NOMBRES RÉELS, SUITES ET FONCTIONS (R)

1. Suites de nombres réels

1.1. Corps des réels.

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $(a_i, b_i)_{i\in[1,n]}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ vérifiant :

$$\forall i \in [1, n], 0 < m \leqslant \frac{b_i}{a_i} \leqslant M.$$

Montrer les inégalités :

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2 + mM \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 \leqslant (m + M) \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$(2) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $(a_\alpha)_{\alpha\in A}, (b_\alpha)_{\alpha\in A}$ 2 familles de réels, montrer que :

$$|\sup_{\alpha\in A} a_\alpha - \sup_{\alpha\in A} b_\alpha| \leqslant \sup_{\alpha\in A} |a_\alpha - b_\alpha|.$$

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{I C}}$
Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$: $G \neq \{0\}$. On pose $a = \inf\{x \in G \ : x > 0\}$.
Montrer que si $a > 0$ alors $a \in G$ et $G = a\mathbb{Z}$; puis si $a = 0$, montrer alors que G est dense dans $\mathbb{R}$.
Applications :

(i) soit $D = \{x \in \mathbb{Q}_+ | x \text{ et } \frac{1}{x} \text{ soient décimaux }\}$. Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}_+$.

(ii) Si $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, montrer que : $\{n\frac{\alpha}{2\pi} - [n\frac{\alpha}{2\pi}], n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans [0,1]. En déduire que $e^{i\alpha n}$ est dense dans $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et que $\{\sin(n\alpha), n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans [-1,+1].

Exercice 1.1.4. $\boxed{\textbf{F C}}$
Si $(a_i)_{i\in[1,n]} \in \mathbb{R}^n$ et $(b_i)_{i\in[1,n]} \in \mathbb{R}^n$, montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \text{ puis que } : \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Exercice 1.1.5. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient a, b, c, d 4 réels, montrer l'équivalence

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - da = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d.$$

EXERCICE 1.1.6. **F**

Soit $a \geqslant b \geqslant 0$, simplifier l'expression

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-b}.\sqrt{b}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-b}.\sqrt{b}}.$$

EXERCICE 1.1.7. **F**

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre les deux entiers $a = E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right)$ et $b = E(x)$.

EXERCICE 1.1.8. **F**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer les inégalités

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}.$$

En déduire la partie entière de

$$x = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right).$$

EXERCICE 1.1.9. **I**

Soit $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ et $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$ des réels, en étudiant la somme $S = \sum\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$ montrer que

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

EXERCICE 1.1.10. **I**

Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)| = |x-y|.$$

1.2. **Suites réelles.**

EXERCICE 1.2.1. **I C**

(1) Montrer que si : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(u_1+\cdots+u_n) = l$. Étudier la réciproque.
(2) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l_2$, chercher $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}(u_0v_n+\cdots+u_nv_0)$.
(3) Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_{n+1}-w_n) = l$ montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{w_n}{n} = l \text{ puis que : } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}(w_1+\cdots+w_n) = \frac{l}{2}.$$

(4) Avec les hypothèses du 1, la suite $x_n = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} iu_i$ converge-t-elle?

EXERCICE 1.2.2. **D**

Soit $(x_n) \in \mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}}$, on définit y_n par :

$$y_n = \sqrt{x_0 + \sqrt{x_1 + \cdots + \sqrt{x_n}}}.$$

(1) Si $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2$, montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 2$.

(2) Si $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2\lambda^{2^{n+1}}$, montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 2\lambda$ (se ramener au a).

(3) Montrer que y_n est convergente dans les 3 cas suivants :

$$x_n = n, \quad x_n = n!, \quad x_n = n^n$$

(trouver un majorant de y_n).

(4) Construire une suite (x_n) telle que $y_n \to +\infty$.

EXERCICE 1.2.3. **F**

On appelle suite homographique toute suite récurrente définie par une relation

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

avec $ad - bc \neq 0$. On pose $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ et on suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $cu_n + d \neq 0$.

(1) Si l'équation $f(x) = x$ a deux racines distinctes (réelles ou complexes) l_1, l_2, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que

$$\frac{u_{n+1} - l_1}{u_{n+1} - l_2} = k\frac{u_n - l_1}{u_n - l_2}.$$

(2) Si l'équation $f(x) = x$ a une racine double l, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{u_{n+1} - l} = k + \frac{1}{u_n - l}.$$

(3) Application : étudier les suites suivantes

$$u_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}, \quad u_0 \neq -1,\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}.$$

EXERCICE 1.2.4. **F C**

On appelle suite récurrence double (à coefficients dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une suite définie par la donnée de u_0, u_1 et la relation de récurrence

(1) $$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{C}^2.$$

(1) On appelle E le sous-espace vectoriel des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant (1). Montrer que $\dim E = 2$.

(2) On appelle résolvante de E l'équation $r^2 = ar + b$. (2)

a) Montrer que, si (2) a deux racines distinctes r_1 et r_2 alors toute suite de E s'écrit $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ (où λ et μ sont indépendants de n).

b) Montrer que, si (2) a une racine double r alors toute suite de E s'écrit $u_n = (\lambda n + \mu)r^n$.

(3) Application : étudier les suites suivantes

a)$u_{n+2} = 2k\cos\theta u_{n+1} - k^2 u_n,\ u_0 = 1, u_1 = k\cos\theta$. b)$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + (n+1)^2,\ (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 1.2.5. **D C**

(1) Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$, on définit u, v, w par $\frac{2}{u} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $v = \sqrt{ab}$, $w = \frac{a+b}{2}$. Comparer u, v, w.

