NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE (R)

1. Nombres complexes

1.1. **Corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.**

Exercice 1.1.1. **I**

On pose $x = \dfrac{1+uv}{u+v}$, $y = i\dfrac{1-uv}{u+v}$ et $z = \dfrac{u-v}{u+v}$.

Comment faut-il choisir u et v dans $\mathbb{C}$ pour que x, y et z soient réels ?

Trouver une relation indépendante de u et v entre x, y et z.

Exercice 1.1.2. **F**

Trouver z tel que $|z| = |z-4|$ et $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(z+1+i)$.

1.2. **Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.**

Exercice 1.2.1. **F C** Linéarisation de $\cos^n x$ et de $\sin^n x$.

Établir les formules

$$\cos^{2p} x = \frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos[2(p-k)x] + \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p},$$

$$\cos^{2p+1} x = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \cos[(2(p-k)+1)x],$$

$$\sin^{2p} x = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{2p}{k} \cos[2(p-k)x] + \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p},$$

$$\sin^{2p+1} x = \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{k} \sin[(2(p-k)+1)x],$$

Exercice 1.2.2. **F**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $z \in \mathbb{C}$. Simplifier l'expression

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} (z+\omega^k)^n$$

1.3. **Équation du second degré.**

Exercice 1.3.1. **F**

Soit $u \in]-\pi, \pi[$ et z_1, z_2 les racines (éventuellement confondues) de l'équation

$$z^2 - 2z(\cos u + i \sin u) + 2i \sin u(\cos u + i \sin u).$$

Calculer le module et l'argument de z_1 et z_2.

Exercice 1.3.2. **I**

(1) Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 2\lambda^2 z^2(1+\cos\theta)\cos\theta + \lambda^4(1+\cos\theta)^2 = 0$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\theta \in [0, \pi]$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n + z_4^n$ où les z_i sont les racines de l'équation ci-dessus.

1.4. **Exponentielle complexe.**

Exercice 1.4.1. **I C T**

Montrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{q=0}^{2n-1} \cos^{2p}\left(x + \frac{q\pi}{2n}\right) = \frac{2n\binom{2p}{p}}{2^{2p}}, \quad p < n.$

Utiliser les formules d'Euler (cf. proposition 1.1.4 page 14) et la formule du binôme de Newton.

1.5. **Nombres complexes et géométrie plane.**

Exercice 1.5.1. **I C**

On suppose que les quatre nombres complexes a, b, c, d, sont distincts

Montrer que si 2 des 3 nombres $\dfrac{d-a}{b-c}$, $\dfrac{d-b}{c-a}$, $\dfrac{d-c}{a-b}$ sont imaginaires purs, le $3^{\text{ième}}$ l'est aussi.

Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 1.5.2. **I**

Montrer que $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ distincts ont même module ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $a + b = ki(a - b)$.

Interprétation géométrique ?

En déduire que $|a| = |b| \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $(a + b)^2 + \lambda(a - b)^2 = 0$ ou $a = b$.

Exercice 1.5.3. **I**

Soit $ABCD$ un quadrilatère, on construit les triangles isocèles directs $A'BA$, $B'CB$, $C'DC$, $D'AD$ rectangles en A', B', C', D'.

Montrer que $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{B'D'}$ sont orthogonaux et de même longueur.

---

2. Géométrie élémentaire du plan

2.1. Modes de repérage dans le plan.

Exercice 2.1.1. **I**

On considère dans le plan affine une droite D qui coupe les cotés bc, ca, ab d'un triangle abc en p, q, r respectivement.

On définit trois points i, j, k par $\overrightarrow{ai} = \overrightarrow{aq} + \overrightarrow{ar}$, $\overrightarrow{bj} = \overrightarrow{bp} + \overrightarrow{br}$, $\overrightarrow{ck} = \overrightarrow{cp} + \overrightarrow{cq}$.

Montrer que i, j, k sont alignés.

2.2. Produit scalaire.

Exercice 2.2.1. **I T**

Dans le plan affine euclidien identifié au corps des complexes on considère 3 points A, B, C, d'affixes respectives a, b, c.

(1) On suppose $b \neq c$, calculer l'affixe du projeté orthogonal de A sur la droite passant par les points B et C.
(2) Montrer que toute droite du plan complexe admet une équation qui se met sous la forme $\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z = h$ où z désigne l'affixe d'un point qui décrit la droite, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $h \in \mathbb{R}$.
Donner, sous la forme précédente, l'équation de la droite orthogonale à $\overrightarrow{BC}$ passant par A.
(3) Calculer l'affixe de l'orthocentre du triangle ABC.
(4) Si a, b, c sont dans $\mathbb{U}$, donner une expression très simple de l'affixe de l'orthocentre du triangle ABC.
En déduire que, pour un triangle quelconque, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre sont alignés.

2.3. Déterminant.

Exercice 2.3.1. **F**

Soit ABC un vrai triangle, on construit le triangle $A'B'C'$ de la manière suivante

- A' est le symétrique de A par rapport à B,
- B' est le symétrique de B par rapport à C,
- C' est le symétrique de C par rapport à A.

Déterminer l'aire du triangle $A'B'C'$ en fonction de celle du triangle ABC.

Exercice 2.3.2. **F**

Soient (a, b, c, d) 4 vecteurs du plan euclidien orienté. Montrer que

$$\det(a, b)\det(c, d) = \begin{vmatrix} (a|c) & (a|d) \\ (b|c) & (b|d) \end{vmatrix}.$$

2.4. Droites.

EXERCICE 2.4.1. **F C**
Dans le plan affine euclidien, on considère les 2 ensembles de 2 droites passant par l'origine d'équations :

$$\{D_1, D_1'\} \ : \ ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,\ b^2 - ac \geqslant 0$$
$$\{D_2, D_2'\} \ : \ a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = 0,\ b'^2 - a'c' \geqslant 0.$$

(1) Déterminer l'angle (D_1, D_1') (au signe prés).
(2) Chercher une C.N.S. pour que $\{D_2, D_2'\}$ soient les bissectrices de $\{D_1, D_1'\}$.

EXERCICE 2.4.2. **D**
Démontrer que, si les distances mutuelles d'une famille infinie de points du plan sont entières, ces points sont alignés.

