NOMBRES RÉELS, SUITES ET FONCTIONS (R)

1. Suites de nombres réels

1.1. **Corps des réels.**

Exercice 1.1.1. **I C**

Sous-groupes de $\mathbb{R}$.

Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$: $G \neq \{0\}$. On pose $a = \inf\{x \in G \ : x > 0\}$.
Montrer que si $a > 0$ alors $a \in G$ et $G = a\mathbb{Z}$.
Si $a = 0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
Applications :

- (i) si $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, montrer que : $\{n\frac{\alpha}{2\pi} - [n\frac{\alpha}{2\pi}], n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans [0,1]. En déduire que $e^{i\alpha n}$ est dense dans $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et que $\{\sin(n\alpha), n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans [-1,+1].
- (ii) Montrer que $\inf_{\alpha\in]0,\pi[}\left(\sup_{n\in\mathbb{Z}}|\sin n\alpha|\right)$ est égal à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 1.1.2. **I**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$.

Exercice 1.1.3. **I**

Soit $E = \{(\frac{m+n+1}{m+n})^{m+n},\ (m,n) \in \mathbb{N}^{*2}\}$, montrer que E est bornée et trouver ses bornes inférieure et supérieure.

Exercice 1.1.4. **I**

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = E(x)$.
2. En déduire $\lim_{p\to+\infty} E_n(p)$ où $E_n(p) = \sum_{k=0}^{p} E\left(\dfrac{n+2^k}{2^{k+1}}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.1.5. **F**

Soit $n \geqslant 2$ un entier, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n réels. Montrer que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Exercice 1.1.6. **F**

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, montrer les égalités

1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(x^{2^k}+1\right) = \frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$
2. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(x^{2.3^k}+x^{3^k}+1\right) = \frac{x^{3^{n+1}}-1}{x-1}.$

Exercice 1.1.7. **F**
Soient a, b, c 3 réels strictement positifs. On pose $\alpha = a + \frac{1}{b}$, $\beta = b + \frac{1}{c}$, $\gamma = c + \frac{1}{a}$.
Montrer que $\max(\alpha, \beta, \gamma) \geqslant 2$.

Exercice 1.1.8. **I**
Simplifier les expressions
(1) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$
(2) $\sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \dfrac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \dfrac{125}{27}}}$.

Exercice 1.1.9. **D**
(1) Trouver tous les entiers naturels distincts vérifiant $a^b = b^a$.
(2) Montrer que tous les nombres rationnels distincts et strictement positifs vérifiant $a^b = b^a$ sont donnés par $a = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $b = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ (en supposant $a < b$).

1.2. Suites réelles.

Exercice 1.2.1. **I**
Séries de Engel
Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres entiers telle que : $p_n > 0$ pour une infinité d'entiers n et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement positifs telle que $\dfrac{q_n}{q_{n+1}}$ tende vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et que pour tout entier n, q_n divise q_{n+1}. Prouver que la suite de terme général $u_m = \sum\limits_{n=0}^{m} \dfrac{p_n}{q_n}$ converge vers un nombre irrationnel.

Exercice 1.2.2. **F C**
Convergence au sens de Césaro :
(1) Montrer que, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = l$. Étudier la réciproque.
(2) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} u_k$.
(3) Si les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des réels > 0, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = p$, montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$.

Exercice 1.2.3. **F** Suites homographiques.
On appelle suite homographique toute suite récurrente définie par une relation

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

avec $ad - bc \neq 0$. On pose $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et on suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $cu_n + d \neq 0$.
(1) Si l'équation $f(x) = x$ a deux racines distinctes (réelles ou complexes) l_1, l_2, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que

$$\frac{u_{n+1} - l_1}{u_{n+1} - l_2} = k\frac{u_n - l_1}{u_n - l_2}.$$

(2) Si l'équation $f(x) = x$ a une racine double l, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que
$$\frac{1}{u_{n+1} - l} = k + \frac{1}{u_n - l}.$$
(3) Application : étudier les suites suivantes
$$u_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}, \quad u_0 \neq -1,\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}.$$

EXERCICE 1.2.4. **F C** Suites récurrentes doubles.
On appelle suite récurrence double (à coefficients dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une suite définie par la donnée de u_0, u_1 et la relation de récurrence

(1) $$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{C}^2.$$

(1) On appelle E le sous-espace vectoriel des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant (1). Montrer que $\dim E = 2$.
(2) On appelle résolvante de E l'équation $r^2 = ar + b$. (2)
  a) Montrer que, si (2) a deux racines distinctes r_1 et r_2 alors toute suite de E s'écrit $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ (où λ et μ sont indépendants de n).
  b) Montrer que, si (2) a une racine double r alors toute suite de E s'écrit $u_n = (\lambda n + \mu)r^n$.
(3) Application : étudier les suites suivantes

a)$u_{n+2} = 2k\cos\theta u_{n+1} - k^2 u_n,\ u_0 = 1, u_1 = k\cos\theta$. b)$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + (n+1)^2,\ (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCICE 1.2.5. **F**
Étudier la suite définie par $u_2 = a$, $nu_{n+1} = (n-1)u_n - n + 1$ pour $n \geqslant 2$.

EXERCICE 1.2.6. **D**
Soit la suite $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}^2 \leqslant 1 + \sqrt{2}u_n$.
(2) La suite (u_n) est-elle convergente ?
(3) Montrer que $|u_{n+1} - u_n| < \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n!}}$.
(4) En déduire un entier n tel que, si $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $|\alpha - u_n| < 10^{-10}$
(poser $v_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n!}}$ puis, montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, que $|u_{n+p+1} - u_{n+p}| < \dfrac{v_n}{2^{n+p}n^{p/2}}$ et enfin, que $|\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}{2^{n-1}\sqrt{n!}(2\sqrt{n} - 1)}$).
Calculer enfin une valeur approchée de α à 10^{-9} près par défaut.

EXERCICE 1.2.7. **D**
Étudier les suites réelles (a_n) et (b_n) définies par : $0 < a_0 < b_0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{a_n + b_n}$.
Application : étudier la suite de terme général : $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n}(1 + r^{2^k})$, $r \in]0, 1[$.

Exercice 1.2.8. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ avec $a_0 > 0$, $a_1 > 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x - a_0$.

