CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL (R)

1. Dérivation des fonctions à valeurs réelles

1.1. **Dérivée en un point, fonction dérivée.**

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{F C}}$

Soit $f\ :[0,1]\to\mathbb{R}$ continue en 0, vérifiant : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=a$.
Montrer que $f'_d(0)$ existe.

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{F}}$

Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient l'une des identités :
a) $f'(x)=f(1-x)$ b)$f'(x)=f(-x)$.

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$

Calculer : $s=\lim\limits_{n\to+\infty}s_n$ où $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\dfrac{k}{n^2})$ pour f une fonction définie dans un voisinage de 0, dérivable en 0 et telle que : $f(0)=0$.

Exercice 1.1.4. $\boxed{\textbf{F C}}$

Calcul de $f^{(n)}(0)$ pour $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x\cos\theta+1}$.

Exercice 1.1.5. $\boxed{\textbf{I C}}$

Montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f_n(x))=(-1)^n x^{-n-1}e^{1/x}\text{ où }f_n(x)=x^{n-1}e^{1/x}.$$

Exercice 1.1.6. $\boxed{\textbf{I}}$

Si $\alpha\in\mathbb{R}$, montrer que $(1-x^2)^{-\alpha}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((1-x^2)^{n+\alpha}\right)$ est un polynôme.

Exercice 1.1.7. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $f\ :[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer que, si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ (étudier la fonction $e^x f(x)$).

Exercice 1.1.8. **I C**
Étudier l'équation : $\tan x = \dfrac{x}{1+a^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$: mettre en évidence une suite x_n de racines ($x \to +\infty$).
Partie principale en $\frac{1}{n}$ de $-x_n + n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ lorsque $a = 0$? Cas où $a \neq 0$?

Exercice 1.1.9. **I C**
Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\operatorname{Arctan} x)$ est de la forme :

$$\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}.$$

Calculer le polynôme P_n.
Établir, pour $x > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\operatorname{Arctan} x) = \frac{(-1)^{n-1}}{1+x^2)^{n/2}}(n-1)!\sin(n \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}).$$

Racines de P_n ?

Exercice 1.1.10. **I**
Soit $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x}{1+x}\tan\alpha\right)$.

(1) Calculer f', chercher une relation de récurrence entre $f^{(n-2)}$, $f^{(n-1}$, $f^{(n)}$.
(2) En déduire $f^{(n)}(0)$.

Exercice 1.1.11. **I**

(1) Soit P_n la partie régulière du D.L. de $\ln(1+x)$ à l'ordre n. Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $|\ln(1+x) - P_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
(2) On pose $I_n(x) = \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_0^x P_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $T_n(x) = I_n(x) + \dfrac{1}{2}(1 - P_n(x))$.
Montrer alors que $\forall x \in [0,1]$, $\left|\dfrac{1}{2x}\ln(1+x) - T_n(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)}$.

1.2. **Étude globale des fonctions dérivables.**

Exercice 1.2.1. **I C**
Si f est de classe C^3 sur $[a,b]$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}(f'(b) + f'(a)) - \frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c).$$

Exercice 1.2.2. **D C**
Soient $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ $n+1$ réels et f de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. On appelle : $L(x)$ le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

(1) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} \ : f(x) - L(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)(\cdots)(x-x_n)f^{(n+1)}(z).$$
(2) Si $x \in [-1,1]$, montrer que le choix des x_i qui minimise $|(x-x_0)(x-x_1)(\cdots)(x-x_n)|$ est obtenu lorsqu'on prend les abscisses de Chebychev : $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$ (on montrera que $T_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)(\cdots)(x-x_n) = \frac{1}{2^n}\cos((n+1)\operatorname{Arccos} x))$ et que si P_n est un polynôme normalisé de degré $n+1$ alors $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| \geqslant \dfrac{1}{2^n}$).

(3) Faire la synthèse de ces deux questions.

Exercice 1.2.3. **F**

La formule des accroissements finis peut s'écrire sous la forme
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$
Déterminer la valeur de θ lorsque $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
En donner une interprétation géométrique.

Exercice 1.2.4. **F**

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, montrer les inégalités
$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

Exercice 1.2.5. **I C**

(1) On définit la fonction $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(2) On définit maintenant $g(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.2.6. **I**

Soit f une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$. À l'aide de $\varphi(t) = f(x) - 2f(x+t) + f(x+2t) - Kt^2$ montrer que pour tout x et h réels il existe $\theta \in]0,1[$ tel que
$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x+\theta h).$$

Exercice 1.2.7. **I C**

Soit f une application définie et dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que si $(a,b) \in I^2$ sont tels que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$ alors il existe c compris entre a et b tel que $f'(c) = 0$ (on utilisera et démontrera qu'une application continue et injective définie sur un intervalle est monotone).

(2) Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 1.2.8. **I**

Étudier les suites définies par

(1) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos u_n$, (2) $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = (1-u_n)^2$

(3) $u_0 \in]0,\pi[$ et $u_{n+1} = |(u_n - 1)\sin u_n|$, (4) $u_0 \neq 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{u_n^2-1} + 1$

Exercice 1.2.9. **I**

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ croissante vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k < 1$.

Étudier la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.3. **Fonctions convexes.**

Exercice 1.3.1. **I**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2 fois dérivable tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0, f'(x) \geqslant 0, f''(x) \geqslant 0.$$

(1) Étudier les limites de $f(x)$ et $\dfrac{f(x)}{x}$ quand $x \to +\infty$. Généraliser au cas d'une fonction convexe croissante positive quelconque.
(2) Étudier les limites de $f(x), xf'(x)$ quand $x \to -\infty$.

Exercice 1.3.2. **D**

Soit f de classe C^3 sur $[a,b]$ telle que $f^{(3)}(x) \geqslant 0$.

Étudier les variations de φ sur $]\frac{a+b}{2}, b]$ où $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a+b-x)}{2x-a-b}$.

Exercice 1.3.3. **I C**

Montrer qu'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$$

est convexe.

Exercice 1.3.4. **D**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant :

$$\exists h_0 > 0, \ | \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall h \in [0, h_0], \ f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geqslant 0.$$

Montrer que f est convexe

Exercice 1.3.5. **D** Fonctions semiconvexes.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est semi-convexe ssi

$$\forall (x,y) \in I^2, \ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

(1) Montrer que, si $n = 2^k$ alors

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}. \tag{1}$$

(2) Montrer que (1) est aussi valable si $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$.

(3) Montrer enfin que, si $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, les α_i étant des rationnels, $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$ (poser $\alpha_i = \dfrac{u_i}{d}$ où $(u_i, d) \in \mathbb{N}^2$, d étant le p.p.c.m. des dénominateurs des α_i).

(4) En déduire l'équivalence :
f est continue sur l'intérieur de E et semiconvexe sur I ssi f est convexe sur I.

Exercice 1.3.6. **F C**

On suppose que $\forall i \in [1, n], x_i > 0, \alpha_i > 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Montrer alors que :

$$x_1{}^{\alpha_1} x_2{}^{\alpha_2} \dots x_n{}^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Exercice 1.3.7. **D**

Soit $(a_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, si $r \in \mathbb{R}^*$, on définit :

$$M_r(a) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \ (a = (a_i)).$$

(1) Définir $M_0(a)$ et montrer que $\forall r > 0, M_r(a) \geqslant M_0(a)$. Calculer $\lim\limits_{r \to \pm\infty} M_r(a)$.

(2) Calculer la dérivée logarithmique de $M_r(a)$ et montrer que $M_r(a)$ est croissante en utilisant la convexité de la fonction $x \ln x$.

Exercice 1.3.8. **I**

On suppose que $0 < m < n$ et que $a > 0$.

(1) Montrer que $\left(1 + \dfrac{a}{m}\right)^{m/n} \leqslant 1 + \dfrac{a}{n}$
(écrire que $1 = 1^{(n-m)/n}$ et utiliser l'inégalité $\alpha\beta b \leqslant \dfrac{1}{p}\alpha^p + \dfrac{1}{q}\beta^q$ si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$).

(2) En déduire que $a \leqslant \left(1 + \dfrac{m(a^{1/m} - 1)}{n}\right)^n$.

(3) Montrer alors que $n(a^{1/n} - 1) < m(a^{1/m} - 1)$.

---

2. Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles

2.1.

Exercice 2.1.1. **I C**

Soit φ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, f une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que : $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leqslant \dfrac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$ $(=\alpha(u))$ pour $a<s<t<u<b$.
En déduire que, si $\beta = \inf\limits_{t<u<b} \alpha(u)$ alors : $\varphi(s) \geqslant \varphi(t)+\beta(s-t)$ et ceci pour tout s.
En prenant $t=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, prouver que :

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 (\varphi\circ f)(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) Soit $h\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}_+)$, $A=\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$, montrer que

$$\sqrt{1+A^2} \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+h^2(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 1+A.$$

Si $h=f'$, donner une interprétation géométrique de ces inégalités ; cas d'égalité ?

Exercice 2.1.2. **F**

On pose $I=[a,b], x_k = a+k\dfrac{b-a}{n}, 0\leqslant k\leqslant n, f\in\mathbb{R}^I$ et $r_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

(1) Si f est croissante, montrer que : $0\leqslant r_n \leqslant \dfrac{b-a}{n}(f(b)-f(a))$.
(2) Si f est de classe C^1, montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} nr_n = \dfrac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$.

Exercice 2.1.3. **I C**

Soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} = M$.

Exercice 2.1.4. **D C**

Soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\varphi\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de période T. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.\int_0^T \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2.1.5. **I**

Chercher les limites des suites :

1 - $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^n [\sqrt{k}]$ 2 - $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^n k^2 e^{-\frac{k^2}{n^2}}$ 3 - $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{(n+p)(n+p+1)}}$

4 - $u_n = \sin\frac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{p=0}^n \tan\frac{p\pi}{4n}$ 5 - $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$ 6 - $u_n = \left[\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{1/n}$

Exercice 2.1.6. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $r \in]-1,1[$, calculer le produit : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-2r\cos 2\frac{k\pi}{n}+r^2)$.