EXERCICE 2.4.3. **I**
Dans le plan affine euclidien, on donne un segment $[a, b]$ et une droite D non parallèle à D_{ab}. Trouver un point m sur D tel que $\|\overrightarrow{am}\| + \|\overrightarrow{bm}\|$ soit minimum.

2.5. Cercles.

EXERCICE 2.5.1. **F T**
Soit (D) la droite fixe d'équation $ux+vy+w = 0$ et (C_λ) le cercle d'équation $x^2+2\lambda x+y^2+a^2 = 0$ $(\lambda^2 \geqslant a^2)$. Soit $M \in (D) \cap (C_\lambda)$ et M' un point de (C_λ) de même ordonnée que M. Trouver l'ensemble des points M' quand λ décrit $\mathbb{R}\setminus]-a, +a[$.

EXERCICE 2.5.2. **I**
Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un cercle (C) a pour centre (a, b) et pour rayon R.

(1) Montrer qu'un paramétrage de (C) est $\begin{cases} x = a + \dfrac{1}{2}R\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y = b + \dfrac{1}{2i}R\left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{cases} \quad t \in \mathbb{C}, |t| = 1.$
(2) En déduire l'ensemble des centres des triangles équilatéraux dont les 3 sommets appartiennent à la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y^2 = 2px$.

EXERCICE 2.5.3. **F**
Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle (C) est tangent en O à Oy et contient le point $A = O + a\vec{i}$. Au point L de $(C) \setminus \{A\}$ on associe les points M de la droite AL tels que $LM = a$. Déterminer l'ensemble de ces points.

EXERCICE 2.5.4. **I**

Dans le plan affine rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ on donne les points $A(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $B(\sqrt{2},-\sqrt{2})$; le cercle (C) de centre O et de rayon 2. A tout point M de (C) non situé en A ou B, on associe les intersections P et Q de Ox avec AM et BM respectivement.
Déterminer le lieu (H) du centre I du cercle circonscrit au triangle MPQ quand M décrit (C).

---

3. Géométrie élémentaire de l'espace

3.1. **Produit vectoriel.**

EXERCICE 3.1.1. **I**

Soit E l'espace euclidien orienté de dimension 3, (a,b,c) une base de E, résoudre le système

$$(x,y,z)\in E^3,\ y\wedge z=a,\ z\wedge x=b,\ x\wedge y=c.$$

EXERCICE 3.1.2. **F**

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, résoudre l'équation : $x+a\wedge x=b$, a et b donnés dans $\mathbb{R}^3$.

3.2. **Déterminant ou produit mixte.**

EXERCICE 3.2.1. **F**

Déterminer l'ensemble des points z du plan complexe tels que z, z^2 et z^5 soient alignés.

EXERCICE 3.2.2. **F T**

Calculer le déterminant $\Delta=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & a_1\\ a_2 & a_2+b_2 & a_2\\ a_3 & a_3 & a_3+b_3\end{vmatrix}$

EXERCICE 3.2.3. **I**

Calculer $A_3=\begin{vmatrix}\sin(2\alpha_1) & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \sin(\alpha_1+\alpha_3)\\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin(2\alpha_2) & \sin(\alpha_2+\alpha_3)\\ \sin(\alpha_3+\alpha_1) & \sin(\alpha_3+\alpha_2) & \sin(2\alpha_3)\end{vmatrix}$.

3.3. **Droites et plans.**

EXERCICE 3.3.1. **D**

Soient (D) et (D') 2 droites non coplanaires, M' la projection orthogonale de M élément de (D) sur (D'). Soit (P) le plan passant par (D) et M', (P') le plan passant par (D') et M et $\alpha\in[0,\pi/2]$ l'angle de (P) et de (P').
Prouver que $MM'.\tan\alpha$ est indépendant de $M\in(D)$.

EXERCICE 3.3.2. **I**

Soit (D) la droite d'équations $x+y+z-1=0$, $x-y-2z=0$.
Déterminer la projection orthogonale (D') de (D) sur le plan d'équation $x+2y+3z-6=0$.

EXERCICE 3.3.3. **F T**
Soient P_1, P_2, P_3, P_4 les plans d'équations respectives : $x + y = 1$, $y + z = 1$, $z + x = 1$, $x + 3y + z = 0$ et M le point de coordonnées $(1, 1, a)$.
Déterminer a pour que les symétriques de M par rapport aux 4 plans P_i soient coplanaires.

3.4. **Sphères.**

EXERCICE 3.4.1. **F T**
Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, montrer que les 5 points $A(4, 7, 1)$, $B(3, -3, 6)$, $C(-5, 1, 4)$, $D(5, 6, -1)$, $E(-4, 3, -3)$ sont situés sur une même sphère.

EXERCICE 3.4.2. **I**
Soient A, B, C, D quatre points de l'espace euclidien non coplanaires. Montrer qu'il existe une unique sphère passant par ces 4 points (appelée sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$).
Application : former l'équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$ dans le cas où $A(0, 2, 4)$, $B(1, 3, 2)$, $C(2, 1, 3)$, $D(-2, -3, -1)$.

---

1. INDICATIONS :

Indication 1.1.1 Penser à $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$ puis poser $u = \lambda v$ et écrire u et v sous forme trigonométrique. On trouve une relation simple portant sur x^2, y^2, z^2.

Indication 1.1.2 Écrire z sous forme trigonométrique.

Indication 1.2.1 Utiliser les formules d'Euler.

Indication 1.2.2 On utilise la formule du binôme et on permute les sommations.

Indication 1.3.1 Écrire $\cos u + i \sin u = e^{iu}$ et on trouve $z_1 = e^{iu} - 1$, $z_2 = e^{iu} + 1$.

Indication 1.3.2

(1) On a une équation bicarrée, de solutions $z = \pm i\lambda\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{\pm i\theta/2}$.
(2) Distinguer les cas n pair ou impair.

Indication 1.4.1 On permute les sommes, faire attention car on obtient des termes tous nuls sauf 1.

Indication 1.5.1 Poser $d - a = ki(b - c)$ et $d - b = hi(c - a)$, avec h et k réels puis trouver une relation entre $d - c$ et $a - b$.

Indication 1.5.2 Écrire a et b sous forme trigonométrique. On retrouve alors une caractérisation des losanges.

