FONCTIONS USUELLES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES (R)

1. Fonctions usuelles

1.1. Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances.

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{F T}}$

Étudier les fonctions : $f(x) = xe^{\frac{x}{x^2-1}}$, $g(x) = \dfrac{x^2-1}{\ln x}$.

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{F}}$

Pour $n \geqslant 1$, simplifier $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^{k-n}\,\mathrm{th}(2^k x)$. En déduire la limite de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$

Résoudre l'équation en x suivante

$$2\ln x + \ln(2x-1) = \ln(2x+8) + 2\ln(x-1).$$

Exercice 1.1.4. $\boxed{\textbf{F}}$

Résoudre l'inéquation en x suivante

$$\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln x - 1.$$

Exercice 1.1.5. $\boxed{\textbf{F}}$

Résoudre les équations en x suivantes

$$2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2},\ \ 4^{x+1} + 2^{2-x} = 65.$$

Exercice 1.1.6. $\boxed{\textbf{F}}$

Résoudre l'inéquation en x suivante

$$\frac{\mathrm{ch}\, x - 2}{\mathrm{ch}\, x + 4} < \frac{\mathrm{ch}\, x - 3}{\mathrm{ch}\, x + 2}.$$

Exercice 1.1.7. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $f\ : \mathbb{R} \to]-1,1[$ une fonction non constante, continue en 0 telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}.$$

Trouver f.

Exercice 1.1.8. $\boxed{\textbf{I}}$

(1) Trouver les réels x tels que $2\operatorname{Argsh} x + \operatorname{Argth} \frac{1}{2} = \operatorname{Argch} 3$.

(2) Résoudre l'équation $\operatorname{Argch} x = \operatorname{Argsh}(x-2)$.

(3) Soit $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{Argsh} \dfrac{4\sqrt{x}(1+x)}{(1-x)^2}$. Calculer $\operatorname{ch} 2y$, e^y et y en fonction d'x.

1.2. Fonctions circulaires.

Exercice 1.2.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Simplifier les expressions :

$a = \sin(\operatorname{Arctan}(-7))$, $b = \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3$, $c = 2\operatorname{Arctan} 1/2 + \operatorname{Arcsin} 3/5$,
$d = \operatorname{Arccos}(-4/5) + \operatorname{Arctan} 7$, $e = 2\operatorname{Arctan} 1/5 + \operatorname{Arctan} 1/7 + 2\operatorname{Arctan} 1/8$.

Exercice 1.2.2. $\boxed{\textbf{F}}$

Résoudre les équations suivantes :

(1) $\operatorname{Arccos} \dfrac{12x}{13} + \operatorname{Arccos} \dfrac{5x}{13} = \dfrac{\pi}{2}$.

(2) $\operatorname{Arctan} \left[\dfrac{1}{2}(x - \dfrac{1}{x})\right] - 2\operatorname{Arctan} x = \dfrac{\pi}{2}$.

(3) $\operatorname{Arctan} \dfrac{3x+7}{1-x} - \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2}$.

Exercice 1.2.3. $\boxed{\textbf{F}}$

Montrer que les fonctions suivantes sont constantes :

(1) $f(x) = \operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x) + \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x$.

(2) $g(x) = \operatorname{Arccos} x + 2\operatorname{Arctan} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 1.2.4. $\boxed{\textbf{F}}$

Simplifier la fonction $f(x) = \operatorname{Arcsin}(3x - 4x^3)$.

---

2. Équations différentielles linéaires

2.1. Équation linéaires du premier ordre.

Exercice 2.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Résoudre les équations différentielles (et chercher les solutions définies sur $\mathbb{R}$) :

1. $2xy' + y = x^n$
2. $xy' + 3y = x^2$
3. $xy' + 3y = x^4 \sin \dfrac{1}{x^3}$
4. $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$
5. $|x|y' + (x-1)y = x^2$

Exercice 2.1.2. **I**

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x (2x - 3t) f(t)\,\mathrm{d}t = x^2.$$

2.2. Équations linéaires du second ordre à coefficients constants.

Exercice 2.2.1. **F**

Soit l l'opérateur défini par $l(y) = y' + p(x)y$. Calculer $l \circ l(y)$.
En déduire les solutions de (1) $y'' + 2\,\mathrm{th}\,x y' + y = 0$.

Exercice 2.2.2. **F T**

Trouver les réels α, β et la fonction g telle que l'équation différentielle $y'' + \alpha y' + \beta y = g$ ait pour solutions :

$$x \mapsto e^{-x/2}\left(a \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} + b \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x^{21} - 1}{x - 1} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

avec a et b quelconques.

Exercice 2.2.3. **F**

Résoudre les équations différentielles :

1. $y'' + y = x^2 \cos^2 x$
2. $y'' + y = \sin \omega x$
3. $y'' + \omega^2 y = x \sin 2x$
4. $y'' - 3y' + \lambda y = \sin x$ $\lambda \leqslant 9/4$.

Exercice 2.2.4. **I**

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + 3f'(x) + 2f''(x)] = l$, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

---

3. Courbes paramétrées, coniques

3.1. Courbes planes paramétrées.

Exercice 3.1.1. **F C**

Soit Γ la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t}{1 + t^3} \\ y(t) &= \dfrac{t^2}{1 + t^3} \end{cases}$.