En déduire la valeur de $I(r)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta$.

Que dire de $I(r)$ si $|r|>1$?.

Exercice 2.1.7. $\boxed{\textbf{D}}$

Que dire d'une fonction f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ telle que : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|=\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$?

---

3. Intégration et dérivation

3.1. Primitives et intégrales d'une fonction continue.

Exercice 3.1.1. $\boxed{\textbf{F C}}$

Soient f et g 2 fonctions continues sur $[a,b]$; $f \searrow$ et $0 \leqslant g \leqslant 1$.

Montrer que :

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{a+\lambda} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ où } \lambda=\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(Considérer $F(y)=\displaystyle\int_a^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(y)=\displaystyle\int_a^{a+h(y)} f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $h(y)=\displaystyle\int_a^y g(t)\,\mathrm{d}t$.)

Cas d'égalité lorsque f est strictement décroissante ?

Exercice 3.1.2. $\boxed{\textbf{I C}}$

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont la dérivée est continue par morceaux.

On suppose que : $f(a)=f(b)=0$ et que : $|f'(x)|\leqslant M$.

Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Cas d'égalité ?

Exercice 3.1.3. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit f une fonction à valeurs réelles, dérivable sur $[0,a]$, primitive d'une fonction continue par morceaux, telle que $f(0)=0$.

Montrer que l'on a :

$$\int_0^a |f'(t)f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Étudier les cas d'égalité lorsque f' est continue.

Exercice 3.1.4. **F**

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; on définit sur $\mathbb{R}^*$: $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(1) g a-t-elle une limite en 0 ?
(2) Si f est dérivable en 0, g est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 3.1.5. **F**

Trouver $(a,b,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \alpha P(a) + \beta P(b).$$

Exercice 3.1.6. **F**

Dérivée de $f(x) = \displaystyle\int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1+\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3.1.7. **F**

Déterminer les fonctions $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3.1.8. **F**

Pour $x > 0, x \neq 1$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

(1) Prolonger f par continuité en 0 et en 1.
(2) Étudier les variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 3.1.9. **I**

Trouver l'équivalent en 0^+ de $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3.1.10. **I C**

Soit $p(x) = \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[(x^2-1)^k\right]$.

(1) Montrer que : $\displaystyle\int_{-1}^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x = 0$ si q est un polynôme de degré $< k$.
(2) Montrer que les racines de p sont réelles, simples et qu'elles appartiennent à l'intervalle]-1,1[.
(3) Soit $a(x)$ un polynôme de degré k ; montrer que $\displaystyle\int_{-1}^1 a(x)p(x)\,\mathrm{d}x = C(a)\int_{-1}^1 p^2(x)\,\mathrm{d}x$; déterminer $C(a)$.

EXERCICE 3.1.11. **F**

Soit f une fonction réglée vérifiant : $f(a+b-x) = f(x)$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 3.1.12. **F**

Soit $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R}^+)$ vérifiant :

$$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ f(x) \leqslant k\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose $\tilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, étudier les variations de la fonction $g(x) = e^{-kx}f(x)$; en déduire que $f \equiv 0$.

EXERCICE 3.1.13. **F C** Irrationalité de π.

(1) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$, on pose : $p_n(x) = \dfrac{x^n(bx-a)^n}{n!}$. Prouver que p_n, ainsi que toutes ses dérivées, prennent des valeurs entières pour $x = 0$ et $x = \dfrac{a}{b}$ (développement de Mac-Laurin).

(2) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^\pi p_n(x)\sin x\,\mathrm{d}x$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

(3) Supposons que π soit rationnel : $\pi = \dfrac{a}{b}$. Montrer alors que $I_n \in \mathbb{N}$ et que l'on a une contradiction.

EXERCICE 3.1.14. **F**

Calculer la dérivée de $f(x) = \displaystyle\int_2^x tx\sin(x+t)\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 3.1.15. **F**

Soit $f(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(a\sin x)\,\mathrm{d}x$, $g(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-a\sin x}\,\mathrm{d}x$, $h(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin^3 x + a^3\cos^3 x}}$.

Déterminer les limites quand $a \to 0$ de $f(a), g(a), h(a)$.

EXERCICE 3.1.16. **I**

Soit $\forall (p,q) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\forall x \in [0,1[$, $h_{p,q}(x) = \displaystyle\int_0^x t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in [0,1[\ : a h_{p,q}(x) + b h_{p-1,q-1}(x) = (cx-q)x^p(1-x)^q.$$

En déduire $I(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt[3]{\frac{t^5}{(1-t)^{11}}}\,\mathrm{d}t$.

3.2. Formules de Taylor.

Exercice 3.2.1. **I C**
Soit $I =]a, b[$ et $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ telle que f et f'' soient bornées sur I. On pose $b - a = 2l$, $M_0 = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$, $M_2 = \sup\limits_{x \in I} |f''(x)|$.

(1) Soit $x_0 \in]a, b[$, $\lambda > 0$ tel que l'intervalle $\mathcal{I}(x_0, \lambda) = [x_0 - \lambda, x_0 + \lambda]$ soit contenu dans I et x dans $\mathcal{I}(x_0, \lambda)$.
Montrer que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2$
(estimer les différences $f(x_0 + \lambda) - f(x)$ et $f(x_0 - \lambda) - f(x)$ avec la formule de Taylor).

(2) Soit $0 < \lambda < l$, montrer que $\forall x \in I$, $\exists X \in]a, b[$, $x \in \mathcal{I}(X, \lambda)$ $(\mathcal{I}(X, \lambda) \subset I)$.
En déduire que f' est bornée dans I et que, si $M_1 = \sup\limits_{x \in I} |f'(x)|$ alors $M_1 \leqslant \dfrac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2$.

(3) Montrer que si $l \geqslant \sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$ alors $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 3.2.2. **I**

(1) Soit g une fonction impaire, de classe $\mathcal{C}^5$ dans un voisinage de 0. Écrire la formule de Taylor intégral pour g et g' à l'ordre 5. Montrer alors que
$$|g(x) - \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0))| \leqslant \frac{|x|^5}{180} \sup_{t \in [0,x]} |g^{(5)}(t)|.$$

(2) En déduire que, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, b]$ alors
$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(4)}(t)|.$$

Exercice 3.2.3. **F**
Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ déterminer
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + 3h) - 3f(x + 2h) + 3f(x + h) - f(x)}{h^3}.$$

3.3. Développements limités.

Exercice 3.3.1. **I C**
Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$ $(n \geqslant 0)$.
Étudier sa convergence et déterminer un réel α tel que la suite $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ admette une limite finie non nulle (on utilisera le développement limité de $(1 + x)^\alpha$.
En déduire la partie principale de u_n. Que penser de la vitesse de convergence ?

Exercice 3.3.2. **F**
Soit $f\ : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ qui admet un développement limité d'ordre 2 en 0.
Étudier la convergence de la suite : $u_n = nA + \sum\limits_{p=1}^{n} f\left(\dfrac{p}{n^\alpha}\right)$ où $\alpha \geqslant \dfrac{3}{2}$, $A \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 3.3.3. **D C** Développement limité de la fonction réciproque.
Soit f une fonction strictement monotone au voisinage de 0, admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 qui s'écrit : $f(x) = a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$ où $a_1 \neq 0$. Montrer par récurrence sur p que $g = f^{-1}$ admet un développement limité à l'ordre p et donner les relations entre $(a_1, \dots, a_p)$ et $(b_1, \dots, b_p)$ où $g(x) = b_1x + \cdots + b_px^p + o(x^p)$.

EXERCICE 3.3.4. **F**

Étude locale au voisinage du point stationnaire pour (1) $\begin{cases} x = e^{t-1} - t \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = \displaystyle\int_1^t \frac{u^2-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ y = \displaystyle\int_1^t \frac{u^2-1}{u^3+1}\,\mathrm{d}u \end{cases}$.

EXERCICE 3.3.5. **I T**

Soit Γ la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) &= 2t^2 - 2t + \dfrac{1}{t^2} \\ y(t) &= 2t + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$.

(1) Étudier cette courbe et donner les coordonnées du point double.
(2) Trouver l'équation de la parabole asymptote (on cherchera a, b, c tels que sur une branche infinie on ait $y^2 - ax^2 - bx - c \to 0$).

EXERCICE 3.3.6. **I T**
Chercher le développement limité à l'ordre n au voisinage de t pour :
a) $\dfrac{x}{e^x - 1}$: $n = 4, t = 0$ (que penser du développement limité à l'ordre $2p$?)
b) $(1 + \arctan x)^{\frac{x}{\sin^2 x}}$: $n = 2, t = 0$ c) $\dfrac{1}{x(e^x-1)} - \dfrac{1}{x^2}$: $n = 2, t = 0$
d) $\displaystyle\int_0^{\sin x} \frac{\cos u}{\sqrt{1 - \sin^4 u}} du$: $n = 6, t = 0$ e) $\displaystyle\int_0^{\arctan x} \frac{du}{\sqrt{\cos^4 u + 2\sin^4 u}}$: $n = 8, t = 0$
f) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{x}{\tan x}}\right)$: $n = 4, t = 0$ g) F et F^{-1} où $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{du}{\sqrt{u^3 - 2u + 1}}$: $n = 2, t = 0$.
h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2\sqrt{-x}} \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctan}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, ordre n quelconque, $t = 0$.

EXERCICE 3.3.7. **D**
Si $\alpha > 0$, démontrer que

$$1^{\alpha n} + 2^{\alpha n} + \cdots + n^{\alpha n} \sim \frac{n^{\alpha n}}{1 - e^{-\alpha}}$$

(majorer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left|\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\alpha n} - e^{-k\alpha}\right|$ en la décomposant en 2.