Indication 1.5.3 On exprime que A' (respectivement B', C', D') est l'image de A par une similitude de centre B et on calcule l'affixe a' de A' en fonction des affixes a et b de A et B.

Indication 2.1.1 On définit la droite D par m_1 et m_2 deux points distincts donnés par leur coordonnées barycentriques. On exprime alors les vecteurs $\overrightarrow{op}$, $\overrightarrow{oq}$ et $\overrightarrow{or}$ et on obtient alors une relation sur les vecteurs $\overrightarrow{oi}$, $\overrightarrow{oj}$ et $\overrightarrow{ok}$.

Indication 2.2.1

(1) On trouve $a' = \dfrac{a}{2} + \dfrac{\overline{a}}{2}\dfrac{b-c}{\overline{b-c}} + \dfrac{\overline{b}c - b\overline{c}}{2(\overline{b-c})}$ (où a' désigne l'affixe du projeté).
(2) Partir de l'équation cartésienne d'une droite.

(3) On écrit le système de 2 équations vérifié par z et $\overline{z}$, on trouve
$$z = \frac{(b-c)(b-a)(\overline{c-a}) + (b-c)(\overline{b-a})c - (b-a)(\overline{b-c})a}{(b-c)(\overline{b-a}) - (\overline{b-c})(b-a)} = \frac{N}{D}.$$
(4) L'affixe (dans le cas particulier étudié) est donnée par $z = a + b + c$.
Ramener ensuite un triangle quelconque par une homothétie-translation au cas où ses sommets sont sur le cercle unité et conclure.

Indication 2.3.1 On utilise le fait que l'aire du triangle ABC est la moitié du déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (au signe près), on trouve alors un résultat qui peut paraître surprenant, l'aire du triangle $A'B'C'$ vaut 7 fois celle du triangle ABC.

Indication 2.3.2 Avec une homothétie, on se ramène au cas où a est le premier vecteur d'une base orthonormée, le calcul est alors élémentaire.

Indication 2.4.1
(1) Exprimer la tangente de l'angle (au signe près) à l'aide des coefficients de l'équation.
(2) Les droites D_2 et D_2' doivent-être perpendiculaires puis on exprime une condition sur les angles.

Indication 2.4.2 On raisonne par l'absurde et on montre que E serait inclus dans une réunion finie d'ensembles finis (intersection d'hyperboles ou de droites).

Indication 2.4.3 Distinguer 2 cas selon que D coupe le segment AB ou non (et dans ce deuxième cas, essayer de se ramener au premier cas).

Indication 2.5.1 Distinguer 2 cas selon que $u \neq 0$ (et dans ce cas M' décrit une hyperbole) et $u = 0$ où M' décrit une droite.

Indication 2.5.2
(1) Écrire $t = e^{i\theta}$.
(2) On écrit x et y fonction de t dans $y^2 = 2px$, on obtient une équation du 4-ième degré en t. On utilise ensuite les fonctions symétriques élémentaires. L'ensemble cherché est la parabole d'équation $9y^2 - 2p(x - 4p) = 0$.

Indication 2.5.3 Passer en coordonnées polaires d'origine A.

Indication 2.5.4 Utiliser l'homothétie de centre M qui permet de passer du triangle MAB au triangle MPQ.

Indication 3.1.1 Utiliser la formule de Gibbs pour avoir $(a, b, c) = (x, y, z)^2$.

Indication 3.1.2 Faire le produit scalaire et le produit vectoriel des 2 membres de l'équation à résoudre par a.

Indication 3.2.1 Utiliser les déterminants pour traduire la condition d'alignement.

Indication 3.2.2 Faire les calculs (bêtement).

Indication 3.2.3 On trouve $A_3 = 0$.

Indication 3.3.1 On écrit les équations de D et D' dans un repère approprié, $(D)\begin{cases} y = mx \\ z = h \end{cases}$, $(D')\begin{cases} y = -mx \\ z = -h \end{cases}$ et on fait les calculs. Il y a une solution géométrique plus élégante mais je l'ai perdue...

Indication 3.3.2 On écrit l'équation générale d'un plan passant par D et on traduit la condition d'orthogonalité.

Indication 3.3.3 On cherche les coordonnées des symétriques de M et on traduit par un déterminant 4×4 la coplanarité. On trouve $a = -1$ ou $a = 3$.

Indication 3.4.1 On résout un système de 5 équations à 4 inconnues qui est compatible.

Indication 3.4.2 On cherche l'équation de la sphère en question sous la forme $S + \lambda P$ où S est une sphère passant par ABC et P le plan ABC.

2. Solutions

Solution 1.1.1 On a une condition implicite : $u+v\neq 0$.
On exprime que $z=\overline{z}$ ce qui donne $\overline{u}v=u\overline{v}$. Les cas $u=0$, $v\neq 0$ et $v=0$, $u\neq 0$ sont écartés car on ne pourrait avoir x et y simultanément réels. On peut écrire $u=\lambda v$ avec $\lambda=\dfrac{z-1}{z+1}\in\mathbb{R}$ (nécessairement, on a $z\neq\pm 1$). En exprimant que $x=\overline{x}$ et $y=\overline{y}$, on trouve

$$(v-\overline{v})(1-\lambda|v|^2)=0 \text{ et } (v+\overline{v})(1-\lambda|v|^2)=0.$$

$v\neq 0$ (sinon $x=\dfrac{1}{u}$, $y=\dfrac{i}{u}$, x et y ne peuvent être simultanément réels) d'où $\lambda=\dfrac{1}{|v|^2}$. On a donc $u=\dfrac{v}{|v|^2}$ ce qui donne $|uv|=1$ et $\dfrac{u}{|u|}=\dfrac{v}{|v|}$. On choisira finalement $u=re^{i\theta}$, $v=\dfrac{1}{r}e^{i\theta}$.
On vérifie alors que $x=\dfrac{2r}{r^2+1}\cos\theta$, $y=\dfrac{2r}{r^2+1}\sin\theta$ et $z=\dfrac{r^2-1}{r^2+1}$.
On a $x^2+y^2=\dfrac{4r^2}{(r^2+1)^2}=1-z^2$ soit : $x^2+y^2+z^2=1$.
On remarque que l'on obtient la sphère privée des points $\pm(0,0,1)$.

