FONCTIONS USUELLES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES (R)

1. Fonctions usuelles

1.1. **Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances.**

Exercice 1.1.1. **F**

Soit $f(a,b,x) = \dfrac{a^x - b^x}{\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{bx}}$. Calculer $\lim\limits_{b\to a}\Big(\lim\limits_{x\to 0} f(a,b,x)\Big)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\lim\limits_{b\to a} f(a,b,x)\Big)$.

Exercice 1.1.2. **D**

Soit $\lambda \in]0,1[$, prouver l'existence et l'unicité de la racine positive x_n de l'équation

$$\lambda\,\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+n} x_n = +\infty$ (on utilisera ici le fait que $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$).

Exercice 1.1.3. **F**

Résoudre dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ le système $\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x & = -5 \\ xy & = e \end{cases}$.

Exercice 1.1.4. **F**

Résoudre $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$.

Exercice 1.1.5. **F**

Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 1.1.6. **F**

Simplifier les expressions

$$f(x) = \frac{\mathrm{ch}(\ln x) + \mathrm{sh}(\ln(x))}{x},\ \ g(x,y) = \mathrm{sh}^2 x\cos^2 y + \mathrm{ch}^2 x \sin^2 y.$$

Exercice 1.1.7. **F**

Simplifier les expressions

$$f(x) = x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}},\ \ g(x,y) = \log_x\left(\log_x x^{x^y}\right).$$

EXERCICE 1.1.8. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n réels distincts et $P_1, \ldots, P_n$ n fonctions polynomiales. Montrer l'implication suivante
$$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i x}\, P_i(x) = 0\right) \Rightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!],\ P_i = 0)\,.$$

EXERCICE 1.1.9. $\boxed{\textbf{F}}$
Simplifier les expressions suivantes
$$f(x) = \operatorname{Argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right),\ g(x) = \operatorname{Argch}\left(2x^2-1\right),\ h(x) = \operatorname{Argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}.$$

EXERCICE 1.1.10. $\boxed{\textbf{F}}$
Montrer que pour tout couple $(x, y) \in]-1, 1[^2$, on a
$$\operatorname{Argth} x + \operatorname{Argth} y = \operatorname{Argth}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

1.2. **Fonctions circulaires.**

EXERCICE 1.2.1. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2\ :\ a > b > 0$.
On pose : $f(x) = \operatorname{Arcsin}(ax) + \operatorname{Arccos}(bx)$.
(1) Chercher le domaine de définition de f ; montrer que f admet un inverse.
(2) Calculer $\sin(f(x)), \cos(f(x))$; en déduire $\cos^2(f(x))$ en fonction de $\sin(f(x))$ puis donner l'expression de f^{-1}.
(3) Application : résoudre $\operatorname{Arcsin}\frac{4x}{5} + \operatorname{Arccos}\frac{3x}{5} = 1$ $(= 0)$.

EXERCICE 1.2.2. $\boxed{\textbf{F}}$
Résoudre : $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} 3x + \operatorname{Arctan} x\sqrt{3} = 3\pi/4$.

EXERCICE 1.2.3. $\boxed{\textbf{F}}$
Simplifier au maximum les expressions suivantes :
$$f(x) = \operatorname{Arccos}\frac{2x}{1+x^2}\ ;\ g(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{x^2\sqrt{2}}{2\sqrt{x^4-2x^2+2}}\ ;\ h(x) = \operatorname{Arctan}(x - \sqrt{1+x^2})$$
(on l'exprimera en fonction de $\frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x$).

EXERCICE 1.2.4. $\boxed{\textbf{F C}}$
Soit $u_n = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{n^2+n+1}$; montrer qu'il existe une suite (v_n) telle que
$$u_n = v_{n+1} - v_n,$$
en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 1.2.5. **F**

Montrer que $\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x) - \mathrm{Arctan}(\tanh \frac{x}{2})$ est indépendant de x.

---

2. Équations différentielles linéaires

2.1. Équation linéaires du premier ordre.

Exercice 2.1.1. **I**

Soit (E) l'équation différentielle $y' + ay = f$ où a et f sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles vérifiant $a(x) \geqslant c > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

Exercice 2.1.2. **I**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $(x \ln x)y' - y = -\dfrac{1}{x}(1 + \ln x)$.

b) $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$.

c) $(1 - x)y' + y = \dfrac{x - 1}{x}$.

d) $(\sin x)y' - (\cos x)y = -1$.

e) $2xy' + y = x^a$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.1.3. **I**

Chercher les solutions de l'équation différentielle $y' = y + x^2y^2$ sur un intervalle I maximal où elles en s'annulent pas.

2.2. Équations linéaires du second ordre à coefficients constants.

Exercice 2.2.1. **I**

Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, établir l'existence et l'unicité de g vérifiant :

$$\begin{cases} g \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \\ g(0) = g(1) = g'(0) = g'(1) = 0 \\ f - g'' \text{ est affine} \end{cases}$$

Exercice 2.2.2. **I T**

Intégrer :

a) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x \left(\dfrac{1}{x} + \ln|x|\right)$ b) $y'' + 4y' + 13y = \mathrm{e}^{-2x} \cos 3x$

c) $y'' - 2y' + y = x^2 \operatorname{ch} x$ d) $y'' - 4y' + 8y = \mathrm{e}^{2x}(\cos x + i \sin x)$

e) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{1 + x^2}$ f) $y'' - 5y' + 6y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\operatorname{ch}^2 x}$

EXERCICE 2.2.3. **I C**

Chercher un changement de variable $x = g(t)$ qui transforme les équations différentielles :

a) $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + a^2y = 0$ b) $(1+x^2)y'' + xy' + k^2y = 0$ (a et k constantes)

c) $(1+2x)y'' + (4x+2)y' + 8y = 0$

en équations différentielles linéaires à coefficients constants, puis les intégrer.

EXERCICE 2.2.4. **I**

Soit q une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists A \geqslant 0 \mid \forall x \geqslant A,\ q(x) \geqslant 0,\ q'(x) > 0.$$

Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$ est bornée au voisinage de $+\infty$ (on pourra étudier la fonction $z = y^2 + \dfrac{y'^2}{q}$ définie sur $[A, +\infty[$).

EXERCICE 2.2.5. **I**

Trouver toutes les applications f 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

---

3. Courbes paramétrées, coniques

3.1. **Courbes planes paramétrées.**

EXERCICE 3.1.1. **F T**

Étude de la courbe $x = \dfrac{2t}{1+t^2}, y = \dfrac{4(1-2t)}{(1+t^2)^2}$ (on pourra faire un changement de paramètre).