(1) Montrer qu'une droite du plan coupe cette courbe en au plus 3 points.
(2) Soit $M_i(t_i)$ 3 points distincts situés sur Γ. Montrer qu'une CNS pour que les points M_i soient alignés est $t_1 t_2 t_3 = -1$.
(3) Montrer que, si $t \neq 0$ alors la tangente à Γ en $M(t)$ recoupe Γ en un point $M'(t')$.
(4) Si les points $M_i(t_i)$ sont 3 points de Γ alignés, $M'(t_i')$ les points d'intersection des tangentes aux M_i avec Γ. Montrer que les points $M'(t_i)$ sont alignés.

Exercice 3.1.2. **I T**

Étudier les courbes en polaires :

1 $r = \dfrac{\cos\theta/3 + \sin\theta/3}{1 - \tan\theta/3}$ 2 $r = \dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ 3 $r = a\dfrac{(\sin\theta - 2\cos\theta)^2}{\sin\theta - \cos\theta}$ 4 $r = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

5 $r = \cos\theta + \dfrac{1}{\sin\theta/2}$ 6 $r = \dfrac{\tan\theta}{1 - 2\sin\theta}$ 7 $r = \dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta - 1}$

8 $r = (1 - \tan\theta/2)^{2/3} - 1$ 9 $\sin\theta = \dfrac{3r - 1}{3r^2 - 3r + 2}$ 10 $\tan\theta/2 = \dfrac{2r^3}{3r^2 - 1}$

3.2. **Coniques.**

Exercice 3.2.1. **D**

Démontrer que les cordes d'une conique (C) vues d'un point de cette conique sous un angle droit, passent par un point fixe (prendre comme repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $O \in (C)$ et $\vec{i}$ tangent à (C) en O). Cas d'exception.

Exercice 3.2.2. **I**

On donne une parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y^2 = 2px$, $p > 0$, un point $A\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$. Une droite (D) variable passant par A coupe $(\mathcal{P})$ en M et N.Déterminer l'ensemble $\{I\}$ des centres des cercles circonscrits aux triangles MNO.

Exercice 3.2.3. **I**

Le plan affine est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer le lieu des foyers des paraboles tangentes aux axes $0x$ et Oy et passant par $M(1,1)$ (on rappelle que l'ensemble des projections orthogonales de F (foyer) sur les tangentes à $(\mathcal{P})$ (parabole) est la tangente au sommet de $(\mathcal{P})$).

Exercice 3.2.4. **D**

Soit (C) une conique de foyer O et de directrice associée D, Γ un cercle passant par O, coupant (C) en 4 points M_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ et D en 2 points P_1 et P_2 ; montrer que

$$OM_1.OM_2.OM_3.OM_4 = OP_1^2.OP_2^2.$$

Exercice 3.2.5. **F T**

Nature, centre et foyers des coniques :

$$(C_\lambda) \ : \quad (1+\lambda)(x^2+y^2) + 2(1-\lambda)xy - y + 1 = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On distinguera les cas $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ $(0 < \lambda < 1,\ \lambda = 1,\ \lambda > 1)$, $\lambda < 0$ et on pourra faire un changement de repère en remarquant que $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$.

Exercice 3.2.6. $\boxed{\textbf{F}}$
Si $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$, on note (D_t) la droite d'équation $x + ty - at^2 = 0$ dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) Si α, β, γ sont des réels distincts, montrer que l'orthocentre du triangle déterminé par (D_α), (D_β), (D_γ) est situé sur une droite fixe que l'on précisera.
(2) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, (D_t) est tangente à la parabole $(P) : y^2 = -4ax$ en un point M_t dont on donnera les coordonnées.
(3) Énoncer la propriété démontrée.

---

1. Indications :

Indication 1.1.1 Calculs...

Indication 1.1.2 Utiliser la formule $\text{th}(x) = \dfrac{2}{\text{th}\, 2x} - \dfrac{1}{\text{th}\, x}$ pour $x \neq 0$.

Indication 1.1.3 Passer aux exponentielles.

Indication 1.1.4 Passer aux exponentielles.

Indication 1.1.5 Pour la première équation, passer les puissances de 2 d'un même côté.
Pour la deuxième, poser $t = 2^x$.

Indication 1.1.6 On résout l'inéquation en $\text{ch}\, x$.

Indication 1.1.7 Penser à la tangente hyperbolique.

Indication 1.1.8

(1) Prendre le sinus hyperbolique de chaque côté de l'équation, $x = \sqrt{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{2}}$.
(2) Prendre le sinus hyperbolique de chaque côté de l'équation, on trouve $\emptyset$.
(3) Il y a des simplifications (reconnaître un carré) d'où $\text{ch}(2y) = \frac{1+6x+x^2}{(1-x)^2}$, $e^y = \frac{(1+\sqrt{x})^2}{|1-x|}$ et $y = 2\ln|1+\sqrt{x}| - \ln|1-x|$.

Indication 1.2.1 On trouve $a = \frac{-7}{\sqrt{50}}$, $b = \frac{3\pi}{4}$, $c = \frac{\pi}{2}$, $d = \frac{\pi}{4}$ et $e = \frac{\pi}{4}$.

Indication 1.2.2

(1) On trouve $x = 1$.
(2) L'ensemble des solutions $]-\infty, 0[$.
(3) Penser à utiliser la formule d'addition des arctangentes, on obtient $x = 1 - \sqrt{14}$.