(1) Montrer que P_n possède une unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$, on l'appelle u_n.
(2) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
(3) Pour $a_n = n + 1$ calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (on donnera une écriture simplifiée de P_n et on montrera que $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n^n = 0$).

Exercice 1.2.9. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, on définit la suite (v_n) par

$$v_0 = u_0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{v_{n-1} + u_n}{1 + u_n v_{n-1}}.$$

Exprimer v_n en fonction de n (et des termes de la suite (u_k)) et en déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice 1.2.10. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient (u_n) et (v_n) 2 suites de réels de limite nulle, (v_n) strictement décroissante.
Montrer que, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$.

Exercice 1.2.11. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $0 \leqslant u_{m+n} \leqslant \dfrac{m+n}{mn}$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 1.2.12. $\boxed{\textbf{D}}$
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On pose $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n u_n}$ et on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

(1) Donner des exemples de suites telles que $v_n \to l$;
(2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = +\infty$.
(3) Si $w_n = \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + n u_n}{n^2 u_n}$ et si $(n u_n) \nearrow$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{l}{1+l}$.

---

2. Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

2.1.

Exercice 2.1.1. $\boxed{\textbf{I}}$
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

(1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y^2) = f(x^2) + f(y)$,
(2) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) - f(x - y) = 2y(3x^2 + y^2)$,
(3) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(xy) + f(xz) - 2f(x)f(yz) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2.1.2. **I**
Soit $(f,g) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^2$.

(1) Montrer que $\sup(f(x),g(x))$ et $\inf(f(x),g(x))$ sont continues.
(2) Montrer que $h\ : u \in \mathbb{R} \mapsto h(u) = \sup\limits_{x\in[a,b]} (f(x)+ug(x))$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.1.3. **I C**
Soit $f \in \mathcal{C}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x+1)-f(x)) = l.$$

Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2.1.4. **I**
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$; montrer que si f est injective, alors elle est strictement monotone.

Exercice 2.1.5. **F**
Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$ et $f(x) \geqslant f(0)$ sur $[0,1]$. Montrer que : $\forall \lambda \in]0,1[$, $\exists x \in [0,1]$, $f(x+\lambda) = f(x)$.

Exercice 2.1.6. **I C**

(1) Trouver les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues en 0 et telles que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$
(2) Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et telles que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y).$$
(Montrer d'abord que, si $f \neq 0$, $\exists a > 0$, $\forall x \in [0,a] \quad f(x) \geqslant 0$ puis discuter — $f(a) \leqslant 1$ $(\exists \theta \in [0,\pi/2] \quad f(a) = \cos\theta)$ ou $f(a) > 1$).
(3) Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \quad f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y).$$

Exercice 2.1.7. **I**
Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

(1) f continue en 0 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(\frac{x}{1+x^2})$,
(2) f continue en 1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(x^2)$.

Exercice 2.1.8. **D**
Trouver les couples de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x+y) & = f(x) + f(g(y)) \\ g(x+y) & = g(x) + g(f(y)) \end{cases}.$$

---

1. Indications :

Indication 1.1.1 Si $a > 0$ montrer par l'absurde qu'il existe un unique élément de G dans $[a, \frac{3}{2}a[$.
Si $a = 0$ alors montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément $x > 0$ de G tel que $x \leqslant \varepsilon$ puis utiliser le caractère archimédien de $\mathbb{R}$.

- (i) Avec $i = \frac{\alpha}{2\pi}$, $i\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
- (ii) Distinguer le cas $\frac{\alpha}{\pi}$ irrationnel (le sup vaut 1) du cas $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{p}{q}$ rationnel (le sup vaut 1 ou $\cos \frac{\pi}{2q}$).

Indication 1.1.2 Étudier la fonction $f(x) = \sqrt[4]{41 + x} + \sqrt[4]{41 - x}$.

Indication 1.1.3 Montrer que $E \subset [1, e]$ puis étudier $f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$.

Indication 1.1.4

1. Distinguer les cas $E(x)$ pair, impair ou montrer que $f(x) = E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) - E(x)$ est nulle.
2. Écrire $E\left(\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right)$ sous forme d'une différence.

Indication 1.1.5 Développer $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2$.

Indication 1.1.6 Les récurrences sont immédiates.

Indication 1.1.7 Faire intervenir la fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Indication 1.1.8

1. Utiliser la formule $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
2. Penser aux formules de Cardan donnant les solutions de $x^3 + px + q = 0$.

Indication 1.1.9

1. Étudier la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
2. Écrire $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s}$ puis utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers.

Indication 1.2.1 Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée et prouver par l'absurde que sa limite est irrationnelle (même argument que pour prouver que e est irrationnel).

Indication 1.2.2

1. Se ramener en 0 puis partager la somme en 2.
2. A K fixé, montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{K} \binom{n}{k} = 0$ puis partager la somme en 2.
3. Appliquer le (1) à $v_n = \ln a_n$.

Indication 1.2.3

1. Calculer $f(y) - f(x)$.
2. Utiliser la relation $\Delta = (a - d)^2 + 4bc = 0$ (car on a une racine double).
3. On trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ dans le premier cas.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ dans le deuxième.

Indication 1.2.4

1. Trouver une base de E en choisissant (u_0, u_1) et (v_0, v_1) libre.
2. Immédiat.
3. $u_n = k^n \cos n\theta$ dans le premier cas, $u_n = \frac{n^4-n^2}{12} + \lambda n + \mu$. dans le deuxième.

Indication 1.2.5 En calculant $\sum_{k=2}^{n} ku_{k+1}$, on peut résoudre la récurrence et conclure.

Indication 1.2.6

1. On calcule u_{n+1}^2 et on récurre.
2. (u_n) est croissante et majorée.
3. Multiplier par les expressions conjuguées.

(4) Écrire $|u_{n+p+1}-u_n| \leqslant |u_{n+p+1}-u_{n+p}|+\cdots+|u_{n+1}-u_n| \leqslant \frac{v_n}{2^n}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{(2\sqrt{n})^p}\right)$ et passer à la limite. On trouve alors $u_{15}=1,757932756$.

Indication 1.2.7 Le **D** ne se justifie pas ici (ou signifie : désolé). On montre que $\frac{a_n}{b_n}\to 0$ d'où $a_n\to 0$ et $b_n\to b_0-a_0$. On pose ensuite $r=\frac{a_0}{b_0}$.

