $P$ sous une forme simple (!) et on rajoute l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

---

**Solution 3.2.1** On a : $A = a(a^2 - b^2)$.
$B = \dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$ si $\sin\theta \neq 0$, $B = 1$ si $\sin\theta = 0$.
$C = \cos 3\theta$.

---

**Solution 3.2.2** Le développement du déterminant nous donne :

$$\frac{2\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})\sin(\frac{\alpha-\gamma}{2})\sin(\frac{\gamma-\beta}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

(il faut être un expert en formule de trigonométrie pour arriver à ce résultat !).

---

**Solution 3.2.3**

(1) On dérive $D(x)$ colonne par colonne, à chaque fois, on aura une colonne de 1 que l'on retranchera aux autres colonnes, on aura ainsi une somme de déterminants ne dépendant pas de $x$.

*Remarque* : le calcul de la dérivée d'un déterminant (application multilinéaire) peut se faire effectivement colonne par colonne (comme le calcul de la dérivée d'un produit), c'est la généralisation de la proposition 6.1.1 page 247 où l'on dérive une application bilinéaire.

(2) Comme $D'(x)$ est constant, $D(x)$ est une fonction affine de $x$. $D(-a) = \omega(a)$, $D(-b) = \omega(b)$, d'où $D(x) = \dfrac{b+x}{b-a}\omega(a) + \dfrac{a+x}{a-b}\omega(b)$ et $D = D(0) = \dfrac{b\omega(a) - a\omega(b)}{b-a}$.

(3) Le cas où $b = a$ se traite en considérant que $D$ est une fonction de $b$, continue (c'est un polynôme) et en passant à la limite dans l'expression ci-dessus on trouve $D = \omega(a) - a\omega'(a)$.

---

**Solution 3.2.4** On utilise ici la propriété suivante : $\cos(2a_k) = 2\cos^2 a_k - 1$. On ajoute la première colonne à la dernière, le déterminant est alors égal à

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 1 & \cos a_1 & \cos^2 a_1 \\ 1 & \cos a_2 & \cos^2 a_2 \\ 1 & \cos a_3 & \cos^2 2a_3 \end{vmatrix}.$$

On retranche alors la première ligne aux deux autres lignes, on met $\cos a_2 - \cos a_1$ et $\cos a_3 - \cos a_1$ en facteur et on termine les calculs pour trouver $\Delta = (\cos a_1 - \cos a_2)(\cos a_2 - \cos a_3)(\cos a_3 - \cos a_1)$.

---

**Solution 3.3.1**

(1) Pour $p = n+2$, $i \in [1, p]$, soit $x_i \in \bigcap_{j\neq i} C_j$. Comme la famille $(x_i - x_1)_{i\in[\![2,n+1]\!]}$ est liée alors $\alpha_2(x_2 - x_1) + \cdots + \alpha_p(x_p - x_1) = 0$ donc si on pose $\lambda_1 = -\sum_{i=2}^{p}\alpha_i$ et $\lambda_i = \alpha_i$ pour $i \geqslant 2$ alors $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i = 0$ avec $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i = 0$, les $\lambda_i$ étant non tous nuls. On groupe alors les $x_i$ correspondant aux $\lambda_i \geqslant 0$ et ceux correspondant aux $\lambda_i < 0$ et on a par conséquent $\sum_{i\in I^+}\lambda_i x_i = \sum_{i\in I^-}(-\lambda_i)x_i = \left(\sum_{i\in I^+}\lambda_i\right)y$ où $I^+ = \{i \in [\![1,p]\!] \mid \lambda_i \geqslant 0\}$ et $I^- = \{i \in [\![1,p]\!] \mid \lambda_i < 0\}$. $y \in \bigcap_{i=1}^{p} C_i$ (si $I^- = \emptyset$ alors la somme sur $I^-$ est nulle).

La récurrence se fait alors de la même façon.
La réponse est non, il suffit de prendre en dimension 1 $C_i = ]0, 1/i[$.
Si les $C_i$ sont compacts, alors on choisit $x_p$ dans $\bigcap_{i=1}^{p} C_i$. La suite $x_p$ est une suite d'éléments de $C_1$ qui est compact, soit $x$ une valeur d'adhérence. $x$ est bien dans l'intersection de tous les $C_i$.