Indication 1.2.3

(1) Dériver... ou poser $x = \tan(2t)$.
(2) Dériver... ou poser $x = \cos(2t)$.

Indication 1.2.4 Utiliser la formule $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

Indication 2.1.1

(1) La solution générale est $\frac{\lambda}{\sqrt{x}} + \frac{x^n}{2n+1}$ sur $\mathbb{R}^*$; sur $\mathbb{R}$, la seule solution est : $\frac{x^n}{2n+1}$.
(2) La solution générale sur $\mathbb{R}^*$ est : $\frac{\lambda}{x^3} + \frac{x^2}{5}$; sur $\mathbb{R}$, la seule solution est : $\frac{x^2}{5}$.
(3) La solution générale sur $\mathbb{R}^*$ est $y = \frac{1}{x^3}\int_0^x t^6 \sin\frac{1}{t^3}\,dt + \frac{\lambda}{x^3}$; sur $\mathbb{R}$, la seule solution est : $\frac{1}{x^3}\int_0^x t^6 \sin\frac{1}{t^3}\,dt$ (dérivable sur $\mathbb{R}$).
(4) $y = \frac{x^2}{x^2-1}\left[\lambda_k + \ln|x|\right]$, $k \in \{1,2,3,4\}$. La seule solution sur $\mathbb{R}$ est : $\frac{x^2 \ln x^2}{2(x^2-1)}$.
(5) $y = x + 2 + \frac{2}{x} + \mu\dfrac{e^x}{x}$. La seule solution sur $\mathbb{R}$ est : $\begin{cases} x > 0 \ : \quad y = x - xe^{-x}, \\ x < 0 \ : \quad y = x + 2 + \frac{2}{x}(1 - e^x) \end{cases}$ et $y(0) = 0$.

Indication 2.1.2 Faire intervenir $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Indication 2.2.1 Pour résoudre (1), prendre $p(x) = \operatorname{th} x$.

Indication 2.2.2 Nécessairement $\alpha = \beta = 1$ puis on fait les calculs.

Indication 2.2.3

(1) Linéariser le cosinus et passer en complexes.
(2) Distinguer les cas $\omega = \pm 1$ et $\omega \neq \pm 1$.
(3) Distinguer les cas $\omega \neq 2$ et $\omega = 2$ puis passer en complexes.
(4) Faire intervenir $k = \sqrt{\dfrac{9}{4} - \lambda}$.

Indication 2.2.4 Se ramener au cas où $l = 0$ puis montrer que, si $\lim\limits_{x\to+\infty} [\lambda g'(x) + g(x)] = 0$ avec $\lambda > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (résoudre l'équation différentielle $y + \lambda y' = h$ en exprimant les solutions à l'aide d'une intégrale et conclure avec des ε). Appliquer alors ce résultat deux fois.

Indication 3.1.1

(1) Écrire l'équation en t.
(2) Utiliser les relations entre coefficients et racines de l'équation du (1).
(3) Prendre l'équation du (1) et donner les conditions lorsqu'on a une racine double.
(4) Toujours avec l'équation du (1).

Indication 3.1.2 Penser à étudier les points suivants :

- signe de r (les variations de r sont parfois un luxe que l'on peut s'épargner),
- tangente en O,
- branches infinies et, seulement sous la contrainte, les points d'inflexion,
- pour les cas désespérés, penser qu'une courbe en polaires, c'est une courbe en paramétriques qui s'ignore, i.e. on a $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Indication 3.2.1 C'est un exercice à astuces géométriques (sinon on se perd dans les calculs !). Écrire l'équation de la conique puis l'équation d'une droite générale Δ ne passant pas par l'origine et considérer la réunion des droites passant par les points d'intersection de (C) et de Δ. Traduire enfin l'orthogonalité de ces 2 droites.

Indication 3.2.2 Écrire l'équation du cercle passant par MNO et donner l'équation aux ordonnées de l'intersection de $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{P})$.

Indication 3.2.3 Écrire l'équation de $(\mathcal{P})$ sous la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{(bx+ay)^2}{a^2+b^2}$.

Indication 3.2.4 On passe en coordonnées polaires et, en éliminant θ dans $(C) \cap \Gamma$, on obtient une équation du 4-ième degré. On fait le même genre de chose avec $(C) \cap D$.

Indication 3.2.5 On fait une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Indication 3.2.6

(1) On cherche la hauteur issue de $(D_\alpha) \cap (D_\beta)$ sous la forme $\lambda D_\alpha + \mu D_\beta = 0$.
(2) Immédiat par le calcul.
(3) On a une propriété sur les orthocentres des triangles formés par les tangentes à une parabole.

2. Solutions :

Solution 1.1.1 $f'(x) = \dfrac{x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1}{(x^2-1)^2} e^{\frac{x}{x^2-1}}$ 2 racines $\begin{cases} x_1 \sim 0,48 & y_1 \sim 0,26 \\ x_2 \sim 2,08 & y_2 \sim 3,89 \end{cases}$

$$g'(x) = \frac{x}{\ln^2 x}\left(2\ln x + \frac{1}{x^2} - 1\right) = \frac{x}{\ln^2 x} h(x) \text{ et } h(x) \geqslant 0.$$

Solution 1.1.2 On utilise la célèbre formule $\operatorname{th}(x) = \dfrac{2}{\operatorname{th} 2x} - \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$ pour $x \neq 0$.