Indication 1.2.8

(1) Étudier $x\mapsto P_n(x)$.
(2) Montrer que $P_n(u_{n+1})\leqslant 0$ et utiliser les variations de P_n.
(3) Simplifier $P_n(x)$ et montrer que $nu_n^n\to 0$.

Indication 1.2.9 Poser $u_n=\operatorname{th}\alpha_n$.

Indication 1.2.10 Se ramener au cas où $u_n\to 0$ puis utiliser, à partir d'un certain rang, les inégalités $|u_{n+k}-u_{n+k-1}|\leqslant\varepsilon(v_{n+k-1}-v_{n+k})$.

Indication 1.2.11 Étudier les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}).

Indication 1.2.12

(1) Prendre $u_n=n^p$ avec $p>-1$.
(2) Poser $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ suite croissante et distinguer les cas $s_n\to+\infty$, $s_n\to a>0$.
(3) Écrire $u_k=s_k-s_{k-1}$ et transformer le numérateur de w_n.

Indication 2.1.1 On trouve $f=0$, $f=x^3+a$ et $f=\frac{1}{2}$ en bidouillant.

Indication 2.1.2

(1) Penser à $\sup(a,b)=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}|a-b|,\quad \inf(a,b)=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}|a-b|$.
(2) Écrire $h(u)=f(x_0)+ug(x_0)$ et $h(u')=f(x_0')+u'g(x_0')$ et montrer que h est lipschitzienne.

Indication 2.1.3 Utiliser une méthode analogue à Césaro.

Indication 2.1.4 Raisonner par l'absurde mais attention ici à la négation de la monotonie de f.

Indication 2.1.5 Considérer $g(x)=f(x+\lambda)-f(x)$.

Indication 2.1.6

(1) Se ramener au cas où $f>0$ et prendre le logarithme.
(2) Si $f(a)<1$ montrer par récurrence que $f(\frac{a}{2^n})=\cos\frac{\theta}{2^n}$.
(3) Se ramener au cas où $f>0$ et prendre le logarithme.

Indication 2.1.7

(1) Poser $g(x)=\frac{x}{1+x^2}$ et étudier la suite (u_n) définie par $u_0=x$ et $u_{n+1}=g(u_n)$.
(2) Montrer que $f(x)=(-1)^n f(x^{1/2^n})$.

Indication 2.1.8 Prendre $x=0$ et prouver que $f(x)=ax+f(0)$, de même $g(x)=bx+g(0)$. Chercher alors les conditions sur a, b, $f(0)$ et $g(0)$.

2. Solutions :

Solution 1.1.1 Si $a > 0$ alors on sait que : $\exists x \in [a, \frac{3a}{2}[\cap G$. Si x est unique alors $x = a$, sinon, on a $a \leqslant x' < x < \frac{3a}{2}$ et $x - x' \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ ce qui est impossible. Puis, si $x \in G$, on peut écrire : $x = na + r$ où $0 \leqslant r < a$ et $n \in \mathbb{Z}$. Comme $r \in G$ on a : $r = 0$.

Si $a = 0$ alors : $\forall \varepsilon, \exists x \in G \;\; : 0 < x < \varepsilon$ et pour $y \in \mathbb{R}$, en prenant $n = \left[\dfrac{y}{x}\right]$ alors $n \leqslant \dfrac{y}{x} < n+1$ donc $nx \leqslant y < (n+1)x < nx + \varepsilon$. Comme $nx \in G$ on en déduit que G est dense dans $\mathbb{R}$.

(i) On pose : $i = \frac{\alpha}{2\pi}$ alors $i\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $(i\mathbb{Z} + \mathbb{Z}) \cap [0, 1[= \{ni - [ni], n \in \mathbb{Z}\}$. Si $z \in \mathbb{U}$ alors $\exists x \in [0, 1[$ tel que $z = \exp(2i\pi x)$. Or, on sait qu'il existe $(x_n) \in G^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et donc, vu que $x \mapsto e^{i2\pi x}$ est continue et que $e^{in\alpha} = e^{i(n\alpha - 2\pi n[\frac{\alpha}{2\pi}])}$ on a bien : $\{e^{i\alpha n}\}$ dense dans $\mathbb{U}$.

Pour tout réel $t \in [-1, 1]$, il existe $u \in [0, 1[$ tel que $t = \Im(e^{i2\pi u})$. Comme $\sin n\alpha = \Im(e^{in\alpha})$ alors on peut conclure.

(ii) On remarque que si $\alpha = \pi/3$ alors $\sup\{|\sin n\pi/3|\} = \sqrt{3}/2$. Compte tenu du résultat ci-dessus, si α/π est irrationnel, alors $\sup(|\sin n\alpha|) = 1$. Il faut alors chercher α sous la forme $\alpha = \dfrac{p}{q}\pi$, avec $p \wedge q = 1$. Si $np = bq + r$ alors, avec $q \geqslant 3$,

$$|\sin n\alpha| = |\sin \frac{r}{q}\pi| = \sin \frac{r}{q}\pi(\text{ car } r \leqslant q - 1)$$

Le sup vaut 1 si q est pair (prendre $r = q/2$),
$\cos \dfrac{\pi}{2q}$ si q est impair, $q > 1$ car la fonction sin est croissante sur $[0, \pi/2]$, décroissante sur $[\pi/2, \pi]$ donc le sup est atteint pour $\sin \frac{[q/2]}{q}\pi = \cos \frac{\pi}{2q}$.
Pour $q \geqslant 2$ on a enfin $\cos \frac{\pi}{2q} = \cos \frac{\pi}{6}$ d'où la conclusion finale.

Solution 1.1.2 $x = \pm 40$ sont solutions évidentes et si on étudie la fonction d'x associée, qui est paire, on remarque qu'on a ainsi les seules solutions.

Solution 1.1.3 Soit $u_{m,n} = (\frac{m+n+1}{m+n})^{m+n}$ alors $u_{m,n} > 0$ donc E est minoré. Or $\ln u_{m,n} = (m + n)\ln(1 + \frac{1}{m+n} \leqslant 1$ car $\ln(1 + x) \leqslant x$ donc $u_{m,n} \leqslant e$, E est majoré.

On remarque que $u_{m,n} = f(m + n)$ avec $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$. Étudions $\ln f(x)$ pour $x \geqslant 2$. $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} = g(x)$ et $g'(x) = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x^2(x+1)^2} < 0$ pu $x \geqslant 2$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ alors $g(x) > 0$ pour $x \geqslant 2$ et f est croissante.