Exercice 3.3.8. **F T**

Partie principale en 0 de $\ln(\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})) - \dfrac{3\sin x}{1+2\cos x}$.

Exercice 3.3.9. **F T**

Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh} x}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\dfrac{1}{x^x-1}}$;

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$; $\lim\limits_{x\to2}(2^x+3^x-12)^{\tan\frac{\pi x}{4}}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin^x x-\operatorname{sh}^x x}{\sin^{2x} x - x^{2\operatorname{sh} x}}$.

Exercice 3.3.10. **D**

Soit (u_n) une suite de réels telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n > -1$.

(1) Montrer que si $u_n = o(\sqrt{n})$ alors $\left(1+\dfrac{u_n}{n}\right)^n \sim e^{u_n}$.
(2) Montrer que si $u_n - \ln(1+u_n) \to 0$ alors $u_n \to 0$.
(3) Montrer la réciproque du 1.

---

1. Indications :

Indication 1.1.1 Écrire $|f(x)-f(\frac{x}{2})-a\frac{x}{2}| < \varepsilon\frac{x}{2},\dots,|f(\frac{x}{2^{n-1}})-f(\frac{x}{2^n})-a\frac{x}{2^n}| < \varepsilon\frac{x}{2^n}$ et additionner.

Indication 1.1.2 a) $f"(x) = -f(x)$ d'où $f(x) = a\cos(x-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4})$, b) de même, $f''(x) = -f(x)$ d'où $f(x) = a\cos(x-\frac{\pi}{4})$.

Indication 1.1.3 Avec un D.L. on obtient $s = \frac{1}{2}f'(0)$.

Indication 1.1.4 En décomposant la fraction rationnelle on trouve $f^{(n)}(0) = n!\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

Indication 1.1.5 Utiliser une récurrence et la formule de Leibniz.

Indication 1.1.6 On utilise Leibniz avec $f = (1-x)^{n+\alpha}$ et $g = (1+x)^{n+\alpha}$.

Indication 1.1.7 Se ramener en 0 puis intégrer l'équa. diff. $y + y' = \varepsilon$ où ε est une fonction qui tend vers 0.

Indication 1.1.8 Sur chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi[$ on a une unique racine x_n.
$a=0$: écrire $x_n - n\pi = \operatorname{Arctan} x_n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{x_n}$ ce qui donne $-x_n + n\pi + \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$.
$a \neq 0$ alors $x_n = n\pi + \frac{1}{\pi a^2 n}(1+o(1))$.

Indication 1.1.9 $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - 2nxP_n(x)$ puis $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2i}(n-1)!\frac{(x+i)^n-(x-i)^n}{(x^2+1)^n}$ d'où P_n. Utiliser alors l'égalité $(x+i) = (1+x^2)^{1/2}e^{i\operatorname{Arctan} 1/x}$. Les racines de P_n sont $x = \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n}$, $k\in[1,n-1]$.

Indication 1.1.10

(1) On trouve (pour $n \geqslant 2$),
$(1+2x\cos 2\alpha + x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)(x+\cos 2\alpha)f^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0$.
(2) $f^{(n)}(0) = (n-1)!(-1)^n\sin 2n\alpha$.

Indication 1.1.11

(1) Utiliser la formule de Taylor-intégral.
(2) Écrire que $\ln(1+x) - 2xT_n(x) = F(x) - xF'(x)$ où $F(x) = \int_0^x(\ln(1+t)-P_n(t))\,\mathrm{d}t$ et montrer que $\left|\int_0^x tF''(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x|F'(x)|$.

Indication 1.2.1 Prendre $\varphi(t) = f(t) - f(a) - \frac{t-a}{2}(f'(t) + f'(a)) + \frac{(t-a)^3}{12}\lambda$ où λ est choisi pour que $\varphi(b) = 0$ et utiliser 2 fois le théorème de Rolle.

Indication 1.2.2

(1) Prendre $\varphi(t) = f(t) - L(t) - \frac{1}{(n+1)!}(t - x_0)(t - x_1)(\cdots)(t - x_n)\lambda$ où λ est choisi pour que $\varphi(x) = 0$.

(2) Montrer que $\frac{1}{2^n}\cos((n + 1)\operatorname{Arccos} x)$ est un polynôme normalisé de degré n, si P_n est un polynôme normalisé de degré n, tel que $\sup_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| < \dfrac{1}{2^n}$ alors montrer que $T_n - P_n$ a $n + 1$ racines.

(3) Pour approcher f par son polynôme d'interpolation de Lagrange sur $[-1, 1]$, on a tout intérêt à prendre les abscisses de Chebychev.

Indication 1.2.3 On trouve $\theta = \frac{1}{2}$, pour l'interprétation géométrique considérer une parabole.

Indication 1.2.4 Étudier les fonctions.

Indication 1.2.5

(1) Montrer par récurrence que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}e^{-1/x}$ si $x > 0$.

(2) Remarquer que $g(x) = f(1 - x^2)$.

Indication 1.2.6 Choisir K pour que $\varphi(h) = 0$ et appliquer deux fois le théorème de Rolle.

Indication 1.2.7

(1) Pour le premier point, cf. question (iv) page 65 ou considérer $A = \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$et utiliser la connexité par arcs.

(2) Appliquer la propriété du 1 à la fonction $g(x) = f(x) - tx$.

Indication 1.2.8 (1) faire un dessin, $(u_{2n}) \nearrow$, $(u_{2n+1}) \searrow$, (u_n) converge.
(2) La suite ne converge pas.
(3) Avec $f(x) = |(x - 1)\sin x|$ alors $f(x) \leqslant x$, la suite (u_n) converge vers 0.
(4) Avec $f(x) = \frac{1}{x^2-1}+1$ et $I =]1, +\infty[$ alors $f(I) \subset I$, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones mais (u_n) ne converge pas.

Indication 1.2.9 Si $u_1 < u_0$ alors (u_n) est décroissante, sinon elle est croissante. Dans le premier cas, elle converge (minorée par 0) et on montre dans le second cas qu'elle est bornée.

Indication 1.3.1

(1) Si $\exists x_0, f'(x_0) > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et pour une fonction convexe croissante, on a les mêmes résultats.

(2) $f \nearrow, f \geqslant 0 \Rightarrow f(x)$ a une limite en $-\infty$, de même pour f' qui en fait tend vers 0. Écrire ensuite que $f(x) - f(2x) = (-x)f'(z)$ pour conclure $\lim\limits_{x\to-\infty} xf'(x) = 0$.

Indication 1.3.2 Montrer que φ est croissante en montrant la croissance sur $[\frac{a+b}{2}, b]$ de la fonction $g(x) = (2x - a - b)(f'(x) + f'(a + b - x)) - 2(f(x) - f(a + b - x))$.

Indication 1.3.3 Montrer par récurrence que $\forall k \in [0, 2^n]$,
$f\left[\frac{k}{2^n}x + (1 - \frac{k}{2^n})y\right] \leqslant \frac{k}{2^n}f(x) + (1 - \frac{k}{2^n})f(y)$.

Indication 1.3.4 Montrer que, pour $x < y < z$ on a $p_{xy} \leqslant p_{yz}$ où p_{xy} désigne la pente $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$: poser $N = \left[\frac{z-x}{h_0}\right] + 1$, $\frac{z-x}{n} \leqslant h_0$ puis $y_k = a + k\frac{z-x}{n}$ pour $n \geqslant 2$. Montrer que $\forall k \in [1, n - 1]$, $p_{xy_k} \leqslant p_{y_ky}$.

Indication 1.3.5

(1) Faire une récurrence sur k : partager la somme $x_1 + \cdots + x_n$ en deux parties égales.

(2) Procéder par récurrence sur k, si n est pair, on écrit $n = 2p$ et on utilise l'hypothèse de récurrence, si $n = 2p + 1$, on pose $S_1 = x_1 + \cdots + x_{p+1}$, $S_2 = x_{p+2} + \cdots + x_{2p+1} + \frac{S}{2p+1}$, $S = x_1 + \cdots + x_n$ et on remarque que $S = \frac{2p+1}{2p+2}(S_1 + S_2)$.

(3) Comme $\sum_{i=1}^n u_i = d$, écrire que $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^d x'_j$.

(4) On a prouvé que si f est semi-convexe alors $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$ pour tout rationnel t compris entre 0 et 1, on utilise alors la continuité de f sur l'intérieur de E.

Indication 1.3.6 Utiliser par exemple la convexité de l'exponentielle.

Indication 1.3.7

(1) Écrire $a_i^r = 1 + r\ln a_i + o(r)$ et prendre $M_0 = \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}$ et montrer que la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique. Montrer ensuite que : $\lim\limits_{r\to+\infty} M_r(a) = \sup a_i$ et $\lim\limits_{r\to-\infty} M_r(a) = \inf a_i$.

(2) Poser $\ln M_r(a) = g(r)$ et, en posant $h(x) = x\ln x$, montrer que

$$g'(x)r^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^r\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(a_i^r) - h\left(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^r\right)\right) \geqslant 0.$$

Indication 1.3.8

(1) Prendre $\alpha = \left(1+\frac{a}{m}\right)^{m/n}$ et $\beta = 1$, $p = \frac{n}{m}$, $q = \frac{n}{n-m}$.

(2) Poser $A = \left(1+\frac{a}{m}\right)^m$ et utiliser l'inégalité ci-dessus.

Indication 2.1.1

(1) Première inégalité : évidente, pour $t < s$ il suffit d'exprimer que $\alpha(s) \geqslant \beta$.

(2) On prend $\varphi(x) = \sqrt{1+x^2}$ pour la première inégalité et pour la deuxième, on écrit que $\sqrt{1+h^2(x)} \leqslant 1+h(x)$. On a égalité dans $\sqrt{1+A^2} \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+h^2(x)}\,\mathrm{d}x$ ssi h est constante.