- Si $x = 0$ alors $u_n = 0$.
- Si $x \neq 0$ alors $2^k \operatorname{th}(2^k x) = \dfrac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1}x)} - \dfrac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)}$ d'où

$$u_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)} = \frac{1}{\operatorname{th}(2^n x)} - \frac{1}{2^n \operatorname{th} x}$$

et par conséquent, si $x > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et si $x < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Solution 1.1.3 L'équation n'a de sens que si $x > 1$. On passe ensuite aux exponentielles ce qui donne l'équation du second degré $5x^2 - 14x + 8 = 0$ qui admet les solutions 2 et $\dfrac{4}{5}$. La seule solution est donc $x = 2$.

Solution 1.1.4 L'inéquation n'a de sens que si $x > 1$. On passe aux exponentielles d'où $x^2 - 1 < \dfrac{x^2}{e}$ ce qui est équivalent à $|x| < \sqrt{\dfrac{e}{e-1}}$ d'où l'ensemble des solutions $]1, \sqrt{\frac{e}{e-1}}$.

Solution 1.1.5 On a $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2} \Leftrightarrow 2^{x+4} - 2^{x+2} = 3^{x+2} - 3^x$ et, en simplifiant, $2^{x-1} = 3^{x-1}$ d'où la seule solution $x = 1$.
On pose $t = 2^x$ d'où $4^{x+1} + 2^{2-x} = 65 \Leftrightarrow 4t^2 + \dfrac{4}{t} = 65 \Leftrightarrow 4t^3 - 65t + 4 = 0$. $t = 4$ est solution évidente, les autres solutions sont données par $t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{17}}{2}$. En revenant à x, on obtient les solutions suivantes : 2 et $\frac{\ln \frac{\sqrt{17}-4}{2}}{\ln 2}$.

Solution 1.1.6 Comme $\operatorname{ch} x + 4$ et $\operatorname{ch} x + 2$ sont > 0, l'inéquation est équivalente à $(\operatorname{ch} x - 2)(\operatorname{ch} x + 2) < (\operatorname{ch} x - 3)(\operatorname{ch} x + 4)$ soit $\operatorname{ch} x > 8$ d'où l'ensemble des solutions $]-\infty, -\operatorname{Argch} 8, \operatorname{Argch} 8, +\infty[$.

Solution 1.1.7 On a tout de suite reconnu une propriété de la fonction th. Soit $g(t) = \operatorname{Argth}(f(t))$, alors $g(t+u) = g(t) + g(u)$ (en utilisant la formule $\operatorname{Argth} a + \operatorname{Argth} b = \operatorname{Argth} \dfrac{a+b}{1+ab}$ pour $(a,b) \in]-1,1[^2$).
Comme g est continue en 0 alors g est linéaire donc $g(t) = \alpha t$ et par conséquent $f(x) = \operatorname{th}(\alpha x)$.

Solution 1.1.8

(1) On est ramené à la résolution de l'équation équivalente $\operatorname{sh}(2\operatorname{Argsh} x) = \operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(3) - \operatorname{Argth}(1/2))$ soit, après simplifications,

$$2x\sqrt{1+x^2} = \frac{4\sqrt{2}-3}{\sqrt{3}}.$$

Les solutions (éventuelles) sont donc positives. On élève au carré, on trouve $(2x^2+1)^2 = \frac{4}{3}(11-6\sqrt{2}) = \left(\frac{6-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ d'où l'unique solution $x = \sqrt{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{2}}$.

(2) Nécessairement $x \geqslant 1$ et avec cette condition, l'équation devient équivalente à $\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x) = (x-2)$ (en prenant le sinus hyperbolique). En élevant au carré : on obtient $x = \frac{5}{4}$ mais, comme $\frac{5}{4} < 2$, on n'a pas de solution.

(3) On a $\operatorname{ch}(2y) = \sqrt{1 + \frac{16x(1+x)^2}{(1-x)^4}}$ or, après un savant calcul, on remarque que

$$(1-x)^4 + 16x(1+x)^2 = (1+6x+x^2)^2$$

donc $\operatorname{ch}(2y) = \dfrac{1+6x+x^2}{(1-x)^2}$.

On utilise ensuite la relation

$$e^{2y} = \operatorname{ch}(2y) + \operatorname{sh}(2y) = \frac{1+4\sqrt{x}+6x+4x\sqrt{x}+x^2}{(1-x)^2} = \frac{(1+\sqrt{x})^4}{(1-x)^2}.$$

Finalement $e^y = \dfrac{(1+\sqrt{x})^2}{|1-x|}$ et $y = 2\ln|1+\sqrt{x}| - \ln|1-x|$.

Solution 1.2.1 On utilise les formules sur les fonctions circulaires (cf page 124 et 125).

On trouve $a = \dfrac{-7}{\sqrt{50}}$, $b = \dfrac{3\pi}{4}$, $c = \dfrac{\pi}{2}$, $d = \dfrac{\pi}{4}$ et $e = \dfrac{\pi}{4}$.

Solution 1.2.2

(1) On peut utiliser la formule d'addition des Arccosinus (cf question (*iii*) page 125) mais il est plus rapide de vérifier que $f\ : x \mapsto \operatorname{Arccos}\dfrac{12x}{13} + \operatorname{Arccos}\dfrac{5x}{13}$ est une fonction strictement décroissante et que $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$ (grâce à Pythagore) fournit la seule solution.