EXERCICE 3.1.2. **F**

Construire la courbe $x = t + \dfrac{1}{t+1}, y = t^2 + \dfrac{1}{t^2+1}$.

EXERCICE 3.1.3. **F C**

Soit Γ la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) &= \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$.

(1) Montrer qu'une droite du plan coupe cette courbe en au plus 3 points.
(2) Soit $M_i(t_i)$ 3 points distincts situés sur Γ. Montrer qu'une CNS pour que les points M_i soient alignés est $t_1t_2t_3 = -1$.
(3) Montrer que, si $t \neq 0$ alors la tangente à Γ en $M(t)$ recoupe Γ en un point $M'(t')$.
(4) Si les points $M_i(t_i)$ sont 3 points de Γ alignés, $M'(t'_i)$ les points d'intersection des tangentes aux M_i avec Γ. Montrer que les points $M'(t_i)$ sont alignés.

EXERCICE 3.1.4. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit Γ la courbe d'équations $\begin{cases} x(t) & = t + \dfrac{1}{2t^2} \\ y(t) & = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t} \end{cases}$.

(1) Construire Γ et montrer que Γ a un axe de symétrie.
(2) Chercher la courbe orthoptique de Γ (i.e. l'ensemble des points du plan par lesquels passent 2 tangentes à Γ orthogonales entre elles).

EXERCICE 3.1.5. $\boxed{\textbf{I T}}$

On donne un triangle équilatéral ABC de centre O ; une droite (D) pivote autour de O et coupe les cotés du triangle en P, Q, R.
Lieu de l'isobarycentre G de (P, Q, R).

EXERCICE 3.1.6. $\boxed{\textbf{F}}$

Lieu de l'orthocentre d'un triangle OAM où O est le centre d'un cercle passant par A et où M parcourt le cercle.

EXERCICE 3.1.7. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit (C) le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. La tangente en M à (C) rencontre Ox en P, Oy en Q.
Lieu de R, $4^{\text{ième}}$ sommet du rectangle $OPQR$, quand M varie.

EXERCICE 3.1.8. $\boxed{\textbf{F}}$

M décrit le cercle (C) de centre O, de rayon R. La tangente en M à (C) rencontre en P la droite $x = R$. La parallèle à Ox passant par P rencontre OM en Q.
Lieu Γ de Q lorsque M décrit (C) ?

EXERCICE 3.1.9. $\boxed{\textbf{F T}}$

Construire les courbes définies en polaires par :

a) $r = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ b) $\sin\theta = \dfrac{r^2 - 3r}{r+1}$ c) $r^3 + 3r\tan\theta + 2 = 0$ d) $r = \tan\dfrac{\theta}{3}$.

e) $r = \cos^3\theta + \sin^3\theta$ (chercher les points d'inflexion en posant $T = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$).

3.2. **Coniques.**

EXERCICE 3.2.1. $\boxed{\textbf{I C}}$

Trouver l'ensemble des points M du plan tels que par M passent 2 tangentes orthogonales à l'hyperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Exercice 3.2.2. **F T**

Soit (P_α) la parabole de foyer O, de directrice $D_\alpha\ : x\cos\alpha + y\cos\alpha - p = 0$ et tangente à la droite $x = d$.

Déterminer le lieu du sommet de $(P_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ et le lieu du point de (P_α) où la tangente est parallèle à Ox.

Exercice 3.2.3. **F T**

Reconnaître le lieu des foyers des paraboles osculatrices à un cercle donné en un point donné.

Exercice 3.2.4. **I**

Étudier la conique d'équation $x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = 0$.

En déduire l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant l'égalité

$$x^3 + 3xy + y^3 - 1 = 0.$$

Trouver l'ensemble des solutions entières de l'équation diophantienne $n^3 + 3mn + m^3 - 1 = 0$.

Exercice 3.2.5. **I**

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux paraboles ayant même axe et même foyer. On suppose que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont un point commun M.

Étudier les différents cas de figure et préciser l'angle que forment les tangentes à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ en M.

---

1. Indications :

Indication 1.1.1 Revenir à la définition de la dérivée. Les deux limites sont égales et valent $\frac{1}{a}$.

Indication 1.1.2 On étudie la fonction $f_n(x) = \lambda\,\mathrm{e}^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ en remarquant que $f_n' = f_{n-1}$. La suite x_n est strictement croissante puis on raisonne par l'absurde.

Indication 1.1.3 Poser $X = \ln x$, $Y = \ln y$, on trouve $x = 1/e$, $y = e^2$.

Indication 1.1.4 L'ensemble des solutions est $S =]-\infty, -1[\cup]-1, -\frac{3}{5}] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty[$.

Indication 1.1.5 Prendre le logarithme pour trouver $x = 1$ et $x = 4$.

Indication 1.1.6 $f(x) = 1$ et $g(x, y) = \operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y = \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y$.

Indication 1.1.7 $f(x) = \ln x$ et $g(x) = y$.

Indication 1.1.8 Procéder par récurrence sur n en supposant $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Factoriser $\mathrm{e}^{\lambda_n x}$ et prendre la limite en $+\infty$.

Indication 1.1.9 $f(x) = -\ln|x|$, $g(x) = 2\operatorname{Argch}|x|$, $h(x) = \frac{|x|}{2}$.

Indication 1.1.10 Poser $x = \operatorname{th} X$ et $y = \operatorname{th} Y$.

Indication 1.2.1

(1) $D_f = [-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$ et $f'(x) = \frac{a^2-b^2}{(a\sqrt{1-b^2x^2}+b\sqrt{1-a^2x^2})\sqrt{(1-a^2x^2)(1-b^2x^2)}} > 0$.

(2) $\sin(f(x)) = abx^2 + \sqrt{1-a^2x^2}\sqrt{1-b^2x^2}$, $\cos(f(x)) = bx\sqrt{1-a^2x^2} - ax\sqrt{1-b^2x^2}$ d'où $f^{-1}(y) = \frac{-\cos y}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin y}}$.

(3) $f^{-1}(1) = \frac{-\cos 1}{\sqrt{1-\frac{24}{25}\sin 1}}$ et $f^{-1}(0) = -1$.

Indication 1.2.2 $f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} 3x + \operatorname{Arctan} x\sqrt{3}$ est strictement croissante.