Conclusion : $\inf E = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et $\sup E = e$.

Solution 1.1.4

(1) Soit $n = E(x)$, on distingue 2 cas.

- $n = 2p$ alors $E(\frac{x}{2}) = p$ et $E(\dfrac{x+1}{2}) = p$ soit $E(\dfrac{x}{2}) + E(\dfrac{x+1}{2}) = 2p = E(x)$.
- $n = 2p+1$ alors $E(\frac{x}{2}) = p$ et $E(\dfrac{x+1}{2}) = p+1$ soit $E(\dfrac{x}{2}) + E(\dfrac{x+1}{2}) = 2p+1 = E(x)$.

Remarque : $f(x) = E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) - E(x)$ est 1-périodique et vaut 0 sur $[0, 1[$ donc $f = 0$.

(2) D'après la première question on a $E\left(\dfrac{n+2^k}{2^{k+1}}\right) = E\left(\dfrac{n2^{-k}+1}{2}\right) = E(\frac{n}{2^k}) - E(\frac{n}{2^{k+1}})$ donc $E_n(p) = \sum_{k=0}^{p} E(\frac{n}{2^k}) - E(\frac{n}{2^{k+1}}) = E(n) - E(\frac{n}{2^{p+1}})$. Pour $2^{p+1} > n$ alors $E_n(p) = n$, la suite est constante.

Solution 1.1.5 En fait il suffit de développer $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2+(x_n-x_1)^2 = \Sigma$ et de remarquer que l'égalité proposée est équivalente à $\Sigma = 0$.

Solution 1.1.6 Ce sont de simples récurrences.

(1) Soit $\Pi_n = \prod_{k=0}^{n}\left(x^{2^k}+1\right)$ alors $\Pi_0 = x+1 = \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Puis $\Pi_{n+1} = \Pi_n \times \left(x^{2^{n+1}}+1\right) = \dfrac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}\times\left(x^{2^{n+1}}+1\right) = \dfrac{x^{2^{n+2}}-1}{x-1}$.

(2) C'est la même chose. Soit $\Pi'_n = \prod_{k=0}^{n}\left(x^{2.3^k}+x^{3^k}+1\right)$ alors $\Pi'_0 = x^2+x+1 = \dfrac{x^3-1}{x-1}$. Puis $\Pi'_{n+1} = \Pi'_n\times\left(x^{2.3^{n+1}}+x^{3^{n+1}}+1\right) = \dfrac{x^{3^{n+1}}-1}{x-1}\times\left(x^{2.3^{n+1}}+x^{3^{n+1}}+1\right) = \dfrac{x^{3^{n+2}}-1}{x-1}$.

Solution 1.1.7 On remarque que, pour $x > 0$, $f(x) = x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ donc $\alpha+\beta+\gamma = f(a)+f(b)+f(c) \geqslant 6$. L'un au moins des 3 réels α, β, γ est donc $\geqslant 2$.

Solution 1.1.8

(1) On utilise la relation $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. $(\pm 1+\sqrt{2})^3 = 5\sqrt{2}\pm 7$ donc $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2$.

(2) Cette expression fait penser aux formules de Cardan donnant les solutions d'une équation du troisième degré. On pose $a = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}$, $b = \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}$. alors $a-b$ est racine de l'équation $x^3+5x-6=0$. $x=1$ est la seule solution réelle donc $a-b=1$. On peut aussi procéder comme au 1.

Solution 1.1.9 Tout repose sur l'étude de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

(1) $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ d'où le tableau de variation

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

Si $a < b$ alors a ne peut prendre que les valeurs 1 ou 2. 1 est exclu car $1^b = 1$ et $b^1 = b > 1$. Il ne reste que $a = 2$ et on chercher b tel que $f(b) = \dfrac{\ln 2}{2}$. D'après le tableau de variation, il n'y a qu'une seule solution et c'est $b = 4$.
Conclusion : les seuls entiers distincts vérifiant $a^b = b^a$ sont $a = 2$ et $b = 4$.

(2) On vérifie que les solutions proposées conviennent : $a = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ et $b = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln a}{a} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times n\ln\frac{n+1}{n} = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\ln\frac{n+1}{n}\\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\times(n+1)\ln\frac{n+1}{n} = \frac{\ln b}{b}.\end{aligned}$$

Posons maintenant $a = \dfrac{p}{q}$ et $b = \dfrac{r}{s}$ où $p \wedge q = 1$, $r \wedge s = 1$, la relation $a^b = b^a$ se traduit par

$$p^{rq}s^{ps} = q^{rq}r^{ps}. \tag{1}$$

Grâce au théorème de Gauss, on en déduit que $p|r^{ps}$ et $r|p^{rq}$. Tout facteur premier de p est donc un facteur premier de r et réciproquement donc $p = p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ et $r = p_1^{\beta_1}\dots p_k^{\beta_k}$. Comme $p\wedge q = 1$ et $r\wedge s = 1$ alors $p^{rq} = r^{ps}$ (les facteurs premiers de p et q sont distincts, de même pour r et s) i.e. $\alpha_i rq = \beta_i ps$.
On en déduit (ARNAQUE) que p et r sont les puissances d'un même entier, de même pour q et s. On a donc $p = m^\alpha$, $r = m^\beta$, $q = n^{\alpha'}$, $s = n^{\beta'}$. Grâce à la relation (1), on en déduit que $\alpha rq = \beta ps$ et $\alpha' rq = \beta' ps$.
Deuxième ARNAQUE, on a $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ donc $a = \left(\dfrac{m}{n}\right)^\alpha$ et $b = \left(\dfrac{m}{n}\right)^\beta$.

$$\frac{\ln a}{a} = \alpha\left(\frac{n}{m}\right)^\alpha \ln\frac{m}{n} = \frac{\ln b}{b} = \beta\left(\frac{n}{m}\right)^\beta \ln\frac{m}{n}$$

donc $\alpha n^\alpha m^\beta = \beta n^\beta m^\alpha$ et comme $a < b$ alors $\beta > \alpha$ soit $\alpha m^{\beta-\alpha} = \beta n^{\beta-\alpha}$ i.e. $\alpha = kn^{\beta-\alpha}$ et $\beta = km^{\beta-\alpha}$ où $k \in \mathbb{N}^*$. On obtient $\beta - \alpha = k(m^{\beta-\alpha} - n^{\beta-\alpha})$ soit $l = k(m^l - n^l)$ en posant $l = \beta - \alpha$. $m > n$ donc $m^l - n^l \geqslant (n+1)^l - n^l \geqslant l$ avec inégalité stricte si $m > n+1$ et là, on y arrive car $k = 1$ et $m = n+1$ ce qui permet de conclure.