(2) Soit $g(x) = \operatorname{Arctan}\left[\frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})\right] - 2\operatorname{Arctan} x$. g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $g'(x) = 0$ donc g est contante sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. $g(1) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $g(-1) = \dfrac{\pi}{2}$ d'où l'ensemble des solutions $]-\infty, 0[$.

(3) On réécrit l'équation sous la forme équivalente suivante $\operatorname{Arctan}\dfrac{3x+7}{1-x} = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2}$.

- Si $x \geqslant 2$ alors le second membre appartient à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$, l'équation n'a pas de solution dans ce cas.

- Si $x < 2$ alors on utilise la formule d'addition des Arctangentes (cf question (i) page 125) ce qui donne l'équation équivalente suivante :

$$\operatorname{Arctan}\frac{3x+7}{1-x} = \operatorname{Arctan}\frac{1+2x}{2-x}$$

et comme la fonction Arctangente est injective alors $\dfrac{3x+7}{1-x} = \dfrac{1+2x}{2-x}$ soit $x = 1-\sqrt{14}$ (l'autre racine est à écarter car $x = 1+\sqrt{14} \geqslant 2$).

Solution 1.2.3

(1) On peut dériver mais il est plus simple de poser $x = \tan 2t$ avec $t \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$. On a alors

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} - x &= \frac{1}{\cos 2t} - \tan 2t \text{ car } 2t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ &= \frac{1+\tan^2 t}{1-\tan^2 t} - \frac{2\tan t}{1-\tan^2 t} \text{ (voir page 97 bas)}\\ &= \frac{1-\tan t}{1+\tan t} = \tan(-t+\frac{\pi}{4})\end{aligned}$$

d'où $f(x) = -t + \frac{\pi}{4} + t = \dfrac{\pi}{4}$ car $-t + \dfrac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

(2) Là aussi, on peut dériver mais on peut poser $x = \cos 2t$ avec $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Comme $\dfrac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t} = \dfrac{1}{\tan^2 t}$ (toujours à l'aide des formule de la page 97) et que $\tan t > 0$, on a

$$g(x) = 2t + 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{\tan t} = 2t + 2\left[\frac{\pi}{2} - t\right] = \pi$$

car $\operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$ lorsque $x > 0$ (voir théorème 5.44 page 125).

Solution 1.2.4 On pose $x = \sin\theta$, $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$ ce qui donne $3x - 4x^3 = \sin 3\theta$. Comme f est impaire, on peut se limiter à $\mathbb{R}_+$:

On trouve $f(x) = \begin{cases} 3\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ \pi - 3\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \geqslant 1/2 \end{cases}$.

Solution 2.1.1

(1) La solution générale est $\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}} + \dfrac{x^n}{2n+1}$ sur $\mathbb{R}^*$; sur $\mathbb{R}$, la seule solution est : $\dfrac{x^n}{2n+1}$.

(2) La solution générale sur $\mathbb{R}^*$ est : $\dfrac{\lambda}{x^3} + \dfrac{x^2}{5}$; sur $\mathbb{R}$, la seule solution est : $\dfrac{x^2}{5}$.

(3) La solution générale sur $\mathbb{R}^*$ est $y = \dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x t^6 \sin\frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t + \frac{\lambda}{x^3}$; sur $\mathbb{R}$, la seule solution est : $\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x t^6\sin\frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$ (dérivable sur $\mathbb{R}$).
Ici, on ne peut exprimer les solutions à l'aide des fonctions élémentaires.

(4) On cherche les solutions sur $E = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$ où $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ et $I_4 =]1, +\infty[$ d'où $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}[\lambda_k + \ln|x|]$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
La seule solution sur $\mathbb{R}$ est : $\dfrac{x^2\ln x^2}{2(x^2-1)}$.

(5) $I_1 =]0,+\infty[$, $I_2 =]-\infty,0[$: sur I_1 : $y = x + \lambda x e^{-x}$, sur I_2 : $y = x + 2 + \dfrac{2}{x} + \mu\dfrac{e^x}{x}$.

Les seules solutions continues sur $\mathbb{R}$ sont : $\begin{cases} x > 0 : & y = x - \lambda x e^{-x}, \\ x < 0 : & y = x + 2 + \dfrac{2}{x}(1 - e^x) \end{cases}$ et $y(0) = 0$ et si l'on cherche les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ on trouve $\begin{cases} x > 0 : & y = x - x e^{-x}, \\ x < 0 : & y = x + 2 + \dfrac{2}{x}(1 - e^x) \end{cases}$ et $y(0) = 0$, solution unique.

Solution 2.1.2 L'équation peut se réécrire sous la forme $2x\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - 3\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = x^2$. Les fonctions sont dérivables donc, en posant $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, F vérifie l'équation différentielle $xy' - 2y = -2x$. L'ensemble des solutions de cette équation est donné par $F(x) = 2x + \lambda x^2$ si $x < 0$ et $F(x) = 2x + \mu x^2$ si $x > 0$ donc si f est solution alors $f(x) = \begin{cases} 2 + \alpha x & \text{si } x < 0 \\ 2 + \beta x & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Par continuité, on pose $f(0) = 2$. On vérifie alors que f est bien solution du problème.

Solution 2.2.1 On a $l \circ l(y) = y'' + 2py' + (p' + p^2)y$.