(2) Pour chaque valeur de $\alpha \in ]-\pi/2, +\pi/2[$, on projette $S_i$ selon la direction de la droite $D_\alpha$ du plan $xOy$, qui fait un angle $\alpha$ avec l'axe $Oy$, sur l'axe $Ox$. On reporte cette projection dans le plan $z = \tan\alpha$.
L'ensemble des segments obtenus dans le plan $xOz$ est une bande $B_i$ du plan $xOz$ espace affine de dimension 2 telle que l'intersection de toute sous-famille de cardinal 3 soit non vide (c'est l'hypothèse). On peut donc dire que l'intersection de toutes ces bandes est non vide, un point de cette intersection fournira une droite $D_\alpha$ (grâce à la cote de ce point) qui rencontre tous les segments $S_i$.

---

**Solution 3.3.2** On prend pour axe $Oz$ la perpendiculaire commune $L$ à $D$ et $D'$ (qui rencontre $D$ en $A$ et $D'$ en $B$) et pour plan $xOy$ le plan parallèle à $D$ et $D'$ passant par le milieu de $AB$.

---

**Solution 3.3.3** C'est la droite $L$ d'équations : $(c+1)x + (c-1)y - 2z = 0$, $(c+1)(x-a) + (c-1)(y-b) = 0$.

---

**Solution 3.4.1** Le cercle $\Gamma$ de centre $M(x, y, z)$ de rayon $a$ situé dans un plan $P$ orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$ a pour équations : $\begin{cases} (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 & = a^2 \\ \alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) & = 0 \end{cases}$.
En prenant $Z = 0$ dans les équations ci-dessus, on aura l'intersection du cercle avec le plan $XOY$. On obtient l'intersection d'un cercle et d'une droite.
Si $P$ n'est pas un plan de coordonnées, pour que l'on ait tangence avec le plan $XOY$, il faut et il suffit (ici) que ces deux ensembles se coupent en un point, i.e. $\dfrac{\gamma^2 z^2}{\alpha^2 + \beta^2} = a^2 - z^2$, où $z^2 = a^2 \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ ; on fait la même chose avec $X$ et $Y$, le lieu cherché est inclus dans la sphère $\Sigma$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ et est contenu (pour des raisons évidentes) dans le cube $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant a$.
De même si $P$ est l'un des plans de coordonnées.
Réciproque : il suffira de poser $\alpha^2 = a^2 - x^2$, $\beta^2 = a^2 - y^2$, $\gamma^2 = a^2 - z^2$, on remonte alors les calculs ci-dessus d'où l'ensemble cherché :
le lieu de l'ensemble des centres des cercles est l'intersection de la sphère $\Sigma$ avec le cube $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant a$.

---

**Solution 3.4.2** On choisit un repère orthonormé tel que les points aient pour coordonnées : $A(a, 0, 0)$, $B(-a/2, a\sqrt{3}/2, 0)$, $C(-a/2, -a\sqrt{3}/2, 0)$, $D(0, 0, a\sqrt{2})$. Le coté du tétraèdre vaut $a\sqrt{2}$.
On écrit ensuite les équations des plans et on utilise la formule de la proposition 1.3.7 page 29 qui donne la distance d'un point à un plan.
La condition donnée est alors équivalente à

$$12x^2 + 12y^2 + 12\left(z - \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{2}(2k^2 - a^2)$$

qui est l'équation d'une sphère de centre $(0,0,\frac{a}{2\sqrt{2}})$ et rayon $\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{2k^2-a^2}$ lorsque $k \geqslant \frac{a}{\sqrt{2}}$.

---

**Solution 3.4.3**

(1) L'équation de la sphère s'écrit $x^2+y^2+z^2 = 2(px+qy+rz)$ où $(p,q,r)$ sont les coordonnées de $\Omega$. On obtient les équations

$$4a^2-4ap = 4b^2-4bq = 4c^2-4cr = 0$$

d'où $p=a$, $q=b$, $r=c$ et $R^2 = p^2+q^2+r^2 = a^2+b^2+c^2$.
Le plan $ABC$ admet pour équation $\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{2b}+\dfrac{z}{2c} = 1$ et $\overrightarrow{O\omega} = (a+\frac{\lambda}{a}, b+\frac{\lambda}{b}, c+\frac{\lambda}{c})$. En reportant on obtient $\lambda = \dfrac{-a^2b^2c^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$ d'où les coordonnées de $\omega$ :

$$\frac{a^3(b^2+c^2)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2},\ \frac{b^3(a^2+c^2)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2},\ \frac{c^3(a^2+b^2)}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$

(2) $H$ est l'orthocentre du triangle $ABC$. En effet le plan $OAH$ est orthogonal à $BC$ donc $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ et comme les points $A$, $B$, $C$ jouent un rôle symétrique $H$ est bien l'intersection des 3 hauteurs.

---