(2) Soient a, b, c dans $\mathbb{R}_+^*$, u_1, v_1, w_1 définis par $\frac{3}{u_1} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, $v_1 = \sqrt[3]{abc}$, $w_1 = \frac{a+b+c}{3}$.
Comparer u_1, v_1, w_1.
Montrer que les trois suites (u_n), (v_n), (w_n) définies par $\frac{3}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}$, $v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n}$, $w_{n+1} = \frac{u_n+v_n+w_n}{3}$ convergent et ont même limite.

Exercice 1.2.6. **I**

On veut étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \geqslant 0$, $u_1 \geqslant 0$, $(u_0, u_1) \neq (0,0)$ et

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}.$$

(1) Trouver les 2 limites éventuelles.
On suppose que pour tout $n \geqslant 2$ on a $u_n \in]0,1[$.
Montrer que c'est impossible et qu'il n'y a en fait qu'une seule limite possible.

(2) On pose $w_n = \frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1$.
Trouver la relation de récurrence entre w_{n+2}, w_{n+1} et w_n.
En déduire qu'à partir d'un certain rang p on a, pour $n \geqslant p$: $2 + w_{n+2} \geqslant \frac{3}{2}$.
Montrer alors que $|w_{n+2}| \leqslant \frac{1}{3}(|w_{n+1} + |w_n|)$.

(3) Soit $x_n = |w_n|$. Étudier la limite de la suite (x_n). En déduire la limite de (u_n).

Exercice 1.2.7. **F**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels qui convergent respectivement vers u et v.
Montrer que les suites (M_n) et (m_n) définies par $M_n = \max(u_n, v_n)$ et $m_n = \min(u_n, v_n)$ convergent.

Exercice 1.2.8. **I**

Soit (u_n) une suite de réels bornée telle que

$$\forall n,\ u_n - \frac{u_{3n}}{3} = 1.$$

(1) Montrer que si cette suite converge alors sa limite est $\frac{3}{2}$.

(2) On pose $v_n = u_{3n} - \frac{3}{2}$, en étudiant la suite v_n, montrer que la suite (u_n) est stationnaire.

Exercice 1.2.9. **F**

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que si cette suite est convergente alors elle est stationnaire.

Exercice 1.2.10. **I**
Soit (u_n) une suite bornée telle que la suite $v_n = u_{n+1} - u_n$ soit monotone.
Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 1.2.11. **I**
Soit $u_0 \in \mathbb{R}$, on définit alors la suite (u_n) par la relation de récurrence

$$u_{n+1} - (n+1)u_n = 2^n(n+1)!.$$

(1) Résoudre la récurrence $v_{n+1} = (n+1)v_n$.
(2) Trouver la relation de récurrence satisfaite par la suite w_n où on a posé $u_n = w_n.n!$. En déduire l'expression des termes de la suite u_n.
(3) À l'aide d'une méthode semblable, résoudre la récurrence $u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 3^{n^2}$.

---

2. Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

2.1.

Exercice 2.1.1. **F C**
Soit f une fonction croissante de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $]a, b[$.

(1) Montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n}(f(x_k^+) - f(x_k^-)) \leqslant f(b) - f(a)$.
(2) Montrer que, si $p \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble E_p des $x \in]a, b[$ vérifiant : $f(x^+) - f(x^-) > \frac{1}{p}$ est fini ; en déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable (on utilisera le fait qu'une réunion dénombrable d'ensembles finis est dénombrable).

Exercice 2.1.2. **I**
On suppose que la température en un point du globe est une fonction continue des coordonnées géographiques.
Montrer qu'il existe 2 points situés aux antipodes ayant la même température (se ramener à un cercle, puis à une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires).

Exercice 2.1.3. **I C**
Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que : $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{Q}, f(\alpha x) = \alpha f(x)$.
(2) On suppose que f est bornée sur un intervalle ouvert non vide. Montrer qu'il existe alors un intervalle de centre 0 sur lequel f est bornée ; déduire du 1. que f est continue en 0, puis que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que f est linéaire.
(3) Trouver toutes les fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telles que : $f(x + y) = f(x).f(y)$ et telles qu'il existe un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel $\alpha < f(x) < \beta$ où $\alpha > 0$.

Exercice 2.1.4. **I**
Soit f une fonction croissante définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$.
Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que : $f(x) = x$ (si $f(0) \neq 0$, prendre : $\sup\{x \in [0, 1], f(x) > x\}$).

Exercice 2.1.5. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit f une fonction croissante définie sur $[a, b]$ qui prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
Montrer que f est continue sur $[a, b]$.

Exercice 2.1.6. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue en 0 et vérifiant $f(2x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que f est constante.

Exercice 2.1.7. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit f définie sur $]-1, 1[$ telle que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0.$$

En écrivant que $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(\frac{x}{2^{k-1}}) - f(\frac{x}{2^k})\right) + f(\frac{x}{2^n})$, montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 2.1.8. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{-1, 1\} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{2n} + 1}{x^{2n} - 1} & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f.

Exercice 2.1.9. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient $(f, g) \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, g périodique et $f + g$ croissante.
Montrer que g est constante.

1. Indications :

Indication 1.1.1 Se ramener au cas où $a_i \geqslant 0$ et $b_i \geqslant 0$ puis remarquer que $b_1^2 + mMa_i^2 - (m+M)a_ib_i = (b_i - ma_i)(b_i - Ma_i)$. Utiliser ensuite $4AB \leqslant (A+B)^2$.