Indication 2.1.2

(1) Montrer que $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \dfrac{b-a}{n} f(x_k)$ et $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{b-a}{n} f(x_{k+1})$.

(2) En écrivant que $f(t)-f(x_k) = (t-x_k)f'(z)$, montrer que $\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(t)-f(x_k))\,\mathrm{d}t = f'(z_k)\frac{(b-a)^2}{2n^2}$ et utiliser les sommes de Riemann.

Indication 2.1.3 Si $\varepsilon > 0$, montrer que $\exists [c,d] \subset [a,b] \mid \forall x \in [c,d], |f(x)| \geqslant M - \varepsilon/2$ et montrer que $(M-\varepsilon/2)(d-c)^{1/n} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n} \leqslant M(b-a)^{1/n}$.

Indication 2.1.4 Démontrer que la propriété est vraie pour une fonction constante, puis pour une fonction en escalier et utiliser le fait que toute fonction continue est limite uniforme de fonctions en escalier.

Indication 2.1.5 On utilise ici des sommes de Riemann.

(1) Utiliser $\sqrt{k}-1 < [\sqrt{k}] \leqslant \sqrt{k}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

(2) Si $\alpha = 3$: $\lim u_n = \int_0^1 x^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\alpha > 3$: $\lim u_n = 0$, $\alpha < 3$: $\lim u_n = +\infty$.

(3) Utiliser l'encadrement $(n+p)^2 \leqslant (n+p)(n+p+1) \leqslant (n+p+1)^2$, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

(4) $u_n \sim \frac{\pi}{n}\sum_{p=0}^n \tan\frac{p\pi}{4n}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\ln 2$.

(5) $\ln u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(1+\frac{k^2}{n^2})$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$.

(6) $\ln u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(1+\frac{k}{n})$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\ln 2 - 1$.

Indication 2.1.6 Écrire que $1 - 2r\cos 2\frac{k\pi}{n} + r^2 = (r - e^{2i\frac{k\pi}{n}})(r - e^{-2i\frac{k\pi}{n}})$ et en déduire que $\Pi_n = (r^n-1)^2$ puis $I(r) = 0$ (grâce aux sommes de Riemann).
Si $|r| > 1$, alors $I(r) = 4\pi\ln|r| + I(1/r) = 4\pi\ln|r|$.

Indication 2.1.7 Montrer que $\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$ pour $x \in [a,b]$ puis prouver que f a un argument constant en prenant $g = \Re(f)$ et $h = \Im(f)$ ou en raisonnant par l'absurde.

Indication 3.1.1 Montrer que $F'(y) \leqslant G'(y)$. Les cas d'égalité sont obtenus lorsque g est constante égale à 0 ou 1 (raisonner par l'absurde).

Indication 3.1.2 Majorer $|f|$ par $M(t-a)$ sur $[a, \frac{a+b}{2}]$ et par $M(b-t)$ sur $[\frac{a+b}{2}, b]$. On a égalité si $|f|$ est égale à ses majorants.

Indication 3.1.3 Écrire que $f(t) = \int_0^t f'(u)\,\mathrm{d}u$, étudier le cas où $f' \geqslant 0$ puis s'y ramener. Le cas d'égalité est obtenu lorsque $f(x) = \alpha x$.

Indication 3.1.4 On a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$.

Indication 3.1.5 Écrire les égalités obtenues pour $P = 1$, $P = X$, $P = X^2$, $P = X^3$ et on obtient $a = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ et $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Indication 3.1.6 $f'(x) = e^x\sqrt{1+x^2} + e^{-x}\sqrt{1+x^{-2}}$.

Indication 3.1.7 f est dérivable puis on dérive par rapport à x et à y d'où les solutions $f(x) = \frac{2}{\omega}\sin\omega x$, $f(x) = \frac{2}{\omega}\operatorname{sh}\omega x$, $f(x) = 2x$ et $f = 0$.

Indication 3.1.8 On trouve $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ln 2$, en 0, on a une tangente verticale, en 1, un point d'inflexion et une tangente de pente 1 et en $+\infty$ une branche parabolique d'axe Oy.

Indication 3.1.9 $f(x) \sim \ln x$ en majorant $f(x) - \int_{x^2}^{x^3} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Indication 3.1.10

(1) On intégre p k fois, on dérive q k fois.
(2) Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_h$ les racines de p d'ordre impair dans $]-1,1[$, poser $q(x) = (x-x_1)(\cdots)(x-x_h)$ et raisonner par l'absurde.
(3) Examiner le coefficient de x^k dans $p(x)$, on trouve $C(a) = \frac{a_k}{(2k)!}k!$.

Indication 3.1.11 Faire le changement de variable $u = a + b - x$.

Indication 3.1.12 On montre que g est positive et décroissante.

Indication 3.1.13

(1) On a $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{n+k}}{n!}\binom{n}{k}(-a)^{n-k}b^k$ et on remarque que $p(\frac{a}{b} - x) = p(x)$.
(2) On a : $|p_n(x)| \leqslant \frac{\pi^n(b\pi+a)^n}{n!}$.
(3) On intégre I_n par parties $2n$ fois et on prouve que $I_n \in \mathbb{Z}$.

Indication 3.1.14 Développer le sinus, on trouve
$f'(x) = \int_2^x t[\sin(x+t) + x\cos(x+t)]\,\mathrm{d}t + x^2\sin 2x$.

Indication 3.1.15 On trouve respectivement : $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $+\infty$.

Indication 3.1.16 $a = (p+q)(p+q+1)$, $b = -pq$, $c = p+q$ et $I(x) = \frac{3}{8}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{8/3}$.

Indication 3.2.1

(1) On a $f(x_0 \pm \lambda) - f(x) = (x_0 \pm \lambda - x)f'(x) + \frac{(x_0\pm\lambda-x)^2}{2}f''(x_\pm)$ et on retranche ces deux égalités d'où $2\lambda f'(x) = f(x_0+\lambda) - f(x_0-\lambda) + \frac{(x_0-\lambda-x)^2}{2}f''(x_-) - \frac{(x_0+\lambda-x)^2}{2}f''(x_+)$.
(2) Si $x \leqslant a + 2\lambda$, on prend $X = a + \lambda + \varepsilon$, si (lorsque c'est possible) $a + 2\lambda < x \leqslant \frac{a+b}{2}$ on prend $X = x$. Enfin, si $x \geqslant b - 2\lambda$ alors, on prend $X = b - \lambda - \varepsilon$.
(3) On étudie la fonction de λ : $\frac{M_0}{\lambda} + \lambda M_2$.

Indication 3.2.2

(1) On a $g(x) = xg'(0) + \frac{x^3}{6}g'''(0) + \frac{1}{24}\int_0^x (x-t)^4 g^{(5)}(t)\,\mathrm{d}t$ et
$$g'(x) = g'(0) + \frac{x^2}{2}g'''(0) + \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 g^{(5)}(t)\,\mathrm{d}t.$$
(2) Appliquer la formule précédente à $g(t) = F\left(\frac{a+b}{2} + t\right) - F\left(\frac{a+b}{2} - t\right)$ où $F(u) = \int_a^u f(t)\,\mathrm{d}t$ en $x = \frac{b-a}{2}$.

Indication 3.2.3 On écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 et on trouve
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3} = f'''(x)$.

Indication 3.3.1 $u_1 \in [-1, 1]$ puis, pour $n \geqslant 1$, les (u_n) gardent un signe constant. On montre alors que $u_n \to 0$. Puis, avec un développement limité, on prouve que $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} \to \frac{1}{3}$ d'où $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Indication 3.3.2 Avec $f(x) = f(0) + a_1x + a_2x^2 + x^2\varepsilon(x)$ on a $u_n = n[A + f(0)] + a_1\frac{n(n+1)}{2n^\alpha} + a_2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^{2\alpha}} + \sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{n^{2\alpha}}\varepsilon(\frac{p}{n^\alpha})$ et on distingue les cas
$A + f(0) \neq 0$, $A + f(0) = 0$ et $\alpha = 2$, $\alpha > 2$, $\alpha < 2$ et $a_1 \neq 0$, $a_1 = 0$ et $\alpha > \frac{3}{2}$, $\alpha = \frac{3}{2}$.

Indication 3.3.3 À l'ordre 1 : $g(y) = x$ où $y = f(x) = a_1x + o(x)$, $y \sim a_1x$ donc $o(y) = o(x)$ et $g(y) = b_1y + o(y)$ où $a_1b_1 = 1$. Puis on fait une récurrence : si $g(y) = b_1y + \cdots + b_py^p + y^p\varepsilon_p(y)$ alors, les coefficients b_p vérifient la relation $b_pa_1^p = -\sum \frac{k!}{n_1!\ldots n_p!}a_1^{n_1} \ldots a_p^{n_p}b_k$.

Indication 3.3.4 On obtient des points de rebroussement de première et deuxième espèce.

Indication 3.3.5 Pour $t = 1$ on a un point singulier, on vérifie qu'il correspond à un point de rebroussement de première espèce.
$t \to 0$ $y - x = 4t - 2t^2$ fourni l'asymptote et la position de la courbe par rapport à celle-ci.
Point double : on résout les équations $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$ avec $t_1 \neq t_2$. t_1 et t_2 (après simplifications) sont solutions de $t^2 - 2t - 1 = 0$ et les coordonnées du point double sont $(7, 5)$.
$y^2 - 2x - 2y \sim \frac{4}{t}$ quand $t \to \infty$ donc la parabole d'équation $y^2 - 2x - 2y = 0$ est asymptote à la courbe.