Solution 1.2.1 On peut supposer que les entiers p_n sont tous non nuls ;
d'une part $p_n \leqslant M$,
d'autre part $\exists N, \forall n \geqslant N, \dfrac{q_n}{q_{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{2}$ nous donne : pour $n \geqslant N, \exists K : q_n \geqslant 2^nK$ et donc $\dfrac{p_n}{q_n} \leqslant \dfrac{M}{2^nK}$. La suite (u_n) est alors croissante et majorée, elle converge vers un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$.
Remarque : l'utilisation de la règle de D'Alembert sur les séries permettait de conclure immédiatement $(\dfrac{p_n}{q_n} \leqslant \dfrac{M}{q_n} = v_n$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \to 0$.

Montrons que $\alpha \notin \mathbb{Q}$ par l'absurde : supposons que $\alpha = \dfrac{p}{q}$ et choisissons N tel que $\forall n \geqslant N, \dfrac{q_n}{q_{n+1}} < \dfrac{1}{qM+1}$ alors $\forall n \geqslant N, \dfrac{1}{q_n} < \dfrac{1}{(qM+1)^{n-N}q_N}$. Mais on peut écrire $\alpha = \sum\limits_{n=0}^{N}\dfrac{p_n}{q_n} + \beta = \dfrac{A}{q_N} + \beta$ où $\beta = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\dfrac{p_n}{q_n} < \dfrac{1}{qq_N}$. Si on écrit que $\alpha - \dfrac{p}{q} = 0$, on trouve que $\beta qq_N = pq_N - Aq \in \mathbb{N}$ ce qui est impossible.
Remarque : ce résultat est à rapprocher de la démonstration selon laquelle e est un nombre irrationnel (utiliser la question (i) page 55 pour avoir un encadrement).

Solution 1.2.2

(1) Avec $v_n = u_n - l$, on se ramène en 0 ($v_n \to 0$ et il suffit de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}(v_1 + \cdots v_n) = 0$) car $\dfrac{1}{n}(v_1 + \cdots v_n) = \dfrac{1}{n}(u_1 + \cdots u_n) - l$).
Puis : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant N \;: |v_p| < \varepsilon/2$ d'où si $n \geqslant N \;: |\frac{1}{n}(v_1 + \cdots + v_n)| \leqslant \frac{1}{n}|v_1 + \cdots + v_N| + \varepsilon/2$ et on prend n suffisamment grand pour que : $\frac{1}{n}|v_1 + \cdots + v_N| < \varepsilon/2$; pas de réciproque : $u_n = (-1)^n$.

(2) A K fixé, on peut écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{K} \dbinom{n}{k} = 0$.
En effet $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)(\ldots)(n-k+1)}{k!} \leqslant \dfrac{n^k}{k!} \leqslant \dfrac{n^K}{k!}$ donc

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{K}\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^K}{2^n}\sum_{k=0}^{K}\frac{1}{k!} \leqslant \frac{n^K e}{2^n}$$

et par conséquent, en utilisant la croissance comparée des suites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} u_k = l$.

(3) On pose $v_n = \ln a_n$ ($\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(v_{n+1} - v_n) = \ln p$) et $u_0 = v_0$, $u_n = v_n - v_{n-1}$, $n \geqslant 1$ et on applique le 1.

Solution 1.2.3

(1) Après un calcul simple, on a

$$f(y) - f(x) = \frac{(ad-bc)(y-x)}{(cy+d)(cx+d)}$$

et en appliquant cette relation au rapport

$$\frac{u_{n+1}-l_1}{u_{n+1}-l_2} = \frac{f(u_n)-l_1}{f(u_n)-l_2}$$

on a : $\dfrac{u_{n+1}-l_1}{u_{n+1}-l_2} = k\dfrac{u_n-l_1}{u_n-l_2}$ où $k = \dfrac{cl_2+d}{cl_1+d}$.

(2) Dans le deuxième cas, on a $\Delta = (a-d)^2 + 4bc = 0$ (car on a une racine double) et cette racine vaut $l = \dfrac{a-d}{2c}$. On vérifie alors que $ad - bc = \dfrac{(a+d)^2}{4}$ et $cl + d = \dfrac{a+d}{2}$ d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}-l} &= \frac{(cl+d)(cu_n+d)}{(ad-bc)(u_n-l)}\\ &= \frac{2}{a+d}\frac{c(u_n-l)+cl+d}{u_n-l}\\ &= \frac{2c}{a+d} + \frac{1}{u_n-l}\end{aligned}$$

(3) • Première suite : on vérifie tout d'abord que la suite (u_n) est bien définie, en effet les u_n sont tous > 0.
$f(x) = x$ admet les solutions $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ et la récurrence se résout de la manière suivante :

$$\frac{u_n-l_1}{u_n-l_2} = k^n\frac{u_0-l_1}{u_0-l_2}$$

avec $l_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $l_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. On a $k = \dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$, $|k| < 1$ donc $\dfrac{u_n - l_1}{u_n - l_2} \to 0$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (ce qui semble normal vu que $l_1 > 0$ et $l_2 < 0$).

- Deuxième suite : on suppose ici que tous les termes de la suite (u_n) sont définis (en effet, si $u_0 = 0$ alors $u_1 = -1$ et u_2 n'est pas défini). 1 est racine double donc

$$\frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n - 1}$$

et la récurrence se résout immédiatement, $\dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{u_0 - 1}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Remarques :

(i) Il est plus naturel de raisonner dans $\overline{\mathbb{R}}$ la droite réelle achevée (cf. définition 3.1.2 page 50) et si $u_n = -\dfrac{d}{c}$ alors $u_{n+1} = \infty$, $u_{n+2} = \dfrac{a}{c}$...