Indication 1.2.3 $f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{Arctan} x$ si $x \in [-1,1]$, $f(x) = 2\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2}$ si $x > 1$, $f(x) = 3\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{Arctan} x$ si $x < -1$.
$g(x) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan}(x^2-1)$ si $x^2 \leqslant 2$, $g(x) = \frac{3\pi}{4} - \operatorname{Arctan}(x^2-1)$ si $x^2 > 2$.
$h(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x$.

Indication 1.2.4 On a : $v_n = \operatorname{Arctan} n$ donc $\sum_{k=0}^{n} u_k = v_{n+1} \to \frac{\pi}{2}$.

Indication 1.2.5 Dériver ou utiliser la formule d'addition des Arctangentes, le résultat est $\frac{\pi}{4}$.

Indication 2.1.1 Si $A(x) = \int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ alors $y(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}\left(y(0) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t\right)$ et on prouve que $\mathrm{e}^{-A(x)}\int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Indication 2.1.2 On obtient : a) $\frac{1}{x} + \lambda \ln x$. b) $\ln(1+x) + \frac{\lambda}{1+x}$. c) $(x-1)\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \lambda(x-1)$. d) $\cos x + \lambda \sin x$. e) $\frac{x^a}{2a+1} + \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$.

Indication 2.1.3 Soit I un intervalle maximal alors $y' = y + x^2y^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{-x^2+2x-2+\lambda\,\mathrm{e}^{-x}}$.

Indication 2.2.1 Chercher g sous la forme $g(x) = F(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d$ en prenant pour F la primitive seconde de f. On trouve $a = \alpha - 2\beta$, $b = 3\beta - 2\alpha$ où $\alpha = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, $\beta = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Indication 2.2.2 On trouve les résultats suivants : a) $y = \left[(x + \frac{x^2}{2})\ln|x| - \frac{3x^2}{4} + \lambda x + \mu\right]\mathrm{e}^x$.
b) $y = \frac{x}{6}\,\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x + \mathrm{e}^{-2x}(\lambda\cos 3x + \mu \sin 3x)$. c) $y = \mathrm{e}^x(\frac{x^4}{24} + \lambda x + \mu) + (2x^2+4x+3)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{16}$.
d) $y = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{(2+i)x} + \mathrm{e}^{2x}(\lambda\cos 2x + \mu\sin 2x)$. e) $y = \left(x\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + ax + b\right)\mathrm{e}^{-2x}$.
f) $y = 2\,\mathrm{e}^{2x}[\lambda - \operatorname{Arctan}\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x(\mu + x - \ln \operatorname{ch} x)]$.

Indication 2.2.3 a) $g(t) = \tan t\ : y = \lambda\cos(a\operatorname{Arctan} x) + \mu\sin(a \operatorname{Arctan} x)$.
b) $g(t) = \operatorname{sh} t\ : y = \lambda\cos(k\operatorname{Argsh} x) + \mu\sin(k\operatorname{Argsh} x)$
c) $t = 2x+1$ $y(x) = z(t) = \lambda t(2-t)\,\mathrm{e}^{-t} + \mu(-1 + t + (2t - t^2)\,\mathrm{e}^{-t}\int_t^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$.

Indication 2.2.4 $z'(x) = -y'^2(x)\frac{q'(x)}{q^2(x)} \leqslant 0$.

Indication 2.2.5 On dérive 2 fois par rapport à x et par rapport à y d'où $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$, on obtient l'équation différentielle $f''(x) = \lambda f(x)$.

Indication 3.1.1 Poser $t = \tan\theta$ et étudier la courbe.

Indication 3.1.2 Pour $t = 0$ on trouve un point stationnaire $A(1,1)$, $t \to \pm\infty$ on a une parabole asymptote, $t \to 0$ $y = \frac{3}{2}$ est asymptote.

Indication 3.1.3

(1) L'intersection de Γ avec la droite d'équation $ux + vy + h = 0$ donne une équation de degré 3 au maximum.
(2) Si les points $M_i(t_i)$ sont alignés alors il existe $(u,v,h) \in \mathbb{R}^3$, $(u,v) \neq (0,0)$ tel que les t_i soient racines de l'équation $ht^3 + vt^2 + ut + h = 0$.
(3) Par passage à la limite on obtient $t^2t' = -1$.
(4) Si les points $M_i(t_i)$ sont alignés alors $t_1t_2t_3 = -1$.

Indication 3.1.4

(1) La courbe admet la droite $y = x$ comme axe de symétrie.
(2) La tangente au point $M(t)$ admet pour équation $-2t^2x + 2ty + t^3 - 1 = 0$. Si $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des points cherchés, un point (x,y) appartient à $\mathcal{C}$ ssi il existe 2 paramètres t_1 et t_2 distincts tels que $t_1t_2 = -1$. L'ensemble des points cherchés est la droite d'équation $x + y + 1 = 0$.

Indication 3.1.5 Passer en polaires et on trouve $r = -\frac{a}{\cos 3\theta}$.

Indication 3.1.6 On trouve $r = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$.

Indication 3.1.7 $x = \frac{2ay^2}{y^2 - a^2}$.

Indication 3.1.8 Équation polaire : $r = \frac{R}{1+\cos\theta}$: parabole.

Indication 3.1.9

a) symétrie par rapport à O. Étude sur $]\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}[$: $\theta=\frac{\pi}{4}+h, r\sin h=\frac{1}{2}+\frac{h}{2}+o(h)$.

b) Étude pour $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$ et faire une symétrie par rapport à Oy. On étudie les variations de $\sin\theta$ en fonction de r soit $\sin\theta=\frac{r^2-3r}{r+1}$.

c) On étudie $\tan\theta$ en fonction de r.

d) Étude sur $[0,\frac{3\pi}{2}]$ + symétrie / Oy + symétrie / O.

e) Étude sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ + symétrie par rapport à $y=x$ + symétrie par rapport à Oy + symétrie par rapport à O. $r'<0$ sur $[0,\frac{\pi}{4}]$.