En posant $p = \operatorname{th} x$, on vérifie que $l \circ l(y) = y'' + 2\operatorname{th} x y' + y$.

On a donc $l(y) \in \operatorname{Ker} l$, i.e. $l(y) = \dfrac{\alpha}{\operatorname{ch} x}$ et, en résolvant l'équation du premier ordre obtenue, on arrive à $y = \dfrac{ax + b}{\operatorname{ch} x}$.

Solution 2.2.2 La solution générale de l'équation sans second membre est $\lambda e^{jx} + \mu e^{j^2 x}$ donc on a $\alpha = \beta = 1$.

Avec $\dfrac{x^{21} - 1}{x - 1} = \sum\limits_{k=0}^{20} x^k$ on va chercher : $g = \sum\limits_{k=0}^{20} g_k$. Or $g_k = \varphi_k'' + \varphi_k' + \varphi_k$ où $\varphi_k(x) = x^k e^{-x/2}\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, donc

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{-x/2}\left[\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\sum_{k=0}^{20} k(k-1)x^{k-2} - \sqrt{3}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\sum_{k=0}^{20} kx^{k-1}\right] \\ &= e^{-x/2}\left[\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\,\frac{380x^{21} - 798x^{20} + 420x^{19} - 2}{(x-1)^3} - \sqrt{3}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\,\frac{20x^{21} - 21x^{20} + 1}{(x-1)^2}\right]. \end{aligned}$$

Solution 2.2.3

(1) Solutions : $y = a\cos x + b\sin x + \left(\dfrac{x^2}{2} - 1\right) + \left(-\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{13}{27}\right)\cos 2x + \dfrac{4}{9}x\sin 2x$.

(2) $\omega \neq \pm 1$: $y = \lambda\cos x + \mu\sin x + \dfrac{\sin\omega x}{1 - \omega^2}$; $\omega = \pm 1$: $y = \left(\lambda - \omega\dfrac{x}{2}\right)\cos x + \mu\sin x$.

(3) $\omega \neq 2$: $y = a\cos\omega x + b\sin\omega x + \dfrac{x\sin 2x}{\omega^2 - 4} - \dfrac{4}{\omega^2 - 4}\cos 2x$.

$\omega = 2$: $y = a\cos 2x + b\sin 2x + \dfrac{1}{16}x\sin 2x - \dfrac{1}{8}x^2\cos 2x$.

(4) $k = \sqrt{\dfrac{9}{4} - \lambda}$, solution particulière $y_1(x) = \dfrac{(\lambda-1)\sin x + 3\cos x}{\lambda^2+8}$; $k = 0$: $y = y_1 + (\alpha x + \beta)e^{3x/2}$, $k \neq 0$: $y = y_1 + (\alpha e^{kx} + \beta e^{-kx})e^{3x/2}$.

Solution 2.2.4 On se ramène au cas où $l = 0$ en remplaçant f par $f - l$.
On montre alors le lemme suivant :
si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}[\lambda g'(x)+g(x)] = 0$ avec $\lambda > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
Dém : soit $h(x) = g(x)+\lambda f'(x)$, on résout alors l'équation différentielle $y+\lambda y' = h$. L'équation homogène admet comme solution $y = \alpha e^{-\lambda x}$ et, par variation de la constante, on a l'ensemble des solutions qui s'écrit

$$y(x) = \alpha e^{-\lambda x} + \underbrace{e^{-\lambda x}\int_0^x h(t)e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t}_{=y_0(x)}.$$

Il suffit donc de prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} y_0(x) = 0$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une limite (nulle) en $+\infty$ donc elle est bornée sur $[0, +\infty[$ par M. On découpe alors l'intégrale en 2, soit $A > 0$ tel que $t \geqslant A \Rightarrow |h(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$:

$$|y_0(x)| \leqslant e^{-\lambda x}\int_0^A Me^{\lambda t}\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{e^{-\lambda x}\int_0^x e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t}_{\leqslant 1}$$

et on choisit x suffisamment grand pour que $e^{-\lambda x}\displaystyle\int_0^A Me^{\lambda t}\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
On écrit alors que $f(x) + 3f'(x) + 2f''(x) = f_1(x) + 2f_1'(x)$ avec $f_1 = f + f'$. Grâce au lemme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) + f'(x)] = 0$. On applique à nouveau le lemme et on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Solution 3.1.1

(1) Soit D la droite d'équation $ux + vy + h = 0$, le point $M(t)$ appartient à D ssi $ut + vt^2 + h(1 + t^3) = 0$. Cette équation de degré 3 au maximum n'admet pas plus de 3 racines.
(2) Si les points $M_i(t_i)$ sont alignés alors il existe $(u, v, h) \in \mathbb{R}^3$, $(u, v) \neq (0, 0)$ tel que les t_i soient racines de l'équation $ht^3 + vt^2 + ut + h = 0$. On a nécessairement $h \neq 0$ (pour avoir 3 racines distinctes) et $ht^3 + vt^2 + ut + h = h(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$ entraîne que $t_1t_2t_3 = -1$.
Réciproquement : si $t_1t_2t_3 = -1$ alors, en posant $u = t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1$ et $v = -(t_1+t_2+t_3)$ on a $(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = t^3 + vt^2 + ut + 1 = 0$ et par conséquent les 3 points sont sur la droite d'équation $ux + vy + 1 = 0$.
(3) On reprend la condition ci-dessus et par passage à la limite on obtient $t^2t' = -1$ donc si $t \neq 0$ la tangente à la courbe recoupe cette courbe au point $M'(\frac{-1}{t^2})$.
(4) Si les points $M_i(t_i)$ sont alignés alors $t_1t_2t_3 = -1$ d'où $t_1't_2't_3' = \dfrac{-1}{t_1^2t_2^2t_3^2} = -1$ donc les points $M'(t_i')$ sont aussi alignés.