Indication 3.3.6 a) $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$, b) $e(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24}) + o(x^2)$, c) $-\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{x^2}{720} + o(x^2)$, d) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$, e) $x - \frac{x^5}{5} + o(x^8)$, f) $\frac{\pi}{2}(\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{40}) + O(x^6)$, g) $x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, h)] $(1 + x)\left[1 - \frac{x}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{2n+1} + o(x^n)\right]$.

Indication 3.3.7 On prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left|\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\alpha n} - e^{-k\alpha}\right|$.

Indication 3.3.8 $\frac{x^5}{180}$.

Indication 3.3.9 On trouve dans l'ordre : 1 ; $+\infty$; 0 ; $(2^{16}3^{36})^{-\frac{1}{\pi}}$; 0 ($\sim \frac{x}{2}$).

Indication 3.3.10

(1) On prend le logarithme : $\ln(1 + \frac{u_n}{n})^n = u_n + o(1)$.
(2) Poser $f(x) = x - \ln(1 + x)$ et prouver que $f(x) \to 0 \Leftrightarrow x \to 0$.
(3) Prendre le logarithme $u_n - n\ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right) \to 0$ et appliquer le résultat de la question 2 à $v_n = \frac{u_n}{n}$.

1. Solutions

Solution 1.1.1 On écrit :

$$|f(x) - f(\frac{x}{2}) - a\frac{x}{2}| < \varepsilon\frac{x}{2}$$
$$|f(\frac{x}{2^{n-1}}) - f(\frac{x}{2^n}) - a\frac{x}{2^n}| < \varepsilon\frac{x}{2^n}$$

d'où en additionnant :

$$|f(x) - f(\frac{x}{2^n}) - ax(1 - \frac{1}{2^n})| < \varepsilon x(1 - \frac{1}{2^n}) < \varepsilon x.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$: $|f(x) - f(0) - ax| < \varepsilon x$ donc f est dérivable en 0.

Solution 1.1.2
a) $f"(x) = -f'(1-x) = -f(x)$ d'où $f(x) = a\cos(x - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4})$.
b) De même, $f''(x) = -f(x)$ d'où $f(x) = a\cos(x - \frac{\pi}{4})$.

Solution 1.1.3 On a : $f(\frac{k}{n^2}) = \frac{k}{n^2}f'(0) + \frac{k}{n^2}\varepsilon_k$ d'où : $s_n - \frac{1}{2}f'(0) = \frac{1}{2n}f'(0) + \varepsilon$ ce qui donne à la limite $s = \frac{1}{2}f'(0)$.

Solution 1.1.4 On décompose la fraction rationnelle pour la dériver plus facilement :

$$f(x) = \frac{1}{2i\sin\theta}\left(\frac{1}{e^{-i\theta} - x} - \frac{1}{e^{i\theta} - x}\right) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2i\sin\theta}\left(\frac{1}{(e^{-i\theta} - x)^{n+1}} - \frac{1}{(e^{i\theta} - x)^{n+1}}\right)$$

donc $f^{(n)}(0) = n!\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

Solution 1.1.5 Par récurrence : vrai à l'ordre 0, puis on écrit que $f_{n+1}(x) = xf_n(x)$ et on utilise la formule de Leibniz (*théorème 4.4 page 69*).

Solution 1.1.6 On utilise Leibniz avec $f = (1-x)^{n+\alpha}$ et $g = (1+x)^{n+\alpha}$.

Solution 1.1.7 On se ramène en 0 en posant $g(x) = f(x) - l$ d'où : $(e^x g(x))' = e^x o(1)$ donc, en intégrant, $g(x) = e^{-x}g(0) + e^{-x}\int_0^x e^t o(1)\,\mathrm{d}t$ voir la méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire (*proposition 2.2.3 page 39*). En décomposant l'intégrale en 2 (méthode de Césaro) on prouve que $g(x) \to 0$.

Solution 1.1.8 Sur chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ on aura une unique racine x_n : en effet, si on pose $f(x) = \tan x - \dfrac{x}{1+a^2x^2}$ alors $f'(x) = 1 + \tan^2 x - \dfrac{1-a^2x^2}{(1+a^2x^2)^2} > 0$ (sauf pour $x = 0$). f est donc strictement croissante et a pour limites respectives $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes de cet intervalle ce qui permet de conclure.
$a = 0$: $\lim x_n = +\infty$ alors, en faisant intervenir la fonction Arctan dans $\tan x_n = x_n$ on a :

$$x_n - n\pi = \operatorname{Arctan} x_n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{x_n}$$

(on utilise ici le *théorème 2.4 page 36*) ce qui donne $-x_n + n\pi + \dfrac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$ car $\operatorname{Arctan} u \sim u$ au voisinage de 0.
$a \neq 0$: $\lim \tan x_n = 0$ d'où, à l'aide de la formule ci-dessus : $x_n = n\pi + \dfrac{1}{\pi a^2 n}(1 + o(1))$.

Solution 1.1.9 Par récurrence sur n, en dérivant, on trouve :

$$P_{n+1}(x) = (1 + x^2)P_n'(x) - 2nxP_n(x)$$

puis, en utilisant le 1.1.4

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2i}(n-1)!\frac{(x+i)^n - (x-i)^n}{(x^2+1)^n}$$

d'où P_n.
Comme : $(x + i) = (1 + x^2)^{1/2}\dfrac{x + i}{\sqrt{1 + x^2}} = (1 + x^2)^{1/2}e^{i \operatorname{Arctan} 1/x}$ on a :

$$P_n(x) = (-1)^{n-1}(1 + x^2)^{n/2}(n - 1)! \sin(n \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}).$$

Les racines de P_n sont alors : $x = \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n},\ k \in [1, n - 1]$.

Solution 1.1.10

(1) On a $f'(x) = \dfrac{-\sin 2\alpha}{1 + 2x\cos\alpha + x^2}$, donc $(1+2x\cos 2\alpha+x^2)f'(x) = -\sin 2\alpha$ et en dérivant $n-1$ fois cette relation on trouve (pour $n \geqslant 2$),

$$(1 + 2x\cos 2\alpha + x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)(x + \cos 2\alpha)f^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0$$

en appliquant la formule de Leibniz (*théorème 4.4 page 69*).

(2) Pour trouver $f^{(n)}(0)$, on pose $f^{(n)}(0) = (n-1)!u_n$, on obtient alors la relation de récurrence : $u_n + 2\cos 2\alpha u_{n-1} + u_{n-2} = 0$; d'où $f^{(n)}(0) = (n-1)!(-1)^n \sin 2n\alpha$.

Solution 1.1.11

(1) En majorant le reste intégral dans la formule de Taylor, on a :

$$|\ln(1 + x) - P_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \sup_{t\in[0,x]} \frac{1}{(1+t)^n}.$$

L'inégalité est alors immédiate.

(2) On a $\ln(1 + x) - 2xT_n(x) = F(x) - xF'(x)$ où $F(x) = \displaystyle\int_0^x (\ln(1 + t) - P_n(t))\,\mathrm{d}t$. Or

$$F(x) - xF'(x) = -\int_0^x tF''(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } F''(t) = (-1)^n\frac{x^n}{1+x}$$

garde un signe constant sur $[0, 1]$ donc :

$$\left|\int_0^x tF''(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x\left|\int_0^x F''(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x|F'(x)|.$$

On obtient alors $|\ln(1 + x) - 2xT_n(x)| \leqslant x|F'(x)| \leqslant \dfrac{x}{n+1}$.

Solution 1.2.1 On prend : $\varphi(t) = f(t) - f(a) - \dfrac{t-a}{2}(f'(t) + f'(a)) + \dfrac{(t-a)^3}{12}\lambda$ où λ est choisi pour que $\varphi(b) = 0$, puis on utilise 2 fois le théorème de Rolle.
En effet, comme $\varphi(a) = \varphi(b)$, on sait qu'il existe $a_1 \in]a, b[$ tel que $\varphi'(a_1) = 0$.

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}[f'(t) - f'(a)] - \frac{t-a}{2}f''(t) + \lambda\frac{(t-a)^2}{4}.$$

On remarque alors que $\varphi'(a) = 0$ donc il existe $c \in]a, a_1[$ tel que $\varphi''(c) = 0$. Or, vu que $\varphi''(t) = -\dfrac{t-a}{2}f'''(t) + \lambda\dfrac{t-a}{2}$ on a $\lambda = f'''(c)$.
Ceci est une méthode générale pour trouver ce genre de relation, on remplace b par t et on utilise le théorème de Rolle plusieurs fois.
Remarque : cette égalité peut être utilisée pour obtenir la majoration de l'erreur dans la méthode des trapèzes.

Solution 1.2.2

(1) On prend ici : $\varphi(t) = f(t) - L(t) - \frac{1}{(n+1)!}(t-x_0)(t-x_1)(\cdots)(t-x_n)\lambda$ où λ est choisi pour que $\varphi(x) = 0$. Alors $\varphi(x_0) = \ldots = \varphi(x_n) = \varphi(x) = 0$ et on utilise le théorème de Rolle and Rolle (!) d'où : $\exists z \in \mathbb{R}\ : \varphi^{(n+1)}(z) = 0$ (comme L est un polynôme de degré $\leqslant n$ alors $L^{(n+1)}(t) = 0$).

(2) On montre que $\dfrac{1}{2^n}\cos((n+1)\operatorname{Arccos} x)$ est un polynôme normalisé de degré n ($\dfrac{1}{2^n}\cos((n+1)\theta) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos\theta.\cos(n+1)\theta + \dfrac{1}{2^n}\cos((n-1)\theta)$) dont les racines sont x_i. Si P_n est un polynôme normalisé de degré n, tel que $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|P_n(x)| < \dfrac{1}{2^n}$ alors grâce au T.V.I., on montre que $T_n - P_n$ a $n+1$ racines, ce qui est impossible car $\deg(T_n - P_n) \leqslant n$ (les termes de degré $n+1$ s'annulent).