Indication 1.1.2 Écrire $a_\alpha \leqslant b_\alpha + |a_\alpha - b_\alpha|$ puis passer aux bornes supérieures, faire la même chose avec $(b_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Indication 1.1.3 Si $a > 0$ alors utiliser la caractérisation de la borne inférieure et la division euclidienne pour montrer que $G = a\mathbb{Z}$. Si $a = 0$ alors montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

(*i*) $D = \{2^\alpha 5^\beta, (\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2\}$ et montrer que $\ln D = \{\ln x, x \in D\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(*ii*) Si $i = \frac{\alpha}{2\pi}$ alors $i\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication 1.1.4 Poser $\phi(t) = \sum\limits_{i=1}^{n}(a_i + tb_i)^2$ et développer.

Indication 1.1.5 Considérer l'expression comme un trinôme du second degré en a.

Indication 1.1.6 On trouve $\sqrt{a + 2\sqrt{a-b}.\sqrt{b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-b}.\sqrt{b}} = 2\sqrt{\max(a-b,b}.$

Indication 1.1.7 $a = b$...

Indication 1.1.8 Écrire que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ puis faire la somme des inégalités obtenues pour n variant de 1 à 10000 d'où $x = 99$.

Indication 1.1.9 Développer les termes de la somme.

Indication 1.1.10 En posant $f(0) = \alpha$ on trouve $f(x) = \alpha + \varepsilon_x x$ où $\varepsilon_x \in \{-1, 1\}$ dépend de x et on montre que ε_x ne dépend pas de x.

Indication 1.2.1

(1) Se ramener au cas où la limite est nulle puis couper la somme en 2. La réciproque est fausse.
(2) Écrire $u_pv_{n-p} - l_1l_2 = (u_p - l_1)v_{n-p} + l_1(v_{n-p} - l_2)$ et appliquer Césaro pour conclure.
(3) Écrire $w_n = (w_n - w_{n-1}) + \cdots + (w_1 - w_0) + w_0$ puis écrire $w_n = ln + \varepsilon(n)$. Utiliser alors que $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{ni}$ et Césaro.
(4) Poser $v_n = nu_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n} = l$ et utiliser le 3.

Indication 1.2.2

(1) On a $y_{n+1} = \sqrt{2 + y_n}$.
(2) $y_n = \lambda\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}.$
(3) $x_n = n$: $(y_n) \nearrow$ et $y_n \leqslant 4$ donc (y_n) est convergente.
$x_n = n!$: $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 2^{2^n}$ d'où $y_n \leqslant 4$ donc (y_n) converge.
$x_n = n^n$: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = (n+1)(\frac{n+1}{n})^n \leqslant e(n+1) \leqslant 2^{2^n}$.
(4) Prendre $x_n = n^{2^{n+1}}$.

Indication 1.2.3

(1) Montrer que $f(y) - f(x) = \frac{(ad-bc)(y-x)}{(cy+d)(cx+d)}$.
(2) On trouve $\frac{1}{u_{n+1}-l} = \frac{2c}{a+d} + \frac{1}{u_n-l}$.
(3)
- Vérifier que la suite (u_n) est bien définie, on trouve ensuite que $\frac{u_n-l_1}{u_n-l_2} = k^n\frac{u_0-l_1}{u_0-l_2}$ où $k = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
- Supposer que tous les termes de la suite (u_n) sont définis, on obtient alors $\frac{1}{u_n-1} = \frac{n}{2} + \frac{1}{u_0-1}$.

Indication 1.2.4

(1) Vérifier que les suites (u_n) et (v_n) de E définies par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ forment une base de E.

(2) Les suites (r_1^n) et (r_2^n) ou (nr^n) et (r^n) forment une base de E.
(3) a) On est dans le premier cas, on trouve $u_n = k^n \cos n\theta$
b) L'ensemble des solutions s'écrit $u_n = \frac{n^4-n^2}{12} + \lambda n + \mu$.

Indication 1.2.5

(1) Remarquer que $u = \dfrac{v^2}{w}$ et en conclure que $u \leqslant v \leqslant w$.
(2) Par convexité, prouver que $v_1 \leqslant w_1$, faire de même pour prouver que $u_1 \leqslant v_1$ (en prenant les inverses.
Montrer alors que (u_n) et (w_n) convergent et conclure.

Indication 1.2.6

(1) On a immédiatement $l = 0$ et $l = 4$ comme seules limites possibles.
Si $u_n \in]0,1[$ alors montrer que la suite (u_n) est croissante (à partir du rang 4) majorée par 1.
(2) On a $w_{n+2} = \frac{w_{n+1}+w_n}{2(2+w_{n+2})}$.
Montrer qu'il existe p tel que $u_p \geqslant 1$ et en déduire que que $u_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant p+2$.
(3) Montrer par récurrence que $x_n \leqslant ar^n$ pour $n \geqslant p$ avec $r^2 = \frac{2}{3}$ et $a = \max\left(\frac{x_p}{r^p}, \frac{x_{p+1}}{r^{p+1}}\right)$.

Indication 1.2.7 Utiliser la formule $\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}|a-b|$.

Indication 1.2.8 Le premier point est immédiat, pour le deuxième, prouver que $u_{3^k n} - \frac{3}{2} = 3^k(u_n - \frac{3}{2})$.

Indication 1.2.9 Il existe N tel que $n \geqslant N$ entraîne $|u_n - u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}$.