(ii) On peut préférer une présentation matricielle en écrivant $u_n = \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ où les suites (α_n) et (β_n) vérifient

$$\begin{pmatrix}\alpha_{n+1}\\ \beta_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}, \quad \alpha_0 = u_0,\ \beta_0 = 1$$

et le problème se ramène au calcul de A^n où $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Solution 1.2.4

(1) Il est facile de vérifier que les suites (u_n) et (v_n) de E définies par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ forment une base de E :
l'application φ qui va de $\mathbb{K}^2$ dans E, qui à un couple (α, β) fait correspondre l'unique suite (u_n) de E vérifiant $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^2$ sur E.

(2) a) Les suites (r_1^n) et (r_2^n) forment une base de E, toute suite (u_n) s'exprime dans cette base.
b) C'est la même chose mais avec les suites (nr^n) et (r^n).

(3) a) On est dans le premier cas, on trouve $u_n = k^n \cos n\theta$
b) On a une relation affine, on cherche une solution particulière, $v_n = \dfrac{n^4 - n^2}{12}$. Les suites solutions de l'équation homogène $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ (on est dans le deuxième cas) sont de la forme $\lambda n + \mu$ donc l'ensemble des solutions s'écrit

$$u_n = \frac{n^4 - n^2}{12} + \lambda n + \mu.$$

Solution 1.2.5 On a

$$\sum_{k=2}^{n-1} k u_{k+1} = \sum_{k=2}^{n-1}[(k-1)u_k - (k-1)] = \sum_{k=1}^{n-2} k u_{k+1} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} + 1$$

d'où $(n-1)u_n = u_2 - \dfrac{(n-2)(n-1)}{2} + 1$ et

$$u_n = -\frac{n-2}{2} + \frac{a+1}{n-1}$$

pour $n \geqslant 2$ donc $u_n \to +\infty$.

Solution 1.2.6

(1) $u_{n+1}^2 = 1+\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{2^2}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{2^{2^{n-1}}}}}}$ or $\frac{3}{2^2} < 2,\ldots,\frac{n+1}{2^{2^{n-1}}} < n \Rightarrow u_{n+1}^2 < 1+\sqrt{2}u_n$.

(2) Si on pose $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})$: $x^2 = 1+\sqrt{2}x$, $u_0 < x$. Montrons par récurrence que $u_n < x$:
si $u_n < x$ alors $u_{n+1}^2 \leqslant 1+\sqrt{2}u_n < 1+\sqrt{2}x = x^2$ donc $u_{n+1} < x$ car ces deux nombres sont positifs.
La suite (u_n) est croissante et majorée, elle converge.

(3) On a (en multipliant à chaque étape par la quantité conjuguée) :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{\sqrt{2+\cdots}-\sqrt{2+\cdots}}{u_{n+1}+u_n} < \frac{\sqrt{2+\cdots}-\sqrt{2+\cdots}}{2} \\ &< \frac{\sqrt{3+\cdots}-\sqrt{3+\cdots}}{2.2\sqrt{2}} \leqslant \cdots \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n}}{2.2\sqrt{2}\ldots 2\sqrt{n-1}} \\ &< \frac{\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n!}}. \end{aligned}$$

(4) Grâce à l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned} |u_{n+p+1}-u_n| &\leqslant |u_{n+p+1}-u_{n+p}|+\cdots+|u_{n+1}-u_n| \\ &\leqslant \frac{v_n}{2^n}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{(2\sqrt{n})^p}\right). \end{aligned}$$

En passant à la limite quand p tend vers l'infini on obtient :

$$|\alpha-u_n| \leqslant \frac{v_n}{2^n}\frac{1}{1-1/(2\sqrt{n})}.$$

Pour $n=16$, $|u_n-\alpha| \leqslant 2,88.10^{-10}$ d'où $u_{16} = 1,757932756$ (une valeur plus précise est $\alpha = 1,757932756618$).

Solution 1.2.7 On remarque tout d'abord que $b_{n+1}-a_{n+1} = b_n-a_n$ et que $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2$.

On a donc $\frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^{2^n}$ qui tend vers 0. Ceci nous donne $b_n = a_n+b_0-a_0$ et immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b_0-a_0$.

On a ensuite $\frac{a_k}{b_k} = \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^{2^k} = r^{2^k}$ (si on a posé $r = \frac{a_0}{b_0}$) d'où

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{a_k}{b_k}\right) \\ &= \prod_{k=0}^{n}\frac{a_k+b_k}{b_k} \\ &= \prod_{k=0}^{n}\frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{b_0}{b_{n+1}} \end{aligned}$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{b_0}{b_0-a_0} = \frac{1}{1-r}$.

On pouvait remarquer que $(1-r)P_n = 1 - r^{2^{n+1}} = \dfrac{b_{k+1}-a_{k+1}}{b_{k+1}}$.

On a donc (P_n) qui est une suite strictement croissante vers $\dfrac{1}{1-r}$.

Solution 1.2.8

(1) P_n est une fonction strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[-a_0,+\infty[$ donc l'équation $P_n(x)=0$ possède une unique racine positive.

(2) On remarque que $P_n(u_n)=0$ implique que $P_n(u_{n+1})\leqslant 0$. Comme la fonction $x\mapsto P_n(x)$ est croissante, la suite (u_n) est décroissante minorée par 0 elle converge. On remarque en outre que $u_n \leqslant u_0 = \dfrac{a_0}{a_1}$.

(3) On a $P_n(x) = -2 + \left(\dfrac{1-x^{n+2}}{1-x}\right)' = \dfrac{-2(x-1)^2+1-(n+2)x^{n+2}(1-x)-x^{n+2}}{(x-1)^2}$.

Vu que $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n^n = 0$ on peut dire que $2(u_n-1)^2-1\to 0$ et donc, par continuité, la limite de (u_n) est racine de $(x-1)^2 = \dfrac{1}{2}$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Solution 1.2.9 On pose $u_n = \operatorname{th}\alpha_n$ alors $v_n = \operatorname{th}(\alpha_0+\cdots+\alpha_n)$. Si $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k \to +\infty$ alors $v_n \to 1$ sinon $v_n \to \operatorname{th}\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\alpha_k\right)$.

Solution 1.2.10 Tout d'abord on se ramène en 0 en remplaçant u_n par $u_n - lv_n$.