(3) Si on veut approcher f par son polynôme d'interpolation de Lagrange sur $[-1, 1]$, on a tout intérêt à prendre les abscisses de Chebychev, dans ce cas

$$\|f - L\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n(n+1)!}\|f_n\|_\infty.$$

Solution 1.2.3 Immédiat, on trouve $\theta = \dfrac{1}{2}$.
L'interprétation géométrique est la suivante : pour une parabole, la corde joignant les points $(x, f(x))$ et $(x+h, f(x+h))$ est parallèle à la tangente au point $(x + \frac{h}{2}, f(x + \frac{h}{2}))$.

Solution 1.2.4 Il suffit d'étudier les fonctions. Ces inégalités sont très utiles et ne sont pas toujours rappelée dans le cadre d'un problème aussi il est intéressant de les connaître.

Solution 1.2.5

(1) On montre par récurrence que $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ avec $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}e^{-1/x}$ si $x > 0$, $f^{(n)}(x) = 0$ si $x \leqslant 0$.

(2) On remarque que $g(x) = f(1 - x^2)$ et par composition, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ceci est un exemple très important de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ non nulle et qui s'annule en dehors d'un segment.

Solution 1.2.6 On a supposé implicitement que $h \neq 0$. On choisit K pour que $\varphi(h) = 0$. Comme $\varphi(0) = 0$, le théorème de Rolle s'applique et il existe h_0 tel que $\varphi'(h_0) = 0$. Comme $\varphi'(0) = 0$, on peut à nouveau appliquer Rolle entre 0 et $h_0 \neq 0$. Il existe donc h_1 entre 0 et h_0 tel que $\varphi''(h_1) = 0$. Comme h_1 est strictement compris entre 0 et h, on peut poser $h_1 = \theta h$ avec $\theta \in]0, 1[$ et la propriété est démontrée.

Solution 1.2.7

(1) Pour le premier point, cf. question (iv) page 65.
On peut aussi considérer $A = \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$. A est convexe donc connexe par arcs. $g\ : (x, y) \in A \mapsto \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ est continue sur A donc $g(A) \subset \mathbb{R}^*$ est connexe par arcs (g n' s'annule pas).
Si $g(A) \subset] - \infty, 0[$ alors f est strictement décroissante.
Si $g(A) \subset]0, +\infty[$ alors f est strictement croissante.
f n'est pas monotone donc f n'est pas injective, il existe donc $x < y$ tels que $f(x) = f(y)$ et par application du théorème de Rolle, on en déduit l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(2) Soient $a < b$ 2 éléments de I, supposons que $f'(a) < f'(b)$, on veut prouver que, pour tout $t \in]f'(a), f'(b)[$ il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = t$. Il suffit d'appliquer la propriété du 1 à la fonction $g(x) = f(x) - tx$.
On a ainsi prouvé le théorème de Darboux qui dit que la fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution 1.2.8

- Faire un dessin, $(u_{2n}) \nearrow$, $(u_{2n+1}) \searrow$ et comme ces 2 suites sont bornées, elles sont convergentes. Comme $f \circ f(x) = x$ n'a que la solution $f(x) = x$ alors (u_n) converge.
- $f(x) = x$ donne $x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $f'(x) > 1$ donc la suite ne peut pas converger. On vérifie toutefois que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, la première vers 1, la deuxième vers 0.
- Soit $f(x) = |(x - 1)\sin x|$ alors $f([0, \pi]) \subset [0, \pi]$ et en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x \leqslant 1$ on a $f(x) \leqslant x$. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge et sa seule limite possible est 0.
- Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} + 1$ et $I =]1, +\infty[$ alors $f(I) \subset I$, f décroissante et l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution l dans I (faire une étude de f). $f \circ f$ est croissante donc les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
  - Si $u_0 < l$ alors $u_{2n} \searrow 1$ et $u_{2n+1} \nearrow +\infty$,
  - si $u_0 > l$ alors c'est le contraire.

Solution 1.2.9

- Si $u_1 < u_0$, comme f est croissante, (u_n) est décroissante et positive, elle converge vers une solution de l'équation $x = f(x)$.
- Si $u_1 > u_0$ alors (u_n) est croissante. On va prouver que (u_n) est bornée (donc convergente) par l'absurde.
  Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors, en vertu de l'hypothèse sur f, il existe N tel que $n \geqslant N \Rightarrow u_{n+1} \leqslant \dfrac{k + 1}{2} u_n$, la suite (u_n) serait décroissante ce qui est absurde.

- Si $u_1 = u_0$ alors la suite (u_n) est constante.

Solution 1.3.1

(1) Si $\exists x_0, f'(x_0) > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ sinon, f est constante.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Pour une fonction convexe croissante, on a les mêmes résultats car la courbe de f est au-dessus de sa tangente.

(2) $f \nearrow, f \geqslant 0 \Rightarrow f(x)$ a une limite en $-\infty$, de même pour f'. (on sait que f et f' sont croissantes et positives donc f et f' admettent une limite dans $\mathbb{R}_+$).

Or f ayant une limite en $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$ (raisonner par l'absurde).

On écrit ensuite que $f(x) - f(2x) = (-x)f'(z)$ où $z \in]2x, x[$ $(x < 0)$ et comme $f'(z) \geqslant f'(2x)$ on peut conclure $\lim\limits_{x\to-\infty} xf'(x) = 0$.

Solution 1.3.2 On a : $\varphi'(x) = \dfrac{g(x)}{(2x-a-b)^2}$ où

$$g(x) = (2x-a-b)(f'(x) + f'(a+b-x)) - 2(f(x) - f(a+b-x))$$

or $g'(x) = (2x-a-b)(f''(x) - f''(a+b-x)) \geqslant 0$ donc g est croissante sur $[\frac{a+b}{2}, b]$ et $g(\frac{a+b}{2}) = 0$ donc φ est croissante.

Solution 1.3.3 On montre par récurrence sur n que :

$$\forall k \in [0, 2^n],\ f\left[\frac{k}{2^n}x + (1-\frac{k}{2^n})y\right] \leqslant \frac{k}{2^n}f(x) + (1-\frac{k}{2^n})f(y).$$

Soit $t \in [0,1]$, on pose $k_n = [2^n t]$ (partie entière). On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n}{2^n} = t$ donc, en utilisant l'inégalité de la récurrence, et en passant à la limite sur n, on arrive à

$$\forall t \in [0,1],\ f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

ce qui signifie que f est convexe.

Solution 1.3.4 On va montrer que, pour $x < y < z$ on a $p_{xy} \leqslant p_{yz}$ où p_{xy} désigne la pente $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

On pose $N = \left[\dfrac{z-x}{h_0}\right] + 1$ et donc, pour $n \geqslant N$, $\dfrac{z-x}{n} \leqslant h_0$. On choisit $n \geqslant 2$ et on pose $y_k = a + k\dfrac{z-x}{n}$. Montrons que $\forall k \in [1, n-1]$, $p_{xy_k} \leqslant p_{y_k y}$:

comme $y_{k+1} - y_k \leqslant h_0$ on a $f(y_{k+1}) - f(y_k) \geqslant f(y_k) - f(y_{k-1})$ d'où

$$\begin{aligned} f(y_k) - f(y_0) &= f(y_k) - f(y_{k-1}) + \cdots + f(y_1) - f(y_0) \\ &\leqslant k(f(y_k) - f(y_{k-1})) \end{aligned}$$

et, en divisant par $y_k - y_0$, on obtient $p_{xy_k} \leqslant p_{y_{k-1}y_k}$. De même $p_{y_k y_{k+1}} \leqslant p_{y_k z}$ et finalement $p_{xy_k} \leqslant p_{y_k z}$.

Soit $k_n = \left[n\dfrac{y-x}{z-x}\right]$ alors $y_{k_n} \leqslant y \leqslant y_{k_n+1}$ et $y_{k_n} \to y$ quand $n \to +\infty$. Par passage à la limite

dans l'inégalité $p_{xy_{k_n}} \leqslant p_{y_{k_n}z}$ on obtient $p_{xy} \leqslant p_{yz}$ donc f est convexe.
Remarque : on peut montrer par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in [0, 2^n h_0],\ f(x+h) + f(x-h) \geqslant 2f(x)$$

et utiliser l'exercice précédent.

Solution 1.3.5

(1) On fait une récurrence sur k, on partage la somme $x_1 + \cdots + x_n$ en deux parties égales.

(2) On procède par récurrence sur k :
pour $k = 0$, c'est vérifié,
si n est pair, on écrit $n = 2p$ et on utilise l'hypothèse de récurrence,
si $n = 2p+1$, on pose $S_1 = x_1 + \cdots + x_{p+1}$, $S_2 = x_{p+2} + \cdots + x_{2p+1} + \dfrac{S}{2p+1}$, $S = x_1 + \cdots + x_n$ et on remarque que $S = \dfrac{2p+1}{2p+2}(S_1 + S_2)$.
On écrit alors que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{S}{2p+1}\right) &= f\left(\frac{S_1+S_2}{2p+2}\right) \leqslant f\left(\frac{S_1/(p+1) + S_2/(p+1)}{2}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{S_1}{p+1}\right) + f\left(\frac{S_2}{p+1}\right)\right] \end{aligned}$$

d'où

$$f\left(\frac{S}{2p+1}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n) + f(S/(2p+1))}{2p+2}$$

ce qui donne l'inégalité demandée.

(3) On a $\sum_{i=1}^{n} u_i = d$ donc on va écrire que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \dfrac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} x'_j$ où l'on répétera x_i u_i fois. Avec le 1., le résultat est alors immédiat.

(4) On a en fait prouvé que si f est semi-convexe alors $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$ pour tout rationnel t compris entre 0 et 1. Il suffit de prouver que ceci reste valable pour t réel <u>strictement</u> compris entre 0 et 1, c'est là qu'intervient la continuité de f sur l'intérieur de E.