Indication 3.2.1 Tangente au point (x_0,y_0) : $\frac{Xx_0}{a^2}-\frac{Yy_0}{b^2}=1$ (pente $m=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$). Les tangentes à l'hyperbole passant par $M(x,y)$ sont $Y-mX=y-mx$, donc les points de contact vérifient : $x_0=\frac{ma^2(y-mx)}{b^2-m^2a^2}$, $y_0=\frac{b^2(y-mx)}{b^2-m^2a^2}$. On a $b^2-m^2a^2\neq 0$, on reporte dans l'équation de l'hyperbole et en simplifiant on obtient $m^2(a^2-x^2)+2mxy-y^2-b^2=0$. Cette équation a des racines dont le produit vaut -1, l'ensemble cherché est contenu dans le cercle $x^2+y^2=a^2-b^2$. Pour avoir équivalence on doit supposer $m^2\neq\frac{b^2}{a^2}$ soit $y\neq\pm\frac{b}{a}x$.

Indication 3.2.2 Par le calcul on obtient l'équation $y^2+dx=0$; $x\neq 0$ (mais il existe une solution géométrique).

Indication 3.2.3 Si O est le point donné, $x^2+y^2-2Ry=0$ est le cercle donné et F est le foyer de la parabole, $X^2=2pY+p^2$ est son équation dans un R.O.N. $(F,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$. Si $\alpha=(\widehat{\overrightarrow{I},\overrightarrow{i}})$ on trouve $R=\frac{p}{\cos^3\alpha}$ et $x=-\frac{R}{2}\sin\alpha\cos\alpha, y=\frac{R}{2}\cos^2\alpha$ (cercle).

Indication 3.2.4 Seul le point de coordonnées $(-1,-1)$ appartient à la "conique". En factorisant l'expression, on en déduit que l'ensemble des points $M(x,y)$ est la réunion de la droite $x+y+1=0$ et du point $(-1,-1)$.

Indication 3.2.5 Soient D et D' les directrices de chacune de ces paraboles. D et D' sont parallèles. Comme $MF=MH=MH'$, étudier 2 cas : H et H' sont du même coté et H et H' sont de part et d'autre de M. Dans le deuxième cas prendre $x^2+y^2=(x-p)^2$ comme équation de $\mathcal{P}$ et $x^2+y^2=(x+p')^2$ pour $\mathcal{P}'$ pour trouver que les 2 tangentes sont perpendiculaires.

1. Solutions

Solution 1.1.1

- On dérive par rapport à x, on a
$$\lim_{x\to 0} f(a,b,x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln a a^x - \ln b b^x}{a\,\mathrm{e}^{ax} - b\,\mathrm{e}^{bx}} = \frac{\ln a - \ln b}{a-b}$$
puis, en revenant à la définition de la dérivée on obtient $\lim_{b\to a}\left(\lim_{x\to 0} f(a,b,x)\right) = \dfrac{1}{a}$.
- On dérive cette fois par rapport à b, d'où
$$\lim_{b\to a} f(a,b,x) = \frac{x a^{x-1}}{a\,\mathrm{e}^{ax}}$$
et, lorsque $x \to 0$, on a $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{b\to a} f(a,b,x)\right) = \dfrac{1}{a}$.

Conclusion : les deux limites sont égales et valent $\dfrac{1}{a}$.

Solution 1.1.2 On pose $f_n(x) = \lambda\,\mathrm{e}^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$. On fait ensuite une récurrence sur n en remarquant que $f_n' = f_{n-1}$:
on trouve le tableau de variation suivant pour f_n

x	0		x_{n-1}		x_n		$+\infty$
f_n'		$-$	0	$+$		$+$	
f_n	$\lambda-1$	$\searrow$	$M_n<0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ce qui permet de prouver la récurrence et de s'assurer que la suite x_n est strictement croissante.
La suite x_n est croissante, si elle était convergente vers x réel, alors, en écrivant
$$\lambda\,\mathrm{e}^{x_n} = \mathrm{e}^{x_n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x_n^k}{k!}$$
on a
$$\underbrace{\mathrm{e}^{x_n}(1-\lambda)}_{\to \mathrm{e}^x(1-\lambda)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x_n^k}{k!} \leqslant \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}_{\to 0}$$
on obtient une contradiction.
Pour mieux comprendre les arguments invoqués, il est préférable d'avoir étudié auparavant la théorie des séries cf. *pages 238 et 239*.

Solution 1.1.3 En posant $X = \ln x$ et $Y = \ln y$ le système est équivalent à
$$2X^2 + 2Y^2 + 5XY = 0,\ X + Y = 1,\ X \neq 0,\ Y \neq 0$$
d'où $\{X, Y\} = \{-1, 2\}$ soit $\{x, y\} = \{\mathrm{e}^{-1}, e^2\}$.

Solution 1.1.4 Le système est équivalent à $\left|\dfrac{x+1}{2x+1}\right| \leqslant 2$ et $x \neq -1$ d'où $S =]-\infty, -1[\cup]-1, -\frac{3}{5}] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty[$.

Solution 1.1.5 En prenant le logarithme on obtient la relation équivalente suivante $\sqrt{x}\ln x = \dfrac{x}{2}\ln x$ d'où les solutions $x = 1$ et $x = 4$.

Solution 1.1.6 $f(x) = 1$ et $g(x, y) = \operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y = \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y$.

Solution 1.1.7 $f(x) = \ln x$ et $g(x) = y$.

Solution 1.1.8 On procède par récurrence sur n.
$n = 1$ immédiat.
$P(n-1) \Rightarrow P(n)$: Quitte à renuméroter, on peut supposer $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. En factorisant $\mathrm{e}^{\lambda_n x}$ on a la relation

$$P_n(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{e}^{(\lambda_i - \lambda_n)x}\, P_i(x) = 0$$

pour tout x et en prenant la limite en $+\infty$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = 0$ ce qui entraîne la nullité du polynôme P_n.

Solution 1.1.9

- Si $x > 0$, on pose $X = \ln x$ et l'expression de f devient $f(x) = \operatorname{Argsh}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2X} - 1}{2\,\mathrm{e}^X}\right) = \operatorname{Argsh}\operatorname{sh} X = X$ donc $f(x) = \ln x$. Comme f est impaire, si $x < 0$ alors $f(x) = -\ln|x|$.
- g est définie pour $|x| \geqslant 1$. Si $x \geqslant 1$ on pose $x = \operatorname{ch} X$. $2x^2 - 1 = \operatorname{ch}(2X)$ donc $g(x) = 2X = 2\operatorname{Argch} x$ et comme g est paire, on a l'expression générale de $g(x) = 2\operatorname{Argch}|x|$.
- On exprime $\operatorname{ch} x$ en fonction de $X = \operatorname{th}\frac{x}{2}$ pour $x > 0$ et on obtient, comme ci-dessus $h(x) = \dfrac{|x|}{2}$.