Solution 3.1.2 10 Soit $\mathcal{C}$ la courbe définie par la relation $\tan\dfrac{\theta}{2} = \varphi(r)$ où $\varphi(r) = \dfrac{2r^3}{3r^2-1}$. On remarque que, si $M(r, \theta) \in \mathcal{C}$ alors $M(-r, \theta) \in \mathcal{C}$ et $M(-r, \theta + 2\pi) \in \mathcal{C}$. On obtiendra donc toute la courbe en prenant $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1/\sqrt{3}\}$ et en faisant une symétrie par rapport à Oy.

On va donc construire cette courbe à partir de l'équation $\theta = 2\operatorname{Arctan}\varphi(r)$, $r \geqslant 0$. Comme $\varphi'(r) = \dfrac{6r^2(r^2-1)}{(3r^2-1)^2}$ on obtient le tableau suivant

r	0		$1/\sqrt{3}$			1		$+\infty$
φ'		$-$	$\|$	$\|$	$-$	0	$+$	
φ	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
θ	0	$\searrow$	$-\pi$	$+\pi$	$\searrow$	$\pi/2$	$\nearrow$	$+\pi$

Pour $r = 1$, on a $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et la tangente est verticale. Quand $r \to +\infty$, on a $y = 3$ qui est asymptote ($y(r) = \dfrac{2r\varphi(r)}{1+\varphi^2(r)} \sim \dfrac{2r.2r/3}{(2r/3)^2} = 3$).

Le tracé avec un logiciel peut se faire en utilisant les formules

$$x = 4\frac{r^4(3r^2-1)}{4r^6+9r^4-6r^2+1},\ y = \frac{r(-4r^6+9r^4-6r^2+1)}{4r^6+9r^4-6r^2+1}$$

obtenue en utilisant les relations $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$, $\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ et en exprimant que $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

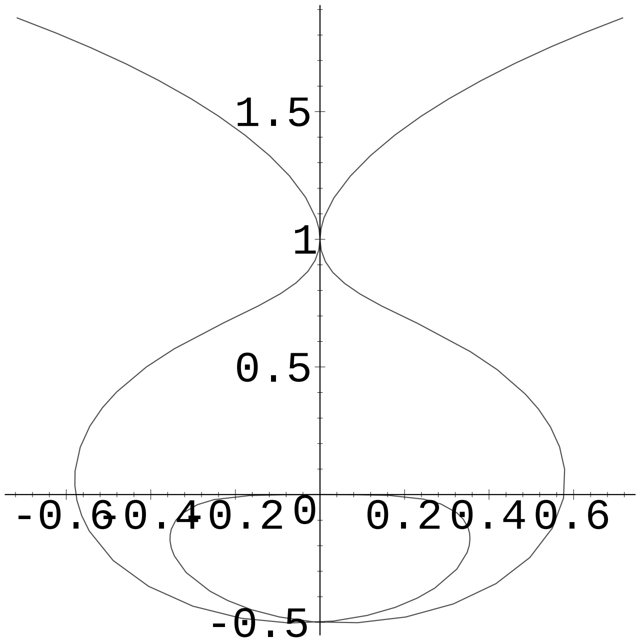

FIGURE 1. Courbe $\tan\theta/2 = \dfrac{2r^3}{3r^2-1}$

Solution 3.2.1 (C) a pour équation $ax^2+2bxy+cy^2+2dy = 0$; soit Δ (d'équation $\lambda x+\mu y-1 = 0$) une corde répondant à la question et G la réunion des droites OM_1, OM_2 où M_1 et M_2 sont les intersection de Δ avec (C) alors : $(x,y) \in G \Leftrightarrow x = y = 0$ ou $\exists k \neq 0$ (rapport d'homothétie) tel que $\begin{cases} ax^2+2bxy+cy^2+2dky = 0 \\ \lambda x+\mu y-k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow ax^2+(2b+2\lambda d)xy+(c+2d\mu)y^2 = 0$. Et comme

$\overrightarrow{OM}_1 \perp \overrightarrow{OM}_2$: $a + c + 2d\mu = 0$.
1^{er} cas : $a + c \neq 0$ Δ passe par $(0, -\dfrac{2d}{a+c})$;
$2^{\text{ième}}$ cas $a + c = 0$ $\overrightarrow{\Delta} \perp \overrightarrow{i}$ c'est le cas d'une hyperbole équilatère où les droites Δ sont toutes parallèles.

Solution 3.2.2 Notons y_1 et y_2 les ordonnées de M et N ; on a : $y_1y_2 = -2ap$. Soit $I\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ alors, le cercle MNO s'écrit $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$. $(C) \cap (\mathcal{P})$ est donné par $y^3 + 4p^2\left(1 - \dfrac{\alpha}{p}\right)y - 2\beta(4p^2) = 0$ et comme $y_1y_2 = -2ap$ (et $y_1 + y_2 = \dfrac{4\beta p}{a}$) on a $\beta^2 = \dfrac{a^2}{8p}(2\alpha - a - 2p)$. I décrit une parabole ; M et N existent ssi $\dfrac{2\beta^2 p}{a^2} + a > 0$. Si $a > 0$, I décrit toute la parabole, si $a < 0$ $\beta^2 \geqslant -\dfrac{a^3}{2p}$: on a 2 branches de parabole.