Solution 1.1.2 On trouve $z=2+2i$.

Solution 1.2.1
Ces formules sont des conséquences des formules d'Euler $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.
Il en découle les relations suivantes

$$\cos^n x=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(n-2k)x}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(n-2k)x$$

en prenant les parties réelles

$$\sin^n x=\frac{(-i)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}e^{i(n-2k)x}.$$

On particularise alors les cas $n=2p$, $n=2p+1$ en regroupant dans les sommes les termes d'indice k et $n-k$.

Solution 1.2.2 Il suffit de développer par la formule du binôme, on arrive alors à

$$\begin{aligned}\Sigma_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\omega^{kp}z^{n-p}\right)\\&=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}z^{n-p}\left(\sum_{k=1}^{n}\omega^{kp}\right)\\&=n(1+z^n)\end{aligned}$$

en remarquant que $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega^{kp}=\begin{cases}0 & \text{si } p\notin\{0,n\}\\ n & \text{si } p\in\{0,n\}\end{cases}$.

Solution 1.3.1 On réécrit l'équation sous la forme $z^2 - 2ze^{iu} + 2i\sin u e^{iu} = 0$. Le discriminant réduit vaut $\delta = 1$ et les racines sont $z_1 = e^{iu} - 1$, $z_2 = e^{iu} + 1$. On a immédiatement $|z_2| = 2\cos\frac{u}{2}$ et $\operatorname{Arg} z_2 = \dfrac{u}{2}$.

Pour z_1 on distingue les cas

- $-\pi < u < 0$ alors $|z_1| = -2\sin\frac{u}{2}$ et $\operatorname{Arg} z_1 = \dfrac{u-\pi}{2}$,
- $u = 0$ alors $z_1 = 0$, son argument n'est pas défini,
- $0 < u < \pi$ alors $|z_1| = 2\sin\frac{u}{2}$ et $\operatorname{Arg} z_1 = \dfrac{u+\pi}{2}$.

Solution 1.3.2

(1) On a une équation bicarrée, en posant $Z = z^2$ on a une équation du second degré de discriminant réduit $\Delta = \lambda^4(1+\cos\theta)^2(\cos^2\theta - 1) = \left(i\lambda^2(1+\cos\theta)\sin\theta\right)^2$ d'où les solutions en Z :
$Z_1 = -\lambda^2(1+\cos\theta)e^{i\theta} = \left(i\lambda\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2}\right)^2$,
$Z_2 = -\lambda^2(1+\cos\theta)e^{-i\theta} = \left(i\lambda\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\theta/2}\right)^2$.
On pose alors $z_1 = i\lambda\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2}$, $z_2 = -z_1$ et $z_3 = i\lambda\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\theta/2}$, $z_4 = -z_3$. Ceci donne les racines de l'équation du second degré (éventuellement confondues).

(2) Si n est impair alors $S_n = z_1^n - z_1^n + z_3^n - z_3^n = 0$.
Si $n = 2p$ alors $S_{2p} = 2(Z_1^p + Z_2^p) = (-1)^p 4\lambda^{2p}(1+\cos\theta)^p\cos p\theta$.

Solution 1.4.1 On a $\cos^{2p}\left(x + \dfrac{q\pi}{2n}\right) = \dfrac{1}{2^{2p}}\left(\sum\limits_{k=0}^{2p}\dbinom{2p}{k}\exp\left(i2(p-k)(x + \dfrac{q\pi}{2n})\right)\right)$. La somme à calculer s'écrit donc $\dfrac{1}{2^{2p}}\sum\limits_{k=0}^{2p}\dbinom{2p}{k}S_k$ où $S_k = \sum\limits_{q=0}^{2n-1}\exp\left(i2(p-k)(x + \dfrac{q\pi}{2n}\right)$. Or $S_k = 0$ si $p \neq k$, $S_k = 2n$ si $p = k$ d'où la relation

$$\sum_{q=0}^{2n-1}\cos^{2p}\left(x + \frac{q\pi}{2n}\right) = \frac{2n\dbinom{2p}{p}}{2^{2p}}$$

et on remarque que le membre de droite est indépendant de x.

Solution 1.5.1 Si $d - a = ki(b-c)$ et $d - b = hi(c-a)$, avec h et k réels, alors

(1) $$(d-c)(h+k)i + (a-b)(1-hk) = 0.$$

$h + k \neq 0$ sinon on a $k = -h$ et $hk = 1$ i.e. $h = \pm i$, $k = \mp i$ ce qui est écarté. On a donc $i\dfrac{d-c}{a-b}$ réel. Les autres cas sont obtenus par symétrie.

Remarque : pour obtenir la relation (1), à partir des égalités $d-a = ki(b-c)$ et $d-b = hi(c-a)$ on cherche une relation entre $x = d - c$ et $y = a - b$. On fait intervenir le nombre $z = a - c$ d'où

$$x + iky = z(1+ik) \text{ et } x + y = z(1-ih)$$

d'où, en multipliant la première égalité par $ih - 1$ et la deuxième par $1 + ik$, on obtient bien $x(h+k)i + y(1-hk) = 0$.

Interprétation géométrique : les hauteurs du triangle $A(a)$, $B(b)$, $D(d)$ se coupent en $C(c)$ *orthocentre*. (et, pour des raisons de symétrie, l'un des quatre points est orthocentre du triangle formé par les trois autres.

Solution 1.5.2

$\boxed{\Rightarrow}$ $a = |a|e^{i\theta}$, $b = |a|e^{i\varphi} \Rightarrow a + b = |a|e^{i(\theta+\varphi)/2} 2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$, $a - b = |a|e^{i(\theta+\varphi)/2} 2i \sin\frac{\theta-\varphi}{2}$ donc

$$a + b = \underbrace{-\operatorname{cotan}\frac{\theta-\varphi}{2}}_{=k} i(a - b).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $a = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}$, $b = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}$ d'où $|a|^2 = |b|^2 = \left|\dfrac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\dfrac{a-b}{2}\right|^2$ car les vecteurs images des nombres complexes $\dfrac{a+b}{2}$ et $\dfrac{a-b}{2}$ sont orthogonaux.