Solution 1.3.6 On sait que $x \mapsto e^x$ est convexe : on utilise alors l'inégalité de Jensen : (voir la *proposition 4.1.10 page 72*)

$$\exp\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp y_i \text{ avec } y_i = \ln x_i.$$

Solution 1.3.7

(1) Lorsque $r \to 0$, on a $a_i^r = 1 + r\ln a_i + o(r)$ donc

$$M_r(a) = \left[1 + r\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} + o(r)\right]^{1/r} \Rightarrow \lim_{r\to 0} M_r(a) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}.$$

Ensuite : $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^r$ (la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique, cf *question (iii) page 73*) donc $M_0(a) \leqslant M_r(a)$.

On démontre ensuite que : $\lim\limits_{r\to+\infty} M_r(a) = \sup a_i$ et $\lim\limits_{r\to-\infty} M_r(a) = \inf a_i$. En effet, si $r > 0$ alors

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/r} \sup a_i \leqslant M_r(a) \leqslant \sup a_i$$

et, on obtient le résultat par le théorème d'encadrement. On procède de même pour l'autre limite.

(2) $\ln M_r(a) = \dfrac{1}{r} \ln \left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^r\right) = g(r)$, en posant $h(x) = x \ln x$: on a

$$g'(x) r^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^r\right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(a_i^r) - h\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)\right) \geqslant 0.$$

Solution 1.3.8

(1) On prend $\alpha = \left(1 + \dfrac{a}{m}\right)^{m/n}$ et $\beta = 1$, $p = \dfrac{n}{m}$, $q = \dfrac{n}{n-m}$ (pour la démonstration de l'inégalité, voir la *question (iii) page 72*).

(2) On pose $A = \left(1 + \dfrac{a}{m}\right)^{m}$ et on exprime l'inégalité ci-dessus avec A. Il suffit ensuite de remplacer la lettre A par la lettre a.

(3) Immédiat.

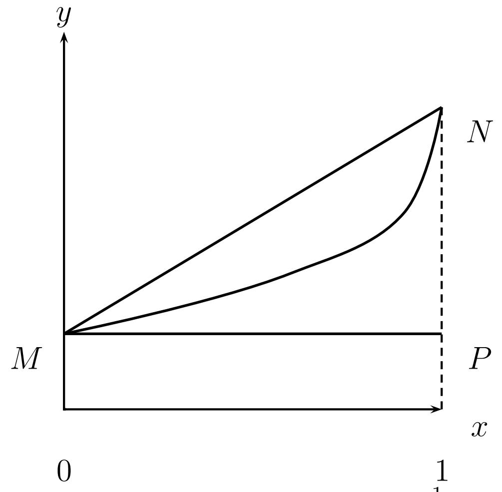
Solution 2.1.1

(1) Première inégalité : évidente (écrire que : $t = \alpha s + (1-\alpha) u$ où $\alpha = \dfrac{u-t}{u-s}$ et utiliser la convexité de ϕ cf. *question (i) page 73*).
Comme l'inégalité est vérifiée pour tout u, elle sera vérifiée pour la borne inférieure β et donc :
$t > s \Rightarrow \varphi(t) - \varphi(s) \leqslant \beta(t-s)$.
Pour $t < s$ il suffit d'exprimer que $\alpha(s) \geqslant \beta$. On a alors

$$\int_0^1 \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x \geqslant \varphi(t) + \beta\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

en prenant $s = f(x)$ et en intégrant.

(2) On prend $\varphi(x) = \sqrt{1+x^2}$ pour la première inégalité et pour la deuxième, on écrit que $\sqrt{1+h^2(x)} \leqslant 1 + h(x)$.
Interprétation géométrique : soit M le point de coordonnées $(0, f(0))$ et N celui de coordonnées $(1, f(1))$ alors $\sqrt{1+A^2} = \mathrm{d}(M, N)$ et $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+h^2(x)}\,\mathrm{d}x$ désigne la longueur de la courbe $x \mapsto (x, f(x))$. Enfin $1 + A$ vaut $MP + PN$ où P est le point de coordonnées $(1, f(0))$.



On a égalité dans $\sqrt{1+A^2} \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+h^2(x)}\,\mathrm{d}x$ ssi h est constante soit la courbe $x \mapsto (x, f(x))$ est la droite AB.
On ne peut avoir égalité dans l'autre inégalité.

Solution 2.1.2

(1) Sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, $f(t) \geqslant f(x_k) \Rightarrow \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{b-a}{n} f(x_k) \Rightarrow r_n \geqslant 0$; on a aussi $f(t) \leqslant f(x_{k+1})$ i.e. $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{b-a}{n} f(x_{k+1})$ donc,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(x_k) \leqslant \frac{b-a}{n}(f(x_{k+1}) - f(x_k))$$

d'où l'autre inégalité en additionnant.

(2) Toujours sur le même intervalle, on peut écrire : $f(t) - f(x_k) = (t - x_k) f'(z)$ et $t \mapsto f'(z)$ est continue, donc $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - z_k) f'(z)\,\mathrm{d}t = f'(z_k)\frac{(b-a)^2}{2n^2}$ (formule de la moyenne) $\Rightarrow r_n = \dfrac{b-a}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} (x_{k+1} - x_k) f'(z_k) \Rightarrow \lim n r_n = \frac{b-a}{2}(f(b) - f(a))$ (utilisation des sommes de Riemann).

Solution 2.1.3 La continuité de f nous permet d'avoir que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists [c, d] \subset [a, b] \mid \forall x \in [c, d], |f(x)| \geqslant M - \varepsilon/2$$

donc,

$$(M - \varepsilon/2)^n (d - c) \leqslant \int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x \leqslant M^n (b - a).$$

En prenant les racines $n^{ième}$ on a

$$(M - \varepsilon/2)(d - c)^{1/n} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n} \leqslant M(b - a)^{1/n}$$

et en choisissant n suffisamment grand pour que $(M-\varepsilon/2)(d-c)^{1/n} \geqslant M-\varepsilon$ et $M(b-a)^{1/n} \leqslant M+\varepsilon$, on a :

$$M-\varepsilon \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right]^{1/n} \leqslant M+\varepsilon$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\int_a^b |f(x)|^n \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}} = M.$

Solution 2.1.4 On démontre d'abord que la propriété est vraie pour une fonction constante, puis pour une fonction en escalier et on utilise le fait que toute fonction continue est limite uniforme de fonctions en escalier.
On peut aussi procéder ainsi : comme la fonction φ est minorée (elle est périodique et continue), on peut se ramener au cas d'une fonction φ positive,
On écrit ensuite : $\displaystyle\int_a^b f(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{\alpha(n)-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t + \int_{a_{\alpha(n)}}^b f(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t$ où $a_i = a+i\dfrac{T}{n}$ et $\alpha(n) = \left[\dfrac{b-a}{T}n\right]$.
Grâce au théorème de la moyenne, on a $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = f(b_i)\int_{a_i}^{a_{i+1}} \varphi(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{f(b_i)}{n}\int_0^T \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. On peut alors conclure à l'aide des sommes de Riemann.

Solution 2.1.5 Tous ces exercices font appel aux sommes de Riemann.

(1) Avec $\sqrt{k}-1 < [\sqrt{k}] \leqslant \sqrt{k}$ on a : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} < u_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

(2) Si $\alpha = 3$: $\lim u_n = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\alpha > 3$: $\lim u_n = 0$, $\alpha < 3$: $\lim u_n = +\infty$.

(3) $(n+p)^2 \leqslant (n+p)(n+p+1) \leqslant (n+p+1)^2 \Rightarrow \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{p+1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{p}{n}} \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

(4) $u_n \sim \displaystyle\frac{\pi}{n}\sum_{p=0}^{n} \tan\frac{p\pi}{4n}$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 4\int_0^{\pi/4} \tan x\,\mathrm{d}x = 2\ln 2$.

(5) $\ln u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k^2}{n^2})$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$.

(6) $\ln u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$.

Solution 2.1.6 $1-2r\cos 2\frac{k\pi}{n}+r^2 = (r-e^{2i\frac{k\pi}{n}})(r-e^{-2i\frac{k\pi}{n}})$ or, on sait que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-e^{2i\frac{k\pi}{n}}) = X^n-1$ donc

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n}(r-e^{2i\frac{k\pi}{n}})\prod_{k=1}^{n}(r-e^{-2i\frac{k\pi}{n}}) = (r^n-1)^2$$

donc $I(r) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\pi}{n} \ln \Pi_n = 0$ (grâce aux sommes de Riemann).
Si $|r| > 1$, alors

$$\begin{aligned} I(r) &= 4\pi \ln|r| + \int_0^{2\pi} \ln(1 - \frac{2}{r}\cos\theta + \frac{1}{r^2})\,\mathrm{d}\theta \\ &= 4\pi\ln|r| + I(1/r) = 4\pi \ln|r|. \end{aligned}$$

Solution 2.1.7 Tout d'abord :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_x^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

on a donc : $\left|\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \displaystyle\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$ pour $x \in [a,b]$.
Soit $g = \Re(f)$, $h = \Im(f)$ et $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, $H(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$; l'égalité ci-dessus se traduit par :

$$\sqrt{G^2(x) + H^2(x)} = \int_a^x \sqrt{g^2(t) + h^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

et en dérivant : $Gg + Hh = \sqrt{G^2+H^2}\sqrt{g^2+h^2}$ i.e. les couples $(G(x), H(x)), (g(x), h(x))$ sont liés et l'argument de la fonction $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ dont la dérivée vaut $\dfrac{Gh - Hg}{G^2+H^2}$ est constant. En conclusion, f a un argument constant.
Remarque : on peut aussi se ramener au cas où $f(a) = 0$, $f(b) \in \mathbb{R}_+$ et raisonner par l'absurde.