Indication 1.2.10 Supposer que $(v_n) \nearrow$ puis distinguer les cas $v_n \leqslant 0$ et $v_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Indication 1.2.11 On trouve $v_n = n! v_0$ puis $u_n = (u_0 + 2^n - 1)n!$ et finalement on obtient $u_n = \left[u_0 + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right] 3^{n(n-1)}$.

Indication 2.1.1

(1) En additionnant des inégalités on a $\sum_{k=1}^n (f(x_k^+) - f(x_k^-)) \leqslant f(\frac{b+x_n}{2}) - f(\frac{a+x_1}{2}) \leqslant f(b) - f(a)$.
(2) E_p est fini par l'absurde, on utilise ensuite le fait qu'une réunion dénombrable d'ensembles finis est dénombrable.

Indication 2.1.2 2 points aux antipodes sont situés sur un même grand cercle, utiliser alors le théorème des valeurs intermédiaires.

Indication 2.1.3

(1) par récurrence sur n on a $f(nx) = nf(x)$ et enfin $qf(\frac{px}{q}) = pf(x)$.
(2) Supposons f bornée sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ par M, se ramener en 0 et prouver que f est continue.
(3) Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}$ et prendre le logarithme.

Indication 2.1.4 Soit $y = \sup\{x \in [0,1], f(x) > x\}$ montrer que $f(y) \geqslant f(y^-) \geqslant y$ puis distinguer les cas $y = 1$ et $y < 1$.

Indication 2.1.5 Raisonner par l'absurde.

Indication 2.1.6 Montrer que $f(x) = f(\frac{x}{2^k})$.

Indication 2.1.7 Utiliser une méthode semblable à la démonstration du théorème de Césaro et écrire $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|f(\frac{x}{2^N})\right| + \sum_{k=1}^N \frac{2^k}{|x|}\left[f(\frac{x}{2^{k-1}}) - f(\frac{x}{2^k})\right|$.

Indication 2.1.8 Les points de discontinuité de f sont 1 et -1.

Indication 2.1.9 Si $p > 0$ est une période de g, $x \leqslant y$ 2 réels montrer que $(f+g)(y+np) = f(y+np) + g(y) \leqslant (f+g)(x+np+Np) = f(x+np+Np) + g(x)$ et prendre la limite quand $n \to +\infty$.

1. Solutions

Solution 1.1.1 On se ramène au cas où a_i et b_i sont positifs (en effet, a_i et b_i sont de même signe), puis on remarque que :

$$b_1^2 + mMa_i^2 - (m+M)a_ib_i = (b_i - ma_i)(b_i - Ma_i) \leqslant 0.$$

On obtient (1) en additionnant les n inégalités.
On sait que $4AB \leqslant (A+B)^2$ donc en prenant $A = mM\sum_{i=1}^n {a_i}^2$ et $B = \sum_{i=1}^n {b_i}^2$ et en élevant (1) au carré, on trouve (2) qui est une inégalité comparable à celle de Cauchy-Schwarz mais dans l'autre sens.

Solution 1.1.2 On écrit : $a_\alpha \leqslant b_\alpha + |a_\alpha - b_\alpha|$. D'où : $a_\alpha \leqslant \sup_{\alpha\in A} b_\alpha + \sup_{\alpha\in A} |a_\alpha - b_\alpha| = M$. M est donc un majorant de l'ensemble des $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ donc, la borne supérieure étant le plus petit des majorants, on en déduit que

$$\sup_{\alpha\in A} a_\alpha \leqslant \sup_{\alpha\in A} b_\alpha + \sup_{\alpha\in A} |a_\alpha - b_\alpha|$$

et en faisant la même chose avec $(b_\alpha)_{\alpha\in A}$ on obtient

$$-\sup_{\alpha\in A} |a_\alpha - b_\alpha| \leqslant \sup_{\alpha\in A} a_\alpha - \sup_{\alpha\in A} b_\alpha \leqslant \sup_{\alpha\in A} |a_\alpha - b_\alpha|$$

qui fournit le résultat demandé.

Remarques :

(i) On a ici utilisé le fait que tout ensemble borné de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (cf théorème de la borne supérieure page 50).

(ii) Comme pour tous les raisonnements utilisant les bornes supérieures, il est important de préciser clairement l'ordre des arguments utilisés pour faire la démonstration.

Solution 1.1.3 Si $a > 0$ alors on sait que : $\exists x \in [a, \frac{3a}{2}[\cap G$. Si x est unique alors $x = a$, sinon, on a $a \leqslant x' < x < \frac{3a}{2}$ et $x - x' \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ ce qui est impossible. Puis, si $x \in G$, on peut écrire : $x = na + r$ où $0 \leqslant r < a$ et $n \in \mathbb{Z}$. Comme $r \in G$ on a : $r = 0$.
Si $a = 0$ alors : $\forall\varepsilon, \exists x \in G\ : 0 < x < \varepsilon$ et pour $y \in \mathbb{R}$, en prenant $n = \left[\dfrac{y}{x}\right]$ alors $n \leqslant \dfrac{y}{x} < n+1$ donc $nx \leqslant y < (n+1)x < nx + \varepsilon$. Comme $nx \in G$ on en déduit que G est dense dans $\mathbb{R}$.

(i) $D = \{2^\alpha 5^\beta, (\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2\}$ si $\ln D = \{\ln x, x \in D\}$ alors : $\ln D = \ln 2\mathbb{Z} + \ln 5\mathbb{Z}$ sous-groupe de $\mathbb{R}$ donc : $\overline{\ln D} = \mathbb{R}$ i.e. $\overline{D} = \mathbb{R}_+$.