Solution 3.2.3 Si $F(a, b)$ est le foyer de $(\mathcal{P})$ tangente à Ox et à Oy, la tangente au sommet de $(\mathcal{P})$ est $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ et la directrice : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$ donc $(\mathcal{P})$ s'écrit $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \dfrac{(bx+ay)^2}{a^2+b^2}$ d'où l'équation du lieu cherché : $(1-a)^2 + (1-b)^2 = \dfrac{(b+a)^2}{a^2+b^2}$.

En passant alors en polaires, on obtient $r = \sqrt{2}(\cos(\theta - \pi/4) \pm 1)$ ce qui représente une cardioïde.

Solution 3.2.4 On écrit les équation en polaires

$$(C)\ :\ r = \frac{p}{1 + e\cos\theta},\quad D\ :\ r = \frac{p}{e\cos\theta},\quad (\Gamma)\ :\ r = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta.$$

- $(C) \cap (\Gamma)$: $\cos\theta = \dfrac{p-r}{er}$, $\sin\theta = \dfrac{1}{\beta}\left(r - \alpha\dfrac{p-r}{er}\right)$; on élimine θ entre ces deux équations d'où
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow (er^2 + \alpha r - \alpha p)^2 - \beta^2(e^2r^2 - r^2 + 2pr - p^2) = 0$$
équation du $4^{\text{ième}}$ degré et le produit des racines vaut :
$$\frac{(\alpha^2+\beta^2)p^2}{e^2} = OM_1.OM_2.OM_3.OM_4.$$
- $D \cap (\Gamma)$: $\cos\theta = \dfrac{p}{er}$, $\sin\theta = \dfrac{1}{\beta}\left(r - \alpha\dfrac{p}{er}\right)$ et, en éliminant θ entre ces deux équations :
$$(er^2 - \alpha p)^2 - \beta^2(e^2r^2 - p^2) = 0$$
équation bicarrée et donc, le carré du produit des racines positives vaut : $\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)p^2}{e^2} = OP_1^2.OP_2^2$.

Conclusion : on a bien l'égalité demandée.

Solution 3.2.5 Avec $X = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ et $Y = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$, on a

$$(1+\lambda)(x^2+y^2) + 2(1-\lambda)xy = (x+y)^2 + \lambda(x-y)^2 = 2X^2 + 2\lambda Y^2$$

- $\lambda = 0$: parabole de sommet $S\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$ d'axe $x+y=1$, de paramètre $p = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, de foyer $F\begin{pmatrix}1/4\\1/4\end{pmatrix}$ et de directrice : $y = x + \dfrac{1}{2}$.
- $\lambda \neq 0$ (C_λ) : $\dfrac{(X-1/\sqrt{2})^2}{1/(2\lambda)} + \dfrac{(Y-1/(\lambda\sqrt{2}))^2}{1/(2\lambda^2)} = 1$ conique de centre $\Omega_\lambda\begin{pmatrix}(\lambda-1)/2\\(\lambda+1)/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, de foyers : $\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda-1-\varepsilon\sqrt{|1-\lambda|}}{2\lambda}\\ \dfrac{\lambda+1+\varepsilon\sqrt{|1-\lambda|}}{2\lambda}\end{pmatrix}$ $\varepsilon = \pm 1$
- $\lambda = 1$: cercle de rayon $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
- $0 < \lambda < 1$: $\alpha = 1$, $1 < \lambda$: $\alpha = -1$ et $e = \sqrt{1-\lambda^\alpha}$.
- $\lambda < 0$ hyperbole.

Solution 3.2.6

(1) On exprime que $\lambda D_\alpha + \mu D_\beta$ (qui représente l'ensemble des droites passant par le point C intersection de $D_\alpha \cap D_\beta$) est orthogonal à D_γ : $\lambda = 1 + \gamma\beta$, $\mu = -(1+\alpha\gamma)$ d'où l'équation de la hauteur issue de C

$$-\gamma x + y = a(\alpha + \beta + \alpha\beta\gamma)$$

et par symétrie on a l'équation de la hauteur issue de B : $-\beta x + y = a(\alpha+\gamma+\alpha\beta\gamma)$ ce qui donne les coordonnées de l'orthocentre :

$$x = a,\ y = a(\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma).$$

(2) D_t est bien l'équation de la tangente au point $M_t \in (P)$ de coordonnées : $\begin{pmatrix}-at^2\\2at\end{pmatrix}$.

(3) On a ainsi prouvé que l'ensemble des orthocentres des triangles formés par trois tangentes distinctes à la parabole $y^2 = -4ax$ est contenu dans la droite d'équation $x = a$. Or, en prenant $\gamma = 0$ et en faisant varier α dans $\mathbb{R}$, on obtient toute la droite $(y = a(\alpha+\beta))$.
Conclusion : comme toutes les paraboles se déduisent l'une de l'autre par similitude alors on peut énoncer une propriété encore plus générale

l'ensemble des orthocentres des triangles formés par trois tangentes distinctes à une parabole est la directrice.