Interprétation géométrique : on prend les points $A(a)$, $B(b)$ et $C(a+b)$ alors le parallélogramme $OABC$ est un losange ssi ses diagonales sont orthogonales.
La dernière équivalence est immédiate en prenant $\lambda = k^2$ (en supposant $a \neq b$).

Solution 1.5.3 On exprime que A' (respectivement B', C', D') est l'image de A par une similitude de centre B. Si on note avec des lettres minuscules les affixes des points considérés, on a

$$a' - b = \frac{1+i}{2}(a - b),\ b' - c = \frac{1+i}{2}(b - c),\ c' - d = \frac{1+i}{2}(c - d),\ d' - a = \frac{1+i}{2}(d - a).$$

On en déduit que $a' - c' = \dfrac{1}{2}[(1-i)(b-d) + (1+i)(a-c)]$, $b' - d' = \dfrac{1}{2}[(1-i)(c-a) + (1+i)(b-d)]$ ce qui donne $a' - c' = -i(b' - d')$ ce qui permet de conclure.

Solution 2.1.1 Soient m_l deux points définissant la droite D : $m_l = \alpha_l a + \beta_l b + \gamma_l c$, $l = 1, 2$, $\alpha_l + \beta_l + \gamma_l = 1$.

Pour que D coupe les cotés bc, ca, ab en 3 points p, q, r, il faut (et il suffit) que

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \neq 0.$$

On a alors

$$(1) \qquad \overrightarrow{op} = \frac{\alpha_2\overrightarrow{om_1} - \alpha_1\overrightarrow{om_2}}{\alpha_2 - \alpha_1},\ \overrightarrow{oq} = \frac{\beta_2\overrightarrow{om_1} - \beta_1\overrightarrow{om_2}}{\beta_2 - \beta_1},\ \overrightarrow{or} = \frac{\gamma_2\overrightarrow{om_1} - \gamma 1\overrightarrow{om_2}}{\gamma_2 - \gamma_1}.$$

Soit s_l le barycentre de $i(\alpha_l)$, $j(\beta_l)$ et $k(\gamma_l)$ alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{os_l} &= (\beta_l + \gamma_l)\overrightarrow{op} + (\gamma_l + \alpha_l)\overrightarrow{oq} + (\alpha_l + \beta_l)\overrightarrow{or} - (\alpha_l\overrightarrow{oa} + \beta_l\overrightarrow{ob} + \gamma_l\overrightarrow{oc} \\ &= (1 - \alpha_l)\overrightarrow{op} + (1 - \beta_l)\overrightarrow{oq} + (1 - \gamma_l)\overrightarrow{or} - \overrightarrow{om_l}\end{aligned}$$

et donc

$$\overrightarrow{s_2s_1} = (\alpha_2 - \alpha_1)\overrightarrow{op} + (\beta_2 - \beta_1)\overrightarrow{oq} + (\gamma_2 - \gamma_1)\overrightarrow{or} + \overrightarrow{m_1m_2}$$

et grâce à la relation (1), $s_1 = s_2$ i.e.

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\overrightarrow{oi} + (\beta_1 - \beta_2)\overrightarrow{oj} + (\gamma_1 - \gamma_2)\overrightarrow{ok} = 0$$

et vu que $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2) + (\gamma_1 - \gamma_2) = 0$ on en déduit que i, j, k sont alignés.

Solution 2.2.1

(1) On exprime que $a' = tb + (1-t)c$ et que $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC}$ soit

$$\mathrm{Re}[(a - tb - (1-t)c)(\overline{c-b})] = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\mathrm{Re}[(a-c)(\overline{c-b})}{|c-b|^2}.$$

d'où $a' = \dfrac{\mathrm{Re}[(a-c)(\overline{c-b})]b + \mathrm{Re}[(a-b)(\overline{b-c})]c}{|b-c|^2}$ ce qui se simplifie encore sous la forme $a' = \dfrac{a}{2} + \dfrac{\overline{a}}{2}\dfrac{b-c}{\overline{b-c}} + \dfrac{\overline{b}c - b\overline{c}}{2(\overline{b-c})}$.

(2) Soit $ux + vy = h$ l'équation d'une droite (avec $(u,v) \neq (0,0)$), on pose $\alpha = \dfrac{u+iv}{2}$ et $z = x + iy$ alors l'équation de la droite s'écrit de manière équivalente sous la forme $\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z = h = 2\,\mathrm{Re}(\alpha\overline{z})$. α est en fait l'affixe d'un vecteur perpendiculaire à D.
On obtient alors immédiatement l'équation de la droite orthogonale à $\overrightarrow{BC}$ et passant par A : $(b-c)\overline{z} + (\overline{b-c})z = h$ où $h = 2\,\mathrm{Re}[(b-c)\overline{a}] = (b-c)\overline{a} + (\overline{b-c})a$.

(3) On écrit, par exemple, que l'orthocentre cherché est à l'intersection de la hauteur issue de A et de celle issue de C

$$\begin{cases} (b-c)\overline{z} + \overline{b-c}z & = (b-c)\overline{a} + \overline{b-c}a \\ (b-a)\overline{z} + \overline{b-a}z & = (b-a)\overline{c} + \overline{b-a}c \end{cases}$$

et on résout ce système en z d'où

$$z = \frac{(b-c)(b-a)(\overline{c-a}) + (b-c)(\overline{b-a})c - (b-a)(\overline{b-c})a}{(b-c)(\overline{b-a}) - (\overline{b-c})(b-a)} = \frac{N}{D}.$$

(4) On simplifie la dernière formule en utilisant le fait que $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$, $\overline{b} = \dfrac{1}{b}$, $\overline{c} = \dfrac{1}{c}$. On a ainsi

$$\begin{aligned} abcD &= (b-c)(a-b)c - (b-a)(c-b)a = (b-c)(a-b)(c-a) \\ abcN &= (b-c)(b-a)(a-c)b + (b-c)(a-b)c^2 - (b-a)(c-b)a^2 \\ &= (b-c)(b-a)(c-a)(b+c+a) \end{aligned}$$

soit finalement $z = a + b + c$.
Remarque : si on prend un triangle quelconque, on peut faire une translation pour ramener l'origine an centre du cercle circonscrit. Avec une homothétie on se ramène aussi au cas où ce cercle est de rayon 1. Le centre de gravité admet $\dfrac{a+b+c}{3}$ comme affixe et on vient de voir que l'orthocentre avait $a+b+c$ comme affixe donc les trois points en question sont alignés et on peut dire même que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ où O est le centre du cercle circonscrit, G le centre de gravité et H l'orthocentre.