Pour $\varepsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}\right|\leqslant\varepsilon$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$ alors on écrit les inégalités $|u_{n+k}-u_{n+k-1}|\leqslant\varepsilon(v_{n+k-1}-v_{n+k})$ pour $k\in[\![1,p]\!]$ et on les additionne toutes ce qui donne

$$|u_{n+p}-u_n|\leqslant\varepsilon(v_n-v_{n+p}).$$

On passe à la limite quand $p\to+\infty$ d'où $|u_n|\leqslant\varepsilon v_n$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$.

Solution 1.2.11 On étudie les suites extraites.

- Si $n=2p$ alors $0\leqslant u_n\leqslant \dfrac{2p}{p^2}\to 0$.
- Si $n=2p+1$ alors $0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{2p+1}{p(p+1)}\to 0$.

On peut alors conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Solution 1.2.12

(1) On prend $u_n = n^p$, $p>-1$, alors $u_1+u_2+\cdots+u_n = n^{p+1}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^p\right)\sim\dfrac{n^{p+1}}{p+1}$ (on distingue les cas $p<0$ et $p\geqslant 0$ et on encadre par des intégrales). On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{p+1}$ et on prend $p=\dfrac{1}{l}-1$.

(2) Soit $s_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$, $s_n>0$ et est une suite croissante donc on distingue 2 cas :
- $s_n\to+\infty$ et dans ce cas $nu_n\to+\infty$ (et bien sûr $n^2u_n\to+\infty$).
- $s_n\to a>0$:
  - si $l=0$ alors $nu_n\to+\infty$, immédiat,

– si $l > 0$ alors $nu_n \to \dfrac{l}{a}$ et là encore $n^2u_n \to +\infty$.

$s_n \to a$ est impossible car $nu_n \to +\infty \Rightarrow s_n \to +\infty$ et $nu_n \to \dfrac{l}{a} \Rightarrow s_n \to +\infty$.

(3) Cela devient plus difficile. On utilise une transformation d'Abel : $u_k = s_k - s_{k-1}$ (en posant par convention $s_0 = 0$) :

$$\sum_{k=1}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{n} k(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} ks_k - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)s_k$$
$$= ns_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k.$$

On a ainsi $w_n = \dfrac{s_n}{nu_n} - \dfrac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n^2u_n}$. Par hypothèse, on sait que $s_k - lnu_k = o(ku_k)$ donc, par le même argument que la méthode de Césaro, on a $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} s_k}{n^2u_n} - lw_n = o(w_n)$ d'où

$$(1+l)w_n = \frac{s_n}{nu_n} + \left(lw_n - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} s_k}{n^2u_n}\right) = v_n + o(w_n).$$

On en déduit que $v_n \sim (1+l)w_n$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{l}{1+l}$.

Solution 2.1.1

(1) On obtient successivement les propriétés suivantes :
- $x = 0$, $y = 1$: $f(1) = f(0) + f(1)$ soit $f(0) = 0$,
- $x = -y^2$: $f(x^2) = -f(y)$ soit $f(y^4) = -f(y)$,
- $x = 0$: $f(y^2) = f(y)$ donc $f(y^4) = f(y)$.

En combinant les 2 dernières relations, on obtient $f = 0$.

(2) Avec $x = y$ on obtient $f(2x) = 8x^3 + f(0)$ donc f est nécessairement de la forme $f(x) = x^3 + a$. On vérifie alors sans peine que les fonctions de cette forme sont solutions.

(3) Si on applique la relation aux triplets $x = y = z = 0$ et $x = y = z = 1$ on obtient $2f(0) - 2f(0)^2 \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $2f(1) - 2f(1)^2 \geqslant \dfrac{1}{2}$. Or l'inéquation $2x - 2x^2 \geqslant \dfrac{1}{2}$ n'admet qu'une seule solution qui est $x = \dfrac{1}{2}$ $(4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2)$.

En prenant $y = 0$ on a $f(xz) \geqslant f(x)$ soit f est constante sur $\mathbb{R}^*$ (pour $x \neq 0$, prendre $z = \dfrac{1}{x}$ d'où $f(1) \geqslant f(x)$ puis prendre $x = 1$ d'où $f(z) \geqslant f(1)$).

Conclusion : $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Solution 2.1.2

(1) On utilise les relations valables pour tout couple (a, b) de réels

$$\sup(a,b) = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}|a-b|, \quad \inf(a,b) = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}|a-b|$$

par conséquent les fonctions $\sup(f(x), g(x)) = \dfrac{1}{2}(f(x) + g(x)) + \dfrac{1}{2}|f(x) - g(x)|$ et $\inf(f(x), g(x)) = \dfrac{1}{2}(f(x) + g(x)) - \dfrac{1}{2}|f(x) - g(x)|$ sont continues (cf. théorème 3.20 page 64 ainsi que la question (*ii*) page 65).

(2) h est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $f + ug$ est continue sur $[a, b]$ et le théorème 3.22 page 64 permet de conclure.

On sait en outre que

$$\exists (x_0, x_0') \in [a, b]^2,\ h(u) = f(x_0) + ug(x_0) \text{ et } h(u') = f(x_0') + u'g(x_0')$$

ce qui donne l'inégalité

$$\begin{aligned} h(u') = f(x_0') + ug(x_0') + (u' - u)g(x_0') &\leqslant h(u) + (u' - u)g(x_0') \\ &\leqslant h(u) + |u' - u| \sup_{x \in [a,b]} |g(x)| \end{aligned}$$

car $f(x_0') + ug(x_0') \leqslant f(x_0) + ug(x_0) = h(u)$ par définition.

Par symétrie, $|h(u) - h(u')| \leqslant M|u - u'|$ où $M = \sup_{x \in [a,b]} |g(x)|$ donc h est lipschitzienne.

Solution 2.1.3 On pose $g(x) = f(x) - lx$ et donc $\lim_{x \to +\infty} [g(x + 1) - g(x)] = 0$; puis on écrit

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{[g(x) - g(x - 1)] + \cdots + [g(x - [x] + 2) - g(x - [x] + 1)]}{x} + \frac{g(x - [x] + 1}{x}.$$

On sait que : $\exists A \in \mathbb{R} | \forall t \geqslant A, |g(t + 1) - g(t)| < \varepsilon$, on utilise alors la continuité de g sur $[1, 2]$ (donc g y est majoré), pour x assez grand on partage en 2 et on procède comme avec Césaro (voir l'exercice 1.2.2).