Solution 1.1.10 On pose $x = \operatorname{th} X$ et $y = \operatorname{th} Y$, la relation a prouver devient $X + Y = \operatorname{Argth}\operatorname{th}(X + Y)$ ce qui est vérifié immédiatement.

Solution 1.2.1

(1) On a immédiatement $D_f = [-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$;

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}} - \frac{b}{\sqrt{1-b^2x^2}} \\ &= \frac{a\sqrt{1-b^2x^2} - b\sqrt{1-a^2x^2}}{\sqrt{(1-a^2x^2)(1-b^2x^2)}} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{(a\sqrt{1-b^2x^2} + b\sqrt{1-a^2x^2})\sqrt{(1-a^2x^2)(1-b^2x^2)}} > 0 \end{aligned}$$

donc f est croissante.

(2) $\sin(f(x)) = abx^2 + \sqrt{1-a^2x^2}\sqrt{1-b^2x^2}$, $\cos(f(x)) = bx\sqrt{1-a^2x^2} - ax\sqrt{1-b^2x^2}$ (du signe de $-x$) donc $\cos^2(f(x)) = x^2(a^2 + b^2 - 2ab\sin(f(x)))$ d'où

$$x^2 = \frac{\cos^2(f(x))}{a^2 + b^2 - 2ab\sin(f(x))}$$

et, comme on sait que f est inversible sur $[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}]$, alors $f^{-1}(y)=\pm\dfrac{-\cos y}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin y}}$.
Enfin, $\cos y$ est du signe de x donc

$$f^{-1}(y)=\frac{-\cos y}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin y}}$$

pour $y\in[f(-1/a),f(1/a)]$ i.e. $0<\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Arccos}(b/a)\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{Arccos}(b/a)$.

(3) $f^{-1}(1)=\dfrac{-\cos 1}{\sqrt{1-\frac{24}{25}\sin 1}}$ et $f^{-1}(0)=-1$.

Solution 1.2.2 $f(x)=\operatorname{Arctan}x+\operatorname{Arctan}3x+\operatorname{Arctan}x\sqrt{3}$ est strictement croissante et $f(1/\sqrt{3})=3\pi/4$.

Ici, la chose à ne pas faire est d'utiliser la formule d'addition des Arctangentes (cf *question* (i) *page 37*) car les calculs sont beaucoup plus longs. Moralité, il ne faut pas se précipiter sur une solution qui risque de mener à des calculs sans avoir essayé de chercher une astuce élémentaire.

Solution 1.2.3 $x=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<3\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)=\operatorname{Arccos}(\cos\theta)$ d'où :

$$\begin{cases}f(x)=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{Arctan}x,\ x\in[-1,1]\\ f(x)=2\operatorname{Arctan}x-\frac{\pi}{2},\ x>1\\ f(x)=3\frac{\pi}{2}+2\operatorname{Arctan}x,\ x<-1\end{cases}$$

$x^2=1+\tan\theta, |\theta|<\frac{\pi}{2}\Rightarrow g(x)=\operatorname{Arcsin}(\sin(\theta+\frac{\pi}{4}))$ d'où :

$$\begin{cases}g(x)=\frac{\pi}{4}+\operatorname{Arctan}(x^2-1), x^2\leqslant 2\\ g(x)=\frac{3\pi}{4}-\operatorname{Arctan}(x^2-1), x^2>2\end{cases}$$

$x=\tan(\frac{\pi}{2}-2\theta), 0<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow h(x)=\operatorname{Arctan}(\tan\theta)$ d'où : $h(x)=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}x$.

On retrouve aussi ces résultats en dérivant !...

Solution 1.2.4 On a : $v_n=\operatorname{Arctan}n$ (cf formule d'addition des Arctangentes *question* (i) *page 37*) donc $\sum\limits_{k=0}^{n}u_k=v_{n+1}\to\frac{\pi}{2}$.

Solution 1.2.5 On peut dériver ou utiliser la formule d'addition des Arctangentes, le résultat est $\dfrac{\pi}{4}$.

Solution 2.1.1 Posons $A(x)=\displaystyle\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ alors $y(x)=\mathrm{e}^{-A(x)}\left(y(0)+\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t\right)$. Il suffit de prouver que $\mathrm{e}^{-A(x)}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Or $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t=o\left(\int_0^x \mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t\right)$ car $f(t)$ tend vers 0 : en effet

- $A(x)=A(0)+\displaystyle\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t\geqslant A(0)+xc\to+\infty$ quand $x\to+\infty$,

- $f(t) \to 0$ quand $x \to +\infty$ donc $\forall\varepsilon > 0$, $\exists X \mid t \geqslant X \Rightarrow |f(t)| \leqslant \varepsilon$ d'où, pour $x \geqslant X$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \underbrace{\left|\int_0^X f(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t\right|}_{=B} + \varepsilon\int_X^x \mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant B + \varepsilon\int_0^x \mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

- Vu le premier point, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t \to +\infty$ donc, pour $x \geqslant X' \geqslant X$, $B \leqslant \varepsilon\int_0^x \mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t$ soit $\left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon\int_0^x \mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t$.

Vu que

$$\mathrm{e}^{-A(x)}\int_0^x \mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{A(t)-A(x)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-(x-t)c}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{c}$$

on peut conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

Solution 2.1.2

a) Pour $x > 0$ l'ensemble des solutions s'écrit $\dfrac{1}{x} + \lambda\ln x$.

b) Pour $x > -1$ l'ensemble des solutions s'écrit $\ln(1+x) + \dfrac{\lambda}{1+x}$.

c) Soient $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$. Sur chaque intervalle I_k, les solutions sont de la forme $(x-1)\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right| + \lambda_k(x-1)$.

d) On pose $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$ alors sur chaque intervalle I_k les solutions sont de la forme $\cos x + \lambda_k \sin x$.

e) Pour $x > 0$ les solutions sont de la forme $\dfrac{x^a}{2a+1} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$.