Solution 2.3.1 On utilise le fait que l'aire du triangle ABC est la moitié du déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (au signe près). On a alors

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) &= \det(\overrightarrow{A'B} + 2\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC'} + 2\overrightarrow{BA}) = -\det(-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}) \\ &= \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + 2\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) - 4\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) \\ &= \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + 2\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + 4\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) \\ &= 7\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$

donc l'aire du triangle $A'B'C'$ vaut 7 fois celle du triangle ABC.
Remarque : le rapport des aires ne change pas lorsque l'on fait une transformation affine,

on peut donc envoyer le triangle ABC sur le triangle $A_1B_1C_1$ où A_1 est l'origine du repère orthonormé, $B_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $C_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. On obtient alors $A'\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $B'\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $C'\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et par un calcul simple on arrive à $\det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = 7$.
Remarque bis : géométriquement, c'est évident car les 3 triangles "extérieurs" ont une aire qui vaut le double de l'aire du triangle ABC...

Solution 2.3.2 On peut choisir une base orthonormée dans laquelle a est proportionnel au premier vecteur, en faisant une homothétie, on peut même prendre pour a ce premier vecteur. On a alors $\det(a,b) = b_2$ et

$$\begin{vmatrix}(a|c) & (a|d)\\(b|c) & (b|d)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}c_1 & d_1\\(b|c) & (b|d)\end{vmatrix} = (b|c_1d - d_1c) = b_2\det(c,d)$$

car la première coordonnée du vecteur $c_1d - d_1c$ est nulle.

Solution 2.4.1

(1) Si D_1, D_1' ont pour équation $y = mx$ alors $cm^2 + 2bm + a = 0$.
Si $c \neq 0$ alors $m_1 + m_1' = -\dfrac{2b}{c}$, $m_1m_1' = \dfrac{a}{c}$ ($m_1 = \tan\theta_1$, $m_1' = \tan\theta_1'$) d'où

$$\tan(\theta_1 - \theta_1')^2 = \left(\frac{m_1 - m_1'}{1 + m_1m_1'}\right)^2 = \frac{(m_1 + m_1')^2 - 4m_1m_1'}{(1 + m_1m_1')^2} = 4\frac{b^2 - ac}{(c+a)^2}$$

$(a + c \neq 0)$: on pourra prendre

$$(\widehat{D_1, D_1'}) = \begin{cases}\operatorname{Arctan}\dfrac{2\sqrt{b^2 - ac}}{c+a} & \text{si } a + c = 0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } a + c = 0\end{cases}$$

et on vérifie que ce résultat est aussi valable si $c = 0$.

(2) On a $(\widehat{D_2, D_2'}) = \pi/2$ donc $a' + c' = 0$ puis,

$$\tan(2\theta_2) = \tan(\theta_1 + \theta_1') \Leftrightarrow \frac{2m_2}{1 - m_2^2} = \frac{m_1 + m_1'}{1 - m_1m_1'} \Leftrightarrow aa' + 2bb' = 0.$$

La C.N.S. cherchée est donc

$$a' + c' = 0,\ aa' + 2bb' = 0.$$

Solution 2.4.2 Soit E l'ensemble en question, supposons par l'absurde que E contienne 3 points A, B, C non alignés.

Soit $n = AB$, pour $D \in E$, on a $|DA - DB| \leqslant n$. DA et DB étant des entiers, E est contenu dans la réunion des ensembles $H_i = \{M, |MA - MB| = i\}$. H_i est soit une hyperbole ($i \in [1, n-1]$) soit contenue dans une droite ($i = 0, n$). De même, E est contenu dans la réunion des ensembles $K_j = \{M, |MA - MC| = j\}$, $j \in [0, m]$ où $m = AC$.

E est donc contenu dans la réunion des intersections des ensembles H_i et K_j. Or $H_i \cap K_j$ contient 4 points aux maximum, E serait donc fini, ce qui est impossible.

On a ainsi une contradiction donc tous les points de E sont alignés.

Solution 2.4.3

- Si la droite D coupe le segment $[a,b]$, l'unique solution est le point d'intersection obtenu.
- Si D ne coupe pas le segment $[a,b]$, on se ramène au cas précédent en prenant le point a' symétrique de A par rapport à la droite D. Le segment $[a',b]$ rencontre la droite D en un point c' qui réalise le minimum cherché car $\|am\|+\|bm\| = \|a'm\|+\|bm\|$.

Solution 2.5.1 Les coordonnées de $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ vérifient $ux+vy+w=0$, $x^2-2\lambda x+y^2+a^2=0$. Pour $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ on a $y'=y$ et $x+x'=2\lambda$, $xx'=y^2+a^2$ (x et x' solutions de $X^2-2\lambda X+y^2+a^2=0$).

1^{er} cas $u\neq 0$: $x=-\dfrac{v}{u}y-\dfrac{w}{u}$, $M'\in(\mathcal{H})$: $-y'^2+\dfrac{v}{u}x'y'+\dfrac{w}{u}x'+a^2=0$;
réciproque si $M'\in(\mathcal{H})$ alors $\lambda=\dfrac{1}{2}\left(x'-\dfrac{v}{u}y'-\dfrac{w}{u}\right)$ et $\lambda^2-a^2-y'^2\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\left(x'-\dfrac{v}{u}y'-\dfrac{w}{u}\right)^2 - a^2-y'^2\geqslant 0$ vérifié car $M'\in(\mathcal{H})$ donc $\lambda^2\geqslant a^2$;
Conclusion : dans ce premier cas l'ensemble des points M' décrit l'hyperbole $\mathcal{H}$.

$2^{\text{ième}}$ cas $u=0$, $y=-\dfrac{w}{u}$: M' décrit la droite $y'=-\dfrac{w}{v}$ $\quad(\lambda^2-a^2-\dfrac{w^2}{v^2}\geqslant 0)$ car $x'\neq 0$.