(ii) On pose : $i = \frac{\alpha}{2\pi}$ alors $i\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $(i\mathbb{Z} + \mathbb{Z}) \cap [0, 1[= \{ni - [ni], n \in \mathbb{Z}\}$. Soit $H = \{e^{in\alpha}, n \in \mathbb{Z}\}$ et $f\ : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ix} \in \mathbb{U}$ alors $f^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et compte tenu du résultat précédent, c'est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$ i.e. $\overline{f^{-1}(H)} = \mathbb{R}$. Comme $\overline{f^{-1}(H)} \subset f^{-1}(\overline{H}) = \mathbb{R}$. Or f étant surjective, on a $\overline{H} = f(f^{-1}(\overline{H}))$ donc $\overline{H} = f(\mathbb{R}) = \mathbb{U}$.
Et enfin, $\sin n\alpha = \Im(e^{in\alpha})$, ce qui permet de conclure.

Solution 1.1.4 On prend $\phi(t) = \sum\limits_{i=1}^n (a_i + tb_i)^2 \geqslant 0$: on a un trinôme du second degré toujours positif $\Rightarrow \Delta \leqslant 0$, d'où la première inégalité. L'autre inégalité est immédiate.
En fait, c'est la même démonstration que celle que l'on peut faire en algèbre (cf proposition 4.3.1 page 212).

Solution 1.1.5 On considère cette expression comme un trinôme du second degré en a. On a l'égalité

$$a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-da=\left(a-\frac{b+d}{2}\right)^2+c^2-c(b+d)+\frac{3}{4}(b^2+d^2)-\frac{bd}{2}$$

puis on fait de même avec le reste en le considérant comme un trinôme du second degré en c et on obtient finalement l'égalité

$$a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-da=\left(a-\frac{b+d}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b+d}{2}\right)^2+\frac{(b-d)^2}{2}.$$

L'équivalence est alors immédiate.
Remarque : on pouvait aussi développer la somme $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2$...

Solution 1.1.6 Les quantités sous les radicaux sont des carrés parfait, on obtient le résultat suivant (en distinguant les différents cas) :

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-b}.\sqrt{b}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-b}.\sqrt{b}}=2\sqrt{\max(a-b,b}.$$

Solution 1.1.7 Comme $nE(x)\leqslant nx<nE(x)+n$ on en déduit que $nE(x)\leqslant E(nx)<nE(x)+n$. On divise alors par n pour trouver $a=b$.

Solution 1.1.8 On a $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ et on fait de même avec le membre de droite.
On fait ensuite la somme des inégalités obtenues pour n variant de 1 à 10000 d'où

$$\sqrt{10001}-1<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right)<\sqrt{10000}$$

D'où, finalement $E\left(\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{10000}}\right)\right)=99.$

Solution 1.1.9 En développant les termes de la somme, on obtient $S=2n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)$ et comme $S\geqslant 0$ (tous les termes sont positifs) on peut conclure.

Solution 1.1.10 Posons $f(0)=\alpha$ alors $|f(x)-\alpha|=|x|$ soit $f(x)=\alpha+\varepsilon_x x$ où $\varepsilon_x\in\{-1,1\}$ dépend de x.
Comme f est continue (immédiat) $x\mapsto\varepsilon_x$ est continue sauf peut-être en 0. Grâce au T.V.I. on peut dire que ε_x est constant sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
Ce qu'on a fait en 0 est en fait valable pour tout point $a\in\mathbb{R}$ donc ε_x est constant sur $\mathbb{R}$.
Conclusion : $f(x)=\alpha+\varepsilon x$ où $\varepsilon\in\{-1,1\}$.

Solution 1.2.1

(1) Avec $v_n=u_n-l$, on se ramène au cas où la limite est nulle ; puis, en traduisant la limite nulle de la suite (v_n) :

$$\exists N\in\mathbb{N},\forall p\leqslant N\ :|v_p|<\varepsilon/2$$

d'où si $n \leqslant N$:

$$|\frac{1}{n}(v_1 + \cdots + v_n)| \leqslant \frac{1}{n}|v_1 + \cdots + v_N| + \varepsilon/2$$

et on prend n suffisamment grand pour que : $\frac{1}{n}|v_1 + \cdots + v_N| < \varepsilon/2$; on a alors

$$\forall n \geqslant N,\ |\frac{1}{n}(v_1 + \cdots + v_n)| \leqslant \varepsilon.$$

soit $\frac{1}{n}(v_1 + \cdots v_n) \to 0$.

La réciproque est fausse, il suffit de prendre le contre-exemple : $u_n = (-1)^n$.

(2) On écrit que : $u_p v_{n-p} - l_1 l_2 = (u_p - l_1)v_{n-p} + l_1(v_{n-p} - l_2)$. On a alors

$$\frac{1}{n+1}\left|\sum_{p=0}^{n}(u_p v_{n-p} - l_1 l_2)\right| \leqslant M\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}|u_p - l_1| + |l_1|\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}|v_{n-p} - l_2|$$

où M désigne un majorant de la suite $(|v_n|)$. On applique alors Césaro pour conclure. On peut aussi se ramener au cas où $l = 0$ en écrivant

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}(u_p - l_1)v_{n-p}}_{\to 0} = \underbrace{\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}u_p v_{n-p}}_{\Rightarrow \to l_1 l_2} - \underbrace{l_1\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}v_{n-p}}_{\to l_1 l_2}$$

en utilisant le résultat du 1.