Solution 2.1.3 Soit y une solution de cette équation différentielle et I un intervalle maximal où y ne s'annule pas. Pour $x \in I$ on a les équivalences

$$\begin{aligned} y' = y + x^2y^2 &\Leftrightarrow \frac{y^2}{y^2} = \frac{1}{y} + x^2\\ &\Leftrightarrow z' + z = -x^2 \text{ avec } z = \frac{1}{y}\\ &\Leftrightarrow z = -x^2 + 2x - 2 + \lambda\,\mathrm{e}^{-x}\\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{-x^2 + 2x - 2 + \lambda\,\mathrm{e}^{-x}}.\end{aligned}$$

On discute ensuite selon les valeurs de λ quels sont les intervalles maximaux possibles.

Solution 2.2.1 On cherche g sous la forme $g(x) = F(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d$ en prenant pour F la primitive seconde de f qui s'annule en 0 ainsi que sa dérivée (soit $F(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$). $g(0) = g'(0) = 0$ donc $c = d = 0$. Les conditions $g(1) = 0$, $g'(1) = 0$ nous imposent de prendre $a = \alpha - 2\beta$, $b = 3\beta - 2\alpha$ où $\alpha = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, $\beta = \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$. Si h est une autre solution alors, en posant $d = g - h$, $d'' = ax + b$, $d(0) = d(1) = d'(0) = d'(1) = 0$ entraîne $d = 0$.

Solution 2.2.2 On trouve les résultats suivants :

a) $y = \left[(x+\dfrac{x^2}{2})\ln|x| - \dfrac{3x^2}{4} + \lambda x + \mu\right]\mathrm{e}^x$.

b) $y = \dfrac{x}{6}\,\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x + \mathrm{e}^{-2x}(\lambda\cos 3x + \mu\sin 3x)$.

c) $y = \mathrm{e}^x(\dfrac{x^4}{24} + \lambda x + \mu) + (2x^2+4x+3)\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{16}$.

d) $y = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{(2+i)x} + \mathrm{e}^{2x}(\lambda\cos 2x + \mu\sin 2x)$.

e) $y = \left(x\mathrm{Arctan}\,x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + ax + b\right)\mathrm{e}^{-2x}$.

f) $y = 2\,\mathrm{e}^{2x}[\lambda - \mathrm{Arctan}\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x(\mu + x - \ln\mathrm{ch}\,x)]$.

Solution 2.2.3 a) $g(t) = \tan t\ : y = \lambda\cos(a\,\mathrm{Arctan}\,x) + \mu\sin(a\,\mathrm{Arctan}\,x)$.

b) $g(t) = \mathrm{sh}\,t\ : y = \lambda\cos(k\mathrm{Argsh}x) + \mu\sin(k\mathrm{Argsh}x)$.

c) $t = 2x+1$ d'où l'équation $tz''(t) + tz'(t) + 2z = 0$. On cherche les solutions D.S.E. et on trouve $z(t) = \lambda t(2-t)\,\mathrm{e}^{-t} + \mu(-1+t+(2t-t^2)\,\mathrm{e}^{-t}\displaystyle\int_t^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$.

Solution 2.2.4 Si y est solution de l'équation alors

$$z'(x) = -y'^2(x)\frac{q'(x)}{q^2(x)} \leqslant 0.$$

z est une fonction positive, décroissante donc elle est bornée au voisinage de $+\infty$. Comme $y^2 \leqslant z$ il en est de même de y.

Solution 2.2.5 On dérive 2 fois par rapport à x et par rapport à y ce qui donne

$$\begin{aligned} 2f''(x)f(y) &= f''(x+y) + f''(x-y) \\ &= 2f(x)f''(y) \end{aligned}$$

d'où $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$. En écartant la solution $f = 0$ on peut supposer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$ et, avec $\lambda = \dfrac{f''(a)}{f(a)}$ on obtient l'équation différentielle $f''(x) = \lambda f(x)$.

- Si $\lambda = 0$ alors on n'a pas de solution.
- Si $\lambda > 0$ alors les solutions sont de la forme $\mathrm{ch}\,kx$ (nécessairement $f(0) = 1$.
- Si $\lambda < 0$ alors les solutions sont de la forme $\cos kx$.

Solution 3.1.1 Avec $t = \tan\theta$, on trouve

$x = \sin 2\theta,\ y = 4\cos^4\theta - 8\sin\theta\cos^3\theta$. $x'(\theta) = 2\cos 2\theta,\ y'(\theta) = 8\cos^3\theta(1 - 2\cos 2\theta - \sin 2\theta)$.

y' s'annule pour $t = 1$ et $t = -\dfrac{1}{3}$ (voir figure 3).

Solution 3.1.2 Pour $t = 0$ on trouve un point stationnaire $A(1,1)$.

$t \to \pm\infty$ on a une parabole asymptote, $t \to 0$ $y = \dfrac{3}{2}$ est asymptote.

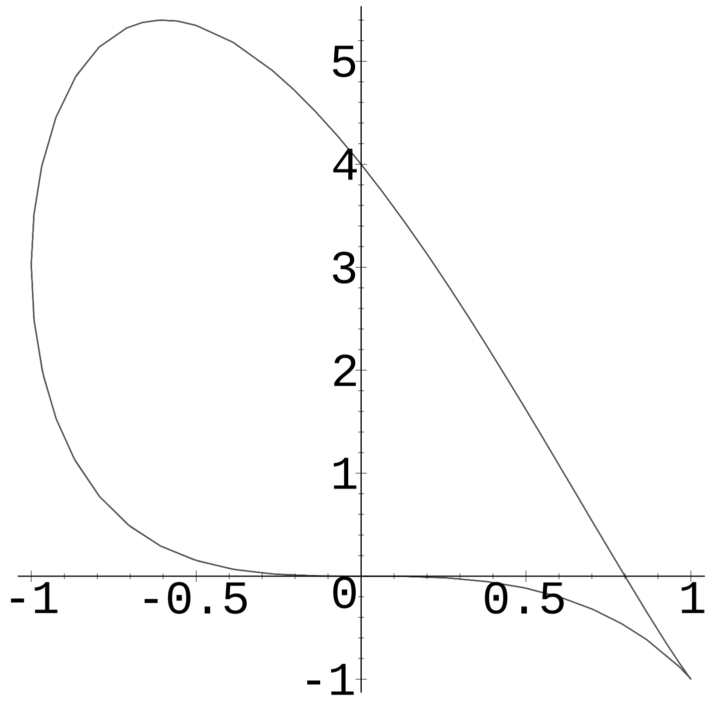

FIGURE 1. Point de rebroussement de première espèce

Solution 3.1.3

(1) Soit D la droite d'équation $ux+vy+h=0$, le point $M(t)$ appartient à D ssi $ut+vt^2+h(1+t^3)=0$. Cette équation de degré 3 au maximum n'admet pas plus de 3 racines.