Solution 2.5.2

(1) On pose $t=e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi[$ d'où $x=a+R\cos\theta$, $y=b+R\sin\theta$ et on obtient tout le cercle.

(2) • On cherche $(C)\cap(\mathcal{P})$ en remplaçant x et y en fonction de t dans l'équation de (C) :

$$y^2-2px=\left[b+\frac{R}{2i}(t-\frac{1}{t})\right]^2-2p\left[a+\frac{R}{2}(t+\frac{1}{t})\right]=0.$$

En développant et en multipliant par t^2 on obtient

$$\text{(E)}\qquad t^4-\sigma_1t^3+\sigma_2t^2-\sigma_3t+\sigma_4=0$$

où $\sigma_1=-\dfrac{4}{R}(p+ib)$, $\sigma_2=\dfrac{2}{R^2}(4pa-2b^2-R^2)$, $\sigma_3=-\dfrac{4}{R}(p-ib)$, $\sigma_4=1$.

• On utilise ensuite la caractérisation suivante d'un triangle équilatéral :
ABC est équilatéral direct ssi si Ω désigne le centre du cercle circonscrit alors

$$(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}})=(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega C}})=(\widehat{\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}})=\frac{2\pi}{3}.$$

Ce résultat est immédiat car les triangles ΩAB, ΩBC et ΩCA sont égaux et par conséquent $AB=BC=CA$.

• Si $\Omega(a,b)$ est le centre d'un triangle équilatéral dont les sommets sont sur $(\mathcal{P})$ alors l'équation (E) admet 3 racines t_1,t_2,t_3 qui vérifient $t_2=jt_1$, $t_3=j^2t_1$ avec $|t_1|=1$. On en déduit les relations suivantes

$$\sigma_1=t_1+t_2+t_3+t_4=t_1(\underbrace{1+j+j^2}_{=0})+t_4=\frac{-4}{R}(p+ib)$$

$$\sigma_2=t_4(\underbrace{t_1+t_2+t_3}_{=0})+\underbrace{t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1}_{=0}=0=\frac{2}{R^2}(4pa-2b^2-R^2)$$

$$\sigma_3=t_4(\underbrace{t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1}_{=0})+t_1t_2t_3=t_1^3=\frac{-4}{R}(p-ib)$$

$$\sigma_4=t_1t_2t_3t_4=t_1^3t_4=1.$$

En reportant dans $\sigma_4 = 1$ les relations obtenues avec σ_1 et σ_3, on obtient
$$t_1^3 t_4 = \frac{-4}{R}(p-ib)\times\frac{-4}{R}(p+ib) = \frac{16}{R^2}(p^2+b^2) = 1$$
d'où $R^2 = \dfrac{p^2+b^2}{16}$. En remplaçant R^2 dans $\sigma_2 = 0$ on obtient finalement l'équation $4pa - 2b^2 = 16(p^2+b^2)$.

- L'ensemble E des points Ω cherchés est inclus dans la parabole $(\mathcal{P}')$ qui a pour équation $9y^2 - 2p(x-4p) = 0$.
- Montrons que l'on obtient toute la parabole :
  Si $\Omega(a,b) \in (\mathcal{P}')$ alors on pose $R = \dfrac{\sqrt{p^2+b^2}}{4}$, $t_4 = \dfrac{-4}{R}(p+ib)$ et on choisit pour t_1 une racine cubique de $\dfrac{-4}{R}(p-ib)$. En prenant $t_2 = jt_1$, $t_3 = j^2 t_1$ alors
  - les points M_i de paramètre t_i, $i \in \{1,2,3\}$ situés sur le cercle de centre Ω et de rayon R forment un triangle équilatéral,
  - les $(t_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ sont solutions de l'équation (E) donc les points M_i sont sur la parabole $(\mathcal{P})$.

Conclusion : l'ensemble des centres des triangles équilatéraux dont les 3 sommets appartiennent à la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y^2 = 2px$ est exactement l'ensemble des points situés sur la parabole $(\mathcal{P}')$ d'équation $9y^2 - 2p(x-4p) = 0$.

Solution 2.5.3 On se place en coordonnées polaires d'origine A, alors (C) a pour équation $r = -a\cos\theta$, $\theta \in [0,\pi]$ et L vérifie : $r = -a\cos\theta + a\varepsilon$ i.e. $r = a(1-\cos\theta)$ en prenant $\theta \in [-\pi,+\pi]$: on reconnaît une cardioïde.

Solution 2.5.4

AB et PQ étant parallèles, les triangles MAB et MPQ sont homothétiques de rapport $\dfrac{\overline{PM}}{\overline{AM}} = r_M$. Les centres des cercles circonscrits se correspondent : $\overrightarrow{MI} = r_M\overrightarrow{MO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = (1-r_M)\overrightarrow{OM}$. Comme $\overrightarrow{OM} = 2(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$: $r_M = \dfrac{2\sin\theta}{2\sin\theta+\sqrt{2}}$. L'équation du lieu de H en polaires est donnée par $r = \dfrac{2}{1+\sqrt{2}\sin\theta}$: hyperbole équilatère d'équation cartésienne $(y-2\sqrt{2})^2 - x^2 - 4 = 0$ de centre $\Omega(0,2\sqrt{2})$ (les asymptotes sont les tangentes à (C) issues de Ω, O est un foyer du lieu de H).

Solution 3.1.1 Avec la formule du double produit vectoriel on obtient $(a,b,c) = (x,y,z)^2$ donc le système ne peut avoir de solution que si la base (a,b,c) est directe. On a ensuite $(x,y,z) = \varepsilon\sqrt{(a,b,c)}$ où $\varepsilon \in \{-1,1\}$. Le calcul $b\wedge c = (z\wedge x)\wedge(x\wedge y) = (x,y,z)x$ d'où $x = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{(a,b,c)}}b\wedge c$. On obtient de même $y = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{(a,b,c)}}c\wedge a$ et $z = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{(a,b,c)}}a\wedge b$. On vérifie alors que ces solutions conviennent.