(3) On a : $w_n = (w_n - w_{n-1}) + \cdots + (w_1 - w_0) + w_0$, le 1. donne le premier résultat. $w_n = ln + n\varepsilon(n)$ d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}(w_1 + \cdots + w_n) &= \frac{1}{n^2}\left(l\frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n}k\varepsilon(k)\right)\\ &= \underbrace{\frac{l}{2}\frac{n+1}{n}}_{\to l/2} + \underbrace{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\varepsilon(k)}_{=\alpha_n}\end{aligned}$$

Or $|\alpha_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}|\varepsilon(k) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\varepsilon(k)$ qui tend vers 0 toujours grâce à Césaro.

Conclusion : on a bien $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}(w_1 + \cdots + w_n) = \frac{l}{2}$.

(4) On pose $v_n = nu_n$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n} = l$ et, en utilisant le 3, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}v_i = \frac{l}{2}.$$

Remarque : cette notion (la convergence au sens de Césaro) est très importante bien qu'elle ne figure pas explicitement au programme.

Solution 1.2.2

(1) Si $x_n = 2$ alors on a $y_{n+1} = \sqrt{2 + y_n}$ d'où, en montrant que la suite (y_n) est croissante et majorée (et on utilise le théorème 3.10 page 55) on obtient que la suite (y_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} y_n = 2$.

(2) $x_{n-1} + \sqrt{x_n} = \lambda^{2^n}(2 + \sqrt{2})$ d'où, par récurrence, $y_n = \lambda\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$ et, en conclusion (en utilisant le résultat précédent) $\lim_{n\to+\infty} y_n = 2\lambda$.

(3) • $x_n = n$: comme $(y_n) \nearrow$ et que : $n \leqslant v_n = 2.2^{2^{n+1}}$ alors $y_n \leqslant 4$ et donc (y_n) est convergente.
• $x_n = n!$: ici, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 2^{2^n} = \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et comme $x_0 \leqslant v_0$, on a aussi $x_n \leqslant v_n$ donc $y_n \leqslant 4$ et (y_n) converge.
• $x_n = n^n$, on a : $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = (n+1)(\frac{n+1}{n})^n \leqslant e(n+1) \leqslant 2^{2^n}$ et $x_0 \leqslant v_0$...

(4) On prend : $x_n = n^{2^{n+1}}$ alors $y_n \geqslant (x_n)^{2^{-(n+1)}} = n \to +\infty$ donc $y_n \to +\infty$.

Solution 1.2.3

(1) Après un calcul simple, on a
$$f(y) - f(x) = \frac{(ad-bc)(y-x)}{(cy+d)(cx+d)}$$
et en appliquant cette relation au rapport
$$\frac{u_{n+1}-l_1}{u_{n+1}-l_2} = \frac{f(u_n)-l_1}{f(u_n)-l_2}$$
on a : $\dfrac{u_{n+1}-l_1}{u_{n+1}-l_2} = k\dfrac{u_n-l_1}{u_n-l_2}$ où $k = \dfrac{cl_2+d}{cl_1+d}$.

(2) Dans le deuxième cas, on a $\Delta = (a-d)^2 + 4bc = 0$ (car on a une racine double) et cette racine vaut $l = \dfrac{a-d}{2c}$. On vérifie alors que $ad - bc = \dfrac{(a+d)^2}{4}$ et $cl + d = \dfrac{a+d}{2}$ d'où
$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}-l} &= \frac{(cl+d)(cu_n+d)}{(ad-bc)(u_n-l)}\\ &= \frac{2}{a+d}\frac{c(u_n-l)+cl+d}{u_n-l}\\ &= \frac{2c}{a+d} + \frac{1}{u_n-l}\end{aligned}$$

(3) • Première suite : on vérifie tout d'abord que la suite (u_n) est bien définie, en effet les u_n sont tous > 0.
$f(x) = x$ admet les solutions $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ et la récurrence se résout de la manière suivante :
$$\frac{u_n-l_1}{u_n-l_2} = k^n\frac{u_0-l_1}{u_0-l_2}$$
avec $l_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $l_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. On a $k = \dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$, $|k| < 1$ donc $\dfrac{u_n-l_1}{u_n-l_2} \to 0$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (ce qui semble normal vu que $l_1 > 0$ et $l_2 < 0$).
• Deuxième suite : on suppose ici que tous les termes de la suite (u_n) sont définis (en effet, si $u_0 = 0$ alors $u_1 = -1$ et u_2 n'est pas défini). 1 est racine double donc
$$\frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n-1}$$
et la récurrence se résout immédiatement, $\dfrac{1}{u_n-1} = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{u_0-1}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Remarques :

(i) Il est plus naturel de raisonner dans $\overline{\mathbb{R}}$ la droite réelle achevée (cf définition 3.1.2 page 50) et si $u_n = -\dfrac{d}{c}$ alors $u_{n+1} = \infty$, $u_{n+2} = \dfrac{a}{c}$...

(ii) On peut préférer une présentation matricielle en écrivant $u_n = \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ où les suites (α_n) et (β_n) vérifient

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 = u_0,\ \beta_0 = 1$$

et le problème se ramène au calcul de A^n où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Solution 1.2.4

(1) Il est facile de vérifier que les suites (u_n) et (v_n) de E définies par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ forment une base de E :

l'application φ qui va de $\mathbb{K}^2$ dans E, qui à un couple (α, β) fait correspondre l'unique suite (u_n) de E vérifiant $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^2$ sur E.

(2) a) Les suites (r_1^n) et (r_2^n) forment une base de E, toute suite (u_n) s'exprime dans cette base.

b) C'est la même chose mais avec les suites (nr^n) et (r^n).