(2) Si les points $M_i(t_i)$ sont alignés alors il existe $(u,v,h)\in\mathbb{R}^3$, $(u,v)\neq(0,0)$ tel que les t_i soient racines de l'équation $ht^3+vt^2+ut+h=0$. On a nécessairement $h\neq 0$ (pour avoir 3 racines distinctes) et $ht^3+vt^2+ut+h=h(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$ entraîne que $t_1t_2t_3=-1$.
Réciproquement : si $t_1t_2t_3=-1$ alors, en posant $u=t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1$ et $v=-(t_1+t_2+t_3)$ on a $(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)=t^3+vt^2+ut+1=0$ et par conséquent les 3 points sont sur la droite d'équation $ux+vy+1=0$.

(3) On reprend la condition ci-dessus et par passage à la limite on obtient $t^2t'=-1$ donc si $t\neq 0$ la tangente à la courbe recoupe cette courbe au point $M'(\frac{-1}{t^2})$.

(4) Si les points $M_i(t_i)$ sont alignés alors $t_1t_2t_3=-1$ d'où $t'_1t'_2t'_3=\dfrac{-1}{t_1^2t_2^2t_3^2}=-1$ donc les points $M'(t'_i)$ sont aussi alignés.

Solution 3.1.4

(1) Comme $x(\frac{1}{t})=y(t)$ et $y(\frac{1}{t})=x(t)$ la courbe admet la droite $y=x$ comme axe de symétrie. Il suffit alors d'étudier les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sur chacun des intervalles $[-1,0[$ et $]0,1]$.

(2) La tangente au point $M(t)$ admet pour équation $-2t^2x+2ty+t^3-1=0$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points cherchés, un point (x,y) appartient à $\mathcal{C}$ ssi il existe 2 paramètres t_1 et t_2 distincts tels que $t_1t_2=-1$ (ce qui traduit l'orthogonalité des tangentes) racines de l'équation $t^3-2xt^2+2yt-1=0$.
Cherchons donc une C.N.S. pour que l'équation $t^3-2xt^2+2yt-1=0$ admette 2 racines dont le produit vaut -1.
Comme $t_1t_2t_3=1$ (où t_i sont les racines de cette équation) alors $t_3=-1$ ce qui donne

$x+y+1=0$ (-1 est racine).
Réciproquement, si $x+y+1=0$ alors -1 est racine de l'équation. En divisant $t^3-2xt^2+2yt-1$ par $t+1$ on obtient l'équation $t^2+(2y+1)t-1=0$ (on a tenu compte de la relation entre x et y) qui admet bien 2 racines distinctes dont le produit vaut -1.
Conclusion : l'ensemble des points cherchés est la droite d'équation $x+y+1=0$.

Solution 3.1.5 En polaires : $A(2a,\pi/3), B(2a,-\pi/3), C(2a,\pi)$. $\{G\}$ aura pour équation polaire :
$r=\dfrac{a}{3}\left[\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos(\theta-2\pi/3)}+\dfrac{1}{\cos(\theta+2\pi/3)}\right]=-\dfrac{a}{\cos 3\theta}$ ($\cos\theta, \cos(\theta+2\pi/3), \cos(\theta-2\pi/3)$ sont racines de l'équation $4x^3-3x-\cos 3\theta=0$).

Solution 3.1.6 Équation polaire de l'orthocentre : $r=a\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ (strophoïde droite).

Solution 3.1.7 Équation polaire du lieu : $r=\dfrac{a(1+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$, équation cartésienne : $x=\dfrac{2ay^2}{y^2-a^2}$.

Solution 3.1.8 Équation polaire : $r=\dfrac{R}{1+\cos\theta}$: parabole.

Solution 3.1.9

a) symétrie par rapport à O. Étude sur $]\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}[$: $\theta=\dfrac{\pi}{4}+h, r\sin h=\dfrac{1}{2}+\dfrac{h}{2}+o(h)$.

b) On remarque que si $M(r,\theta)$ appartient à l'ensemble recherché alors $M(r,\theta+2\pi)$ y appartient aussi, il suffit de limiter l'étude pour θ dans un intervalle d'amplitude 2π. Si $M(r,\theta)$ appartient à la courbe alors $M'(r,\pi-\theta)$ y est aussi donc, il suffira de prendre $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$ et de faire une symétrie par rapport à Oy pour obtenir toute la courbe.

On étudie $\sin\theta$ en fonction de r soit $\sin\theta=f(r)$ où $f(r)=\dfrac{r^2-3r}{r+1}$ pour $r\neq-1$. On a $f'(r)=\dfrac{r^2+2r-3}{(r+1)^2}$ d'où le tableau de variation :

r	$-\infty$		-3		-1		-1		r_1		1		r_2		$+\infty$
$f'(r)$		$+$	0	$-$	‖				$-$		0		$+$		
$f(r)$	$-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$-\infty$ ‖		$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

et comme $\sin\theta\in[-1,1]$ alors r variera entre $[2-\sqrt{5},2+\sqrt{5}]$. On trace alors la courbe en suivant θ en fonction de r et en précisant les tangentes lorsque $r=2-\sqrt{5},\ 1,\ 2+\sqrt{5}$.

Cette courbe a été construite en utilisant les paramétrisations suivantes

$$x=\pm r\sqrt{1-\left(\frac{r^2-3r}{r+1}\right)^2},\ y=\frac{r^3-3r}{r+1}$$

obtenues en prenant $x=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$, $y=r\sin\theta$.

c) On étudie $\tan\theta$ en fonction de r.

d) Étude sur $[0,\frac{3\pi}{2}]$ + symétrie / Oy + symétrie / O.
En $\dfrac{3\pi}{2}$: $\theta=\dfrac{3\pi}{2}+h, r\sin h=-3+\lambda^2h^2+o(h^2)$
Points doubles : $O(\theta=0,\theta=3\pi), A(\theta=\dfrac{\pi}{2}), \theta=\dfrac{5\pi}{2}$.