Solution 3.1.2 On fait le produit scalaire et le produit vectoriel des 2 membres de l'équation à résoudre par a, on obtient :

$a.x = a.b$ et $a\wedge x + (a.x)a - a^2x = a\wedge b$ d'où :

$b - x + (a.b)a - a^2x = a\wedge b$ i.e. $x = \dfrac{1}{1+a^2}\left[b + (a.b)a - a\wedge b\right]$.

Il reste à vérifier que x convient et que l'on a toutes les solutions :

si on appelle $f\ : x \mapsto x + a \wedge x$ on vérifie facilement que f est injective, donc bijective (car f est un endomorphisme en dimension finie) et que l'on a ainsi trouvé l'unique solution.

Solution 3.2.1 La C.N.S. d'alignement s'écrit $\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ z & z^2 & z^5\\ \overline{z} & \overline{z}^2 & \overline{z}^5\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $(z-1)(\overline{z}-1)(\overline{z}-z)(z^2 + z\overline{z} + \overline{z}^2 + z + \overline{z} + 1) = 0$

$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$ (si $z = x + iy$) on obtient alors la droite des réels et une hyperbole.

Remarque : on a $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ alignés ssi $\Delta = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c}\end{vmatrix} = 0$, en effet :

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \Re(a) & \Re(b) & \Re(c)\\ \Im(a) & \Im(b) & \Im(c)\end{vmatrix} = 0$ et cette dernière condition est une C.N.S. pour que A, B, C soient alignés.

Solution 3.2.2 On trouve par le calcul que $\Delta = b_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3$ (on peut simplifier un peu ces calculs en utilisant par exemple la linéarité par rapport à la dernière colonne en écrivant que $C_3 = \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 0\\ b_3\end{pmatrix}$. On obtient 2 déterminants, le premier se calcule en retranchant la dernière colonne aux deux premières et le deuxième se ramène à un calcul de déterminant d'ordre 2).

Solution 3.2.3 $A_3 = 0$ car, si C_i désigne la $i$ème colonne alors $C_i = \sin\alpha_i \begin{pmatrix}\cos\alpha_1\\ \cos\alpha_2\\ \cos\alpha_3\end{pmatrix} + \cos\alpha_i \begin{pmatrix}\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_2\\ \sin\alpha_3\end{pmatrix}$ donc les colonnes appartiennent à un espace de dimension 2, elles sont nécessairement liées.

Solution 3.3.1 On se place dans un R.O.N. où $(D)\begin{cases}y = mx\\ z = h\end{cases}$, $(D')\begin{cases}y = -mx\\ z = -h\end{cases}$, $M\begin{pmatrix}x\\ mx\\ h\end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix}x'\\ -mx'\\ -h\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{MM'} \perp (D')$ nous donne $x' = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}x$; équation de (P) $\lambda(y - mx) + \mu(z - h) = 0$ et $M' \in (P) \Rightarrow \lambda = h$, $\mu = -mx'$; un vecteur normal à (P) est donné par : $\begin{pmatrix}-mh\\ h\\ -mx'\end{pmatrix}$, de même pour (P') : $\begin{pmatrix}mh\\ h\\ -mx\end{pmatrix}$ d'où $\cos^2\alpha\,((m^2+1)h^2 + m^2x^2)\,((m^2+1)h^2 + m^2x'^2) = \left(-h^2(m^2-1) + m^2xx'\right)^2$, or $\overrightarrow{MM'}^2 = (x - x')^2 + m^2(x + x')^2 + 4h^2$ nous donne $\overrightarrow{MM'}^2.\tan^2\alpha = \dfrac{16m^2h^2}{(m^2-1)^2}$.

Solution 3.3.2 (D') appartient au plan $\lambda(x+y+z-1)+\mu(x-y-2z)=0$ (on a écrit l'ensemble des plans passant par D) ;

on cherche λ et μ pour que ce plan soit orthogonal au plan $x+2y+3z-6=0$ et on trouve $\lambda=7$, $\mu=6$, d'où un système d'équations de (D') : $13x+y-5z-7=0$, $x+2y+3z-6=0$.

Solution 3.3.3 On appelle M_i les différents symétriques de M, alors : $M_1(0,0,a)$, $M_2(1,-a,0)$, $M_3(1-a,1,0)$ et $M_4(\frac{1}{5}-\frac{2a}{5},-\frac{7}{5}-\frac{6a}{5},-\frac{4}{5}+\frac{3a}{5})$; les M_i sont coplanaires ssi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & (1-2a)/5 \\ 0 & -a & 1 & -(7+6a)/5 \\ a & 0 & 0 & (-4+3a)/5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a=-1 \text{ ou } a=3.$$

Solution 3.4.1 La propriété recherchée est équivalente à l'existence de a, b, c, d réels tels que la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz=d=0$ passe par ces 5 points ce qui donne un système de 5 équations à 4 inconnues compatible et qui admet l'unique solution $a=b=c=1$, $d=-42$, sphère de centre (1,1,1), de rayon $3\sqrt{5}$.

Solution 3.4.2 Soit P le plan passant par ABC (on note $P=0$ son équation) et S la sphère centrée dans le plan P et passant par ABC, équation notée $S=0$ (il en existe bien une, il suffit de prendre le centre du cercle circonscrit au triangle ABC). Si on considère les sphères S_λ d'équation $S+\lambda P=0$ alors, en prenant $\lambda=-\dfrac{S(D)}{P(D)}$, on obtient bien une sphère passant par les 4 points $ABCD$. L'unicité vient par exemple de l'unicité de la solution du système $2ax_i+2by_i+2cz_i+d=x_i^2+y_i^2+z_i^2$ où les (x_i,y_i,z_i) désignent les coordonnées des points $ABCD$ qui est un système de Cramer vu que les points $ABCD$ ne sont pas coplanaires.
Application : P a pour équation $x+y+z-6=0$, pour avoir le centre du cercle circonscrit, on prend les équations $AM^2=BM^2=CM^2$ ce qui donne $x+z=4$ et $y=2$ et finalement la sphère passant par ABC a pour équation $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+12=0$. On trouve ensuite $\lambda=4$ soit l'équation de la sphère cherchée $x^2+y^2+z^2+2x-2z=12$.
Remarque : la méthode qui consiste tout simplement à résoudre le système $AM^2=BM^2=CM^2=DM^2$ est aussi rapide que celle exposée.