(3) a) On est dans le premier cas, on trouve $u_n = k^n \cos n\theta$

b) On a une relation affine, on cherche une solution particulière, $v_n = \dfrac{n^4 - n^2}{12}$. Les suites solutions de l'équation homogène $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ (on est dans le deuxième cas) sont de la forme $\lambda n + \mu$ donc l'ensemble des solutions s'écrit

$$u_n = \frac{n^4 - n^2}{12} + \lambda n + \mu.$$

Solution 1.2.5

(1) On a $u = \dfrac{v^2}{w}$ donc, comme $v \leqslant u$ (immédiat), on a $u \leqslant v \leqslant w$.

(2) On a $u_1 \leqslant w_1$ (on réduit au même dénominateur, on développe, on divise par abc et on remarque—par exemple—que $\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} \geqslant 2$) ; on obtient (c'est une inégalité de convexité) $v_1 \leqslant w_1$; ensuite, on a

$$\frac{1}{u_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = \frac{1}{v_1}$$

donc $u_1 \leqslant v_1$.

On aura alors (par une récurrence immédiate) $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour $n \geqslant 1$. La suite (u_n) est croissante et majorée par w_1, la suite (w_n) est décroissante et minorée par u_1, ces deux suites sont donc convergentes, il en est alors de même pour (v_n) (on utilise la relation $w_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n + w_n}{3}$ qui donne $v_n = 3w_{n+1} - u_n - v_n$). Soit u, w, v leurs limites respectives. On a $u \leqslant v \leqslant w$ et $w = \dfrac{u + v + w}{3}$ ce qui nous permet d'affirmer qu'il y a égalité (on a $(w - u) + (w - v) = 0$ avec $w - u \geqslant 0$ et $w - v \geqslant 0$).

Remarque : on peut prouver aussi que $w_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{3}(w_n - u_n)$ donc $w_n - u_n$ tend vers 0.

Solution 1.2.6

(1)
- On a immédiatement $l = 0$ et $l = 4$ comme seules limites possibles.
- Si $u_n \in]0, 1[$ alors $u_{n+2} - u_{n+1} = \underbrace{\sqrt{u_{n+1}} - u_{n+1}}_{\geqslant 0} + \sqrt{u_n} \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante (à partir du rang 4) majorée par 1, elle est donc convergente. Or sa limite ne peut être qu'un nombre $l \in]0, 1]$ ce qui est impossible.

(2)
- On a $\sqrt{u_n} = 2(w_n + 1)$ donc $4(w_{n+2} + 1)^2 = 2(w_{n+1} + w_n) + 4$ d'où, en développant et en simplifiant par 2, on obtient $w_{n+2} = \dfrac{w_{n+1} + w_n}{2(2 + w_{n+2})}$.
- Compte tenu de la question précédente, on sait que les termes de la suite (u_n) ne sont pas tous dans l'intervalle $]0, 1[$ donc il existe p tel que $u_p \geqslant 1$. Vu la relation de récurrence, on en déduit que $u_{p+2} \geqslant 1$ et par une récurrence immédiate que $u_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant p + 2$.
  On a ainsi $2 + w_{n+2} \geqslant \dfrac{3}{2}$ pour $n \geqslant p$.
  La dernière inégalité est une conséquence immédiate de ce que l'on vient de prouver.

(3) Après une analyse, montrons par récurrence que $x_n \leqslant ar^n$ pour $n \geqslant p$ avec $r^2 = \dfrac{2}{3}$ et $a = \max\left(\dfrac{x_p}{r^p}, \dfrac{x_{p+1}}{r^{p+1}}\right)$.
Cette inégalité est bien vérifiée pour $n = p$ et $n = p + 1$, si maintenant $x_n \leqslant ar^n$ et $x_{n+1} \leqslant ar^{n+1}$ alors

$$x_{n+2} \leqslant \frac{a}{3}(r^{n+1} + r^n) \leqslant \frac{2a}{3}r^n = ar^{n+2}.$$

Conclusion : comme $x_n \geqslant 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Solution 1.2.7 Comme $\max(a, b) = \dfrac{1}{2}(a + b) + \dfrac{1}{2}|a - b|$ alors (M_n) converge, il en est de même de (m_n).

Solution 1.2.8

(1) Immédiat.

(2) Par récurrence sur k on a $u_{3^k n} - \dfrac{3}{2} = 3^k\left(u_n - \dfrac{3}{2}\right)$ et comme la suite (u_n) est bornée, $u_n = \dfrac{3}{3}$ pour tout n.

Solution 1.2.9 La suite $(u_n - u_{n+1})$ converge vers 0 donc il existe N tel que $n \geqslant N$ entraîne $|u_n - u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Comme les termes de la suite (u_n) sont à valeurs entières alors $u_n = u_N$ pour $n \geqslant N$.
Remarque : ceci n'est bien sûr valable que pour les suites à valeurs entières.

Solution 1.2.10 Quitte à changer le signe, on suppose que $(v_n) \nearrow$. (v_n) est bornée et croissante donc elle converge. On distingue alors 2 cas.

- Soit $v_n \leqslant 0$ pour tout n, la suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge.
- Soit $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $v_n > 0$ pour $n \geqslant N$, la suite (u_n) est croissante (à partir du rang N) et majorée donc, là aussi, elle converge.