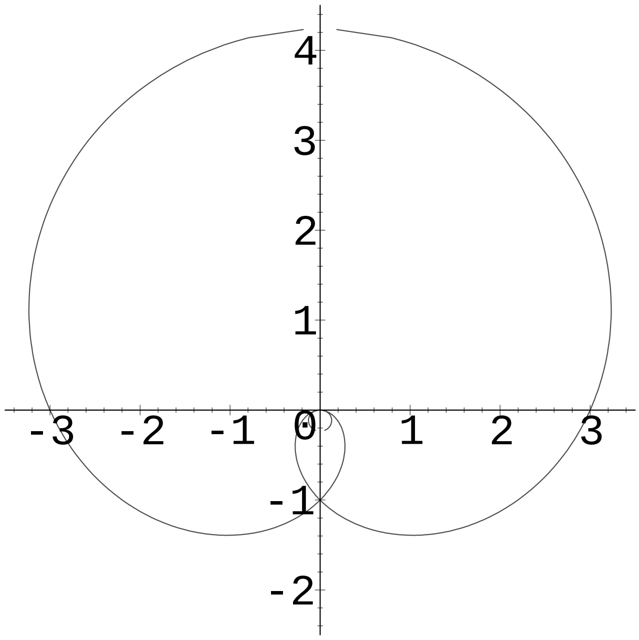

FIGURE 2. Courbe $\sin\theta = \dfrac{r^2-3r}{r+1}$)

$B(\theta=\pi,\theta=2\pi)$ + les symétriques.

e) Étude sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ + symétrie par rapport à $y=x$ + symétrie par rapport à Oy + symétrie par rapport à O. $r'<0$ sur $[0,\frac{\pi}{4}]$. Points d'inflexions :

$$r^2+2r'^2-rr''=2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-\frac{3}{2}\sin 2\theta(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+4\sin^2 2\theta-\frac{7}{4}\sin^3 2\theta.$$

En posant $u=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$ on est ramené à étudier le signe de $-8u^3-3u+2$ sur $]0,\frac{1}{2}[$.

Solution 3.2.1 La tangente au point (x_0,y_0) a pour équation : $\dfrac{Xx_0}{a^2}-\dfrac{Yy_0}{b^2}=1$ (pente $m=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$). Les tangentes à l'hyperbole passant par $M(x,y)$ sont données par $Y-mX=y-mx$, donc les points de contact vérifient :

$$y_0-mx_0=y-mx\ ;\ m=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\Leftrightarrow x_0=\frac{ma^2(y-mx)}{b^2-m^2a^2},\ y_0=\frac{b^2(y-mx)}{b^2-m^2a^2}.$$

On a $b^2-m^2a^2\neq 0$ car, si $m=\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ on trouve

$$b^2-\frac{b^4x_0^2}{a^2y_0^2}=\frac{b^4}{y_0^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{x_0^2}{a^2}\right)=-\frac{b^4}{y_0^2}.$$

En reportant dans l'équation de l'hyperbole on a :

$$\frac{m^2a^4(y-mx)^2}{a^2(b^2-m^2a^2)^2}-\frac{b^4(y-mx)^2}{b^2(b^2-m^2a^2)^2}=1 \text{ soit } (m^2a^2-b^2)(y-mx)^2=(m^2a^2-b^2)^2$$

et en simplifiant par $b^2-m^2a^2\neq 0$ on obtient $m^2(a^2-x^2)+2mxy-y^2-b^2=0$.
On veut que cette équation ait des racines dont le produit vaut -1 donc l'ensemble cherché est contenu dans le cercle orthoptique de l'hyperbole $x^2+y^2=a^2-b^2$.

Pour avoir équivalence on doit supposer $m^2\neq\dfrac{b^2}{a^2}$ soit $y\neq\pm\dfrac{b}{a}x$ (points qui correspondent aux cas limites des asymptotes.

Solution 3.2.2 Équation de (P_α) : $x^2 + y^2 - (x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)^2 = 0$: (P_α) tangente à D : $x = d \Leftrightarrow p = 2d\cos\alpha$: le sommet décrit le cercle $r = d\cos\theta$ privé de O (solution géométrique). En dérivant par rapport à x l'équation de (P_α) et en exprimant $y' = 0$ on obtient l'équation $y^2 + dx = 0$; $x \neq 0$: parabole privée de O (là encore, on a une solution géométrique).

Solution 3.2.3 O est le point donné, $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$ est le cercle donné. Si F est le foyer d'une parabole, $X^2 = 2pY + p^2$ est son équation dans un R.O.N. $(F, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$. Si $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{i}})$ on trouve $R = \dfrac{p}{\cos^3\alpha}$ et $x = -\dfrac{R}{2}\sin\alpha\cos\alpha, y = \dfrac{R}{2}\cos^2\alpha$ (cercle).

Solution 3.2.4 Cette "conique" n'en est pas vraiment une car seul le point de coordonnées $(-1,-1)$ y appartient. En fait, en considérant ceci comme une équation du second degré en x on peut factoriser $x^2 - xy + y^2 + x + y + 1$ de la manière suivante :

$$x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = (x + yj - j^2)(x + yj^2 - j).$$

Ensuite, il n'est pas sorcier de repérer la factorisation suivante :

$$x^3 + 3xy + y^3 - 1 = (x + y + 1)(x^2 - xy + y^2 + x + y + 1).$$

On en déduit que l'ensemble des points $M(x, y)$ est la réunion de la droite $x + y + 1 = 0$ et du point $(-1,-1)$.
Les solutions entières de cette équation sont $-(1,1)$ et $(n, -1-n)$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Solution 3.2.5 Soient D et D' les directrices de chacune de ces paraboles. D et D' sont perpendiculaires à l'axe commun, donc elles sont parallèles. Comme $MF = MH = MH'$, on a alors 2 cas.

- Si H et H' sont du même coté, ils sont confondus, les deux paraboles le sont également et l'angle est nul.
- Si H et H' sont de part et d'autre de M alors on va chercher l'équation de ces paraboles. $\mathcal{P}$ admet par exemple l'équation $x^2 + y^2 = (x-p)^2$ et $\mathcal{P}'$ l'équation $x^2 + y^2 = (x+p')^2$ en prenant le foyer comme origine et $x = p$, $x = -p'$ comme équations de D et D'. On suppose aussi que $p > 0$ et $p' > 0$.

  Le point d'intersection admet pour ordonnée $x = \dfrac{p - p'}{2}$. La tangente à $\mathcal{P}$ admet comme pente $-\sqrt{\dfrac{p}{p'}}$ et celle de $\mathcal{P}'$ admet $\sqrt{\dfrac{p'}{p}}$ donc les 2 tangentes sont perpendiculaires ce qui est évident géométriquement.