Solution 2.1.4 On sait que si f est non monotone et injective alors $\exists (x_1, x_2, x_3) \in [a, b]^3,\ x_1 < x_2 < x_3$ tels que (par exemple) $f(x_1) < f(x_2)$ et $f(x_3) < f(x_2)$.

En effet, la négation de f monotone nous donne l'existence de (t_1, t_2, t_1', t_2') tels que

$$\Delta(t_1, t_2) = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} < 0 \text{ et } \Delta(t_1', t_2') = \frac{f(t_1') - f(t_2')}{t_1' - t_2'} > 0$$

(l'injectivité nous assure que les quantités ne sont pas nulles) avec $t_1 < t_2$ et $t_1' < t_2'$. En supposant que $t_1 < t_1'$ alors on prend $x_1 = t_1$, $x_2 = \begin{cases} t_2 & \text{si } f(t_2) > f(t_1') \\ t_1' & \text{si } f(t_2) \leqslant f(t_1') \end{cases}$ et $x_3 = t_2'$.

Si $y = \sup(f(x_1), f(x_2))$, f prend deux fois la valeur y (grâce au théorème des valeurs intermédiaires) ce qui est contradictoire.

Conclusion : f est monotone et comme elle est injective, elle est strictement monotone.

Solution 2.1.5 Soit $g(x) = f(x + \lambda) - f(x)$: $g(0) \geqslant 0$ et $g(1 - \lambda) \leqslant 0$ donc, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, $\exists x \in [0, 1 - \lambda], g(x) = 0$ soit $f(x + \lambda) = f(x)$.

Solution 2.1.6

(1) $f(x) = f(x/2)^2$ donc $f \geqslant 0$ et si f s'annule en un point alors $f = 0$. On peut supposer que f est strictement positive et considérer $g = \ln f$. On montre alors que, pour $\alpha \in \mathbb{Q}$, $g(\alpha x) = \alpha g(x)$ et par continuité : $g(\alpha x) = \alpha g(x)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. On a donc $g(x) = ax$ et $f(x) = e^{ax}$.

(2) On prend $y = 0$ d'où $2f(x) = 2f(x)f(0)$ donc, si $f \not\equiv 0$ alors $f(0) = 1$. Comme f est continue, $f > 0$ sur un intervalle $[0, a]$. Si $f(a) \leqslant 1$, on a $f(2a) + 1 = 2f(a)^2$ donc $f(2a) = \cos(2\theta)$ et par récurrence : $f(na) = \cos(n\theta)$. Avec $x = a/2$, $y = a/2$ on obtient $f(a/2)^2 = \cos^2(a/2)$ et comme $f > 0$ sur $[0, a]$, $f(a/2) = \cos(a/2)$.

On démontre alors par récurrence sur n que $f\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = \cos\dfrac{\theta}{2^n}$ puis, par récurrence sur k que $f\left(\dfrac{ka}{2^n}\right) = \cos\dfrac{k\theta}{2^n}$ pour $k \in [0, 2^n]$. Enfin, par un argument de continuité,

$$\boxed{f(x) = \cos\left(x\frac{\theta}{a}\right)}.$$

Si $f(a) > 1$, on posera $f(a) = \operatorname{ch}\theta$ et le même raisonnement s'applique.
Remarque : on peut aussi (en intégrant par rapport à y la relation fonctionnelle, avec $f(y) \neq 0$) prouver que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que f vérifie une équation différentielle de la forme $y'' = \lambda y$.

(3) On a $f(x)f(y) = \left[f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\right]^2$ donc f garde un signe constant que l'on peut supposer positif. Si f s'annule en un point alors f s'annule partout et donc, si l'on écarte ce cas, on peut poser $g = \ln f$ puis on prouve que, pour $\alpha \in \mathbb{Q}$, $g(\alpha x) = \alpha^2 g(x)$ que l'on étend à $\mathbb{R}$ par continuité d'où $f(x) = e^{ax^2}$.
Remarque : là aussi, en intégrant par rapport à x la relation portant sur g alors on prouve que g est $\mathcal{C}^2$ puis que g'' est constant.

Solution 2.1.7

(1) Soit $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ alors $f(x) = f(g(x))$ et par récurrence, $f(x) = f(g^n(x))$ où g^n désigne la composée n-ième de g.
Supposons $x > 0$ et étudions la suite $u_n = g^n(x)$: $g(x) < x$ donc (u_n) est strictement décroissante, minorée par 0 par conséquent convergente. Sa limite l vérifie $l = g(l)$ soit $l = 0$.
Comme f est continue en 0 alors $f(x) = f(0)$. On procède de même si $x < 0$.
Conclusion : f est constante.

(2) On remarque tout d'abord que f est paire.
Soit $x > 0$ alors, par récurrence, $f(x) = -f(x^{1/2}) = (-1)^n f(x^{1/2^n})$. Or $x^{1/2^n} \to 1$ t comme f est continue en 1 alors $f(x) = f(1)$.
Or $f(1) = -f(1^2)$ et $f(0) = -f(0^2)$ donc $f(1) = 0$ et $f(0) = 0$ soit $f \equiv 0$.

Solution 2.1.8 On cherche des conditions nécessaires d'existence de f et g.
Avec $x = 0$, on a la relation $f(y) = f(0) + f(g(y))$ soit, en reportant dans la relation générale, $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0)$. Si on pose $h(x) = f(x) - f(0)$ alors $h(x+y) = h(x) + h(y)$ et h continue. On en déduit que h est linéaire, i.e. $h(x) = ax$ soit $f(x) = ax + f(0)$. Le raisonnement s'applique aussi à g donc $g(x) = bx + g(0)$.
Reprenons maintenant les 2 relations vérifiées par f et g :

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y) + f(0) \\ &= ax + f(0) + f(by + g(0)) = ax + aby + 2f(0) + ag(0) \end{aligned}$$

d'où, en identifiant, on trouve $ab = a$ et $f(0) + ag(0) = 0$.

- Si $a \neq 0$ soit $b = 1$, $a = 1$ par symétrie, et $f(0) = -g(0)$ soit $f(x) = x + c$, $g(x) = x - c$.
- Si $a = 0$ alors $f(0) = 0$, f est nulle. $g(x+y) = b(x+y) = g(x) = bx$ donc $b = 0$, g est nulle.

Conclusion : les seules fonctions solution sont à chercher parmi les couples $(f, g) = (0, 0)$ et $f(x) = x + c$, $g(x) = x - c$.