Solution 1.2.11

(1) On trouve $v_n = n!v_0$.
(2) On a $w_{n+1} - w_n = 2^n$ donc $u_n = (u_0 + 2^n - 1)n!$.
(3) On résout d'abord la récurrence $v_{n+1} = 3^{2n}v_n$ d'où $v_n = 3^{n(n-1)}v_0$ puis on pose $u_n = w_n/3^{-n(n-1)}$, (w_n) vérifie la relation $w_{n+1} - w_n = 3^{-n}$ soit $w_n = w_0 + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.
Finalement on obtient $u_n = \left[u_0 + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right] 3^{n(n-1)}$.

Solution 2.1.1

(1) On a : $f(x_k^-) \geqslant f(\frac{x_{k-1}+x_k}{2})$ et $f(x_k^+) \leqslant f(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})$ (en posant $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$) soit

$$f(x_k^+) - f(x_k^-) \leqslant f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}) - f(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}).$$

D'où en additionnant les inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n}(f(x_k^+) - f(x_k^-)) \leqslant f(\frac{b + x_n}{2}) - f(\frac{a + x_1}{2}) \leqslant f(b) - f(a).$$

(2) E_p est fini grâce à 1. en effet si E_p n'était pas fini, en choisissant n éléments distincts de E_p (formant une subdivision de $]a, b[$) tels que $\frac{n}{p} > f(b) - f(a)$, on arriverait à une contradiction.
Or l'ensemble E des points de discontinuité de f s'écrit :

$$E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} E_p$$

donc E est dénombrable.

Solution 2.1.2 2 points aux antipodes sont situés sur un même grand cercle.
Si f est définie sur le cercle de rayon R, de centre O, on pose : $g(t) = f(Re^{it})$. g est 2π périodique, et en prenant $h(t) = g(t + \pi) - g(t)$ alors : $h(0) = -h(\pi)$ donc le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

Solution 2.1.3

(1) par récurrence sur n : $f(nx) = nf(x)$, puis $f(-x) = -f(x)$ et enfin $qf(\frac{px}{q}) = pf(x)$.
(2) Supposons f bornée sur $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ par M : alors, si $|x| < \alpha$: $f(x) = f(x_0+x)-f(x_0)$ donc $|f(x)| \leqslant 2M$.
Montrons maintenant que f est continue : $\forall\varepsilon, \exists\eta = \frac{\alpha}{4p}$ où $p = [\frac{M}{\varepsilon}]$: $|x| < \eta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ en effet : $|2px| < \alpha \Rightarrow |f(2px)| < M \Rightarrow f(x) < \frac{M}{2p} \leqslant \varepsilon$. On démontre ensuite que f est continue sur $\mathbb{R}$ et on a : $f(\alpha) = \alpha f(1)$ pour $\alpha \in \mathbb{Q}$ le résultat final s'obtient alors par continuité.
(3) On montre que si f est positive sur un intervalle alors f est positive sur $\mathbb{R}$ et on prend le logarithme. On est alors ramené au cas précédent.

Solution 2.1.4 Soit $y = \sup\{x \in [0,1], f(x) > x\}$, si $x_n \to y$ ($x_n < y$) alors à la limite dans $f(x_n) > x_n$ on a : $f(y) \geqslant f(y^-) \geqslant y$.

Si $y = 1, f(1) = 1$ sinon $f(y + \frac{1}{n}) \leqslant y + \frac{1}{n}$ pour n suffisamment grand. À la limite, $n \to +\infty$, on a : $f(y) \leqslant f(y^+) \leqslant y$.

Conclusion :

- si $y = 1$ alors $f(1) = 1$,
- si $y < 1$ alors $y \leqslant f(y) \leqslant y$ donc $f(y) = y$.

Solution 2.1.5 Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que f soit discontinue en α. Comme f est croissante on a $f(a) \leqslant f(\alpha-) < f(\alpha+) \leqslant f(b)$ donc f ne prendrait pas les valeurs comprises entre $f(\alpha-)$ et $f(\alpha+)$ ce qui est impossible.
Si f est discontinue en a, on a $f(a) < f(a+)$ et là encore on obtient une contradiction. Il en est de même en b.

Solution 2.1.6 Par une récurrence immédiate sur k on a $f(x) = f(\frac{x}{2^k}) \to f(0)$ car f est continue en 0. f est bien constante.

Solution 2.1.7 On utilise une méthode semblable à la démonstration du théorème de Césaro.
Si $\varepsilon > 0$ alors il existe $\eta > 0$ tel que $\left|\dfrac{f(2x) - f(x)}{x}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $0 < |x| \leqslant \eta$. On obtient alors

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|f(\frac{x}{2^N})\right| + \sum_{k=1}^{N} \frac{2^k}{|x|} \underbrace{\left[f(\frac{x}{2^{k-1}}) - f(\frac{x}{2^k})\right|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\leqslant \varepsilon$$

car $|x| \leqslant \eta \Rightarrow \dfrac{|x|}{2^k} \leqslant \eta$ et $\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{2^k} \leqslant 1$.

Conclusion : on a bien $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Solution 2.1.8 Immédiat, on a $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| > 1 \\ -1 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$ donc les points de discontinuité de f sont 1 et -1.

Solution 2.1.9 Soit $p > 0$ une période de g, $x \leqslant y$ 2 réels. Il existe N tel que $y \leqslant x + N$ donc, pour tout entier n, on a

$$(f+g)(y+np) = f(y+np) + g(y) \leqslant (f+g)(x+np+Np) = f(x+np+Np) + g(x)$$

soit, en prenant la limite quand $n \to +\infty$, $g(y) \leqslant g(x)$.
On montre de même que $g(x) \leqslant g(y)$ donc g est constante.