Solution 3.1.1 On a :

$$F'(y) = f(y)g(y) \text{ et } G'(y) = f(a + h(y))h'(y) = f(a + h(y))g(y)$$

or $g \leqslant 1$ donc $a + h(y) = \displaystyle\int_a^y g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant a + (y - a) = y$. Comme f est décroissante : $f(y) \leqslant f(a + h(y))$ i.e. $F'(y) \leqslant G'(y)$ d'où la première inégalité par intégration avec $y = b$ (on a $F(a) = G(a) = 0$. On procède de même pour la deuxième.
Pour avoir égalité dans une inégalité, il suffit d'avoir égalité dans chaque inégalité (c'est ce qu'on appelle "enfoncer une porte ouverte" mais c'est souvent utile).
Soit $H = G - F$, on vient de voir que H est croissante. Or $H(a) = H(b) = 0$ donc H est constante et vaut 0. En dérivant on obtient

$$g(y)\left[f\left(a + \int_a^y g(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(y)\right] = 0.$$

Supposons que $g(a) < 1$ alors $a + \displaystyle\int_a^y g(t)\,\mathrm{d}t < y$ pour tout y et, en exploitant la relation ci-dessus, on arrive à $g(y) = 0$ pour tout y soit $g = 0$.
Si $g(a) = 1$, on suppose par l'absurde que g s'annule. L'ensemble $g^{-1}(0)$ est un fermé (g est continue, $\{0\}$ est fermé, borné (il est contenu dans $[a,b]$), il admet un plus petit élément x_0. Pour $x < x_0$, $g(x) \neq 0$ donc $a + \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = y$, ce qui donne, en dérivant, $g(x) = 1$ et par continuité, $g(x_0) = 1$ ce qui est contradictoire.
Conclusion : les cas d'égalité sont obtenus lorsque la fonction g est constante et quelle vaut soit 0, soit 1.

Solution 3.1.2 Sur $[a, \dfrac{a+b}{2}]$, on a : $|f(t)| = \left|\displaystyle\int_a^t f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M(t-a)$ et sur $[\dfrac{a+b}{2}, b]$, on a $|f(t)| \leqslant M(b-t)$ donc,

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)\,\mathrm{d}t = M\frac{(b-a)^2}{8}.$$

On fait de même avec l'autre intégrale.
On aura égalité ssi on a égalité à tous les niveaux i.e. ssi $f'(x) = \varepsilon M$ sur $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $f'(x) = -\varepsilon M$ sur $[\frac{a+b}{2}, b]$ où $\varepsilon = \pm 1$.
Remarque : si f est à valeurs complexes, on peut arriver à la même conclusion en étudiant le cas d'égalité dans l'inégalité $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ qui nous dit que f a un argument constant.

Solution 3.1.3 On écrit que $f(t) = \displaystyle\int_0^t f'(u)\,\mathrm{d}u$.

- Étudions d'abord le cas où $f'(t) \geqslant 0$:
$$\int_0^a f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}f(a)^2 = \frac{1}{2}\left(\int_0^a f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2.$$
On utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'où
$$\left|\int_0^a f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^a 1\,\mathrm{d}t.\int_0^a |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$
(ici, les valeurs absolues sont superflues car toutes les quantités sont positives).
- Si $f'(t)$ est à valeurs complexes, on définit la fonction g telle que $g'(t) = |f'(t)|$. L'inégalité ci-dessus est valable pour g, et comme $|f(t)| \leqslant g(t)$ et que $|f'(t)|^2 = g'(t)^2$, on a
$$\int_0^a |f'(t)f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a g'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a g'(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\int_0^a |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Pour l'égalité, on obtient $f(x) = \alpha x$. En effet, le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne f' constante, puis, pour avoir égalité entre $|\int|$ et $\int|.|$, on doit prendre ff' de signe constant (ce qui est réalisé automatiquement car $f(0) = 0$).

Solution 3.1.4

(1) Avec la formule de la moyenne, on a : $g(x) = f(\theta x)\ : \theta \in]0, 1[\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) = f(0)$.

(2) $g(x) - g(0) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (f(t) - f(0))\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (f'(0) + t\varepsilon(t))\,\mathrm{d}t = f'(0) + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t$ or $\displaystyle\int_0^x t\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = o(x^2)$ c.q.f.d.

Solution 3.1.5 On écrit les égalités obtenues pour $P = 1$, $P = X$, $P = X^2$, $P = X^3$:

$$\alpha + \beta = 1,\ \alpha a + \beta b = \frac{1}{2},\ \alpha a^2 + \beta b^2 = \frac{1}{3},\ \alpha a^3 + \beta b^3 = \frac{1}{4}.$$

Des 2 premières équations, on tire les valeurs de α et β en fonction de a et b que l'on reporte dans les 2 dernières : on trouve, en simplifiant par $a - b$ et en posant $S = a + b, P = ab$

$$\frac{1}{2}S - P = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}(S^2 - P) - PS = \frac{1}{4} \Rightarrow S = 1, P = \frac{1}{6}.$$

Donc on obtient : $a = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ et $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ce qui donne la formule

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[P(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}) + P(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})\right].$$

Solution 3.1.6 En dérivant $G(e^x) - G(e^{-x})$ (où $G(x) = \int_1^x \sqrt{1 + \ln^2 t}\,\mathrm{d}t$) on trouve

$$f'(x) = e^x\sqrt{1 + x^2} + e^{-x}\sqrt{1 + x^{-2}}.$$

Solution 3.1.7 f est dérivable et en dérivant la relation par rapport à x et à y, on a :

$$f'(x)f(y) = f(x + y) - f(x - y)$$
$$f(x)f'(y) = f(x + y) + f(x - y).$$

Si f n'est pas la fonction nulle, f' est dérivable et on trouve :

$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$$

i.e. $f''(x) - kf(x) = 0$ d'où les solutions : $f(x) = \frac{2}{\omega}\sin\omega x$ et $f(x) = \frac{2}{\omega}\operatorname{sh}\omega x$ selon le signe de k, si $k = 0$, on trouve $f(x) = 2x$ et pour conclure rajoute la fonction nulle parmi les solutions.

Solution 3.1.8

(1) On trouve $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ln 2$.

(2) $f'(x) = \dfrac{x - 1}{\ln x} > 0$. En 0, on a une tangente verticale, en 1, un point d'inflexion et une tangente de pente 1 et en $+\infty$ une branche parabolique d'axe Oy.

Solution 3.1.9 On étudie $g(x) = f(x) - \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Au voisinage de 0, on peut majorer g par : $e^{x^2}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} t\,\mathrm{d}t$ et donc $f(x) \sim \ln x$.

Solution 3.1.10

(1) On intégre p k fois, on dérive q k fois, à chaque fois, la partie toute intégrée est nulle car $\dfrac{\mathrm{d}^h}{\mathrm{d}x^h}\left([x^2 - 1]^k\right)(\pm 1) = 0$ si $h < k$ (± 1 sont racines d'ordre k de $[x^2 - 1]^k$ donc racines d'ordre $k - h$ de $\dfrac{\mathrm{d}^h}{\mathrm{d}x^h}\left([x^2 - 1]^k\right)$). Comme $q^{(k)} = 0$ alors, lors de la dernière intégration, on trouve 0.

(2) Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_h$ les racines de p d'ordre impair dans $]-1, 1[$, on pose $q(x) = (x - x_1)(\cdots)(x - x_h)$. $p(x)q(x)$ garde un signe constant sur]-1,1[(le polynôme pq n'a que des racines paires) et ce n'est pas la fonction nulle donc son intégrale sur $[-1, 1]$ est non nulle. Or, si $h < k$ vu le 1., $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x = 0$ est impossible donc $\deg q = \deg p$ et $p = \lambda q$ c.q.f.d.

(3) Le coefficient de x^k dans $p(x)$ vaut : $\dfrac{(2k)!}{k!}$; si $\deg a = k$, on peut l'écrire : $a = \lambda p + q$ où $\deg q < k$, $\lambda = \dfrac{a_k}{(2k)!}k!$, a_k désignant le coefficient de x^k dans a ; alors $C(a) = \dfrac{a_k}{(2k)!}k!$.

Solution 3.1.11 On fait le changement de variable $u = a + b - x$ dans I :

$$I = \int_a^b (a + b - u) f(u)\,\mathrm{d}u = -I + (a + b) \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

d'où $I = \dfrac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution 3.1.12 $g'(x) = e^{-kx} f(x) - ke^{-kx} \tilde{f}(x) \leqslant 0$ or $g(x) \geqslant 0$, décroissante et $g(0) = 0$ donc g est la fonction nulle. On a donc $\tilde{f} \equiv 0$ soit $f \equiv 0$.

Solution 3.1.13

(1) On a

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n+k}}{(n+k)!} p^{(n+k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n+k}}{n!} \binom{n}{k} (-a)^{n-k} b^k$$

d'où $p^{(n+k)}(0) = \dfrac{(n+k)!}{n!} \binom{n}{k} (-a)^{n-k} b^k$ donc $p^{(n+k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

En $\dfrac{a}{b}$, on remarque que : $p(\frac{a}{b} - x) = p(x)$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $p^{(k)}(\frac{a}{b}) = (-1)^k p^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

(2) On a : $|p_n(x)| \leqslant \dfrac{x^n(bx + a)^n}{n!} \leqslant \dfrac{\pi^n(b\pi + a)^n}{n!}$ donc $|I_n| \leqslant 2\dfrac{\pi^n(b\pi + a)^n}{n!} \to 0$.

(3) On intégre I_n par parties $2n$ fois (on dérive p_n, on intégre le sin) à chaque fois, grâce au 1., la partie toute intégrée est entière, donc $I_n \in \mathbb{Z}$ et $\lim I_n = 0 \Rightarrow \exists N\ : \forall n \geqslant N\ :$ $I_n = 0$ ce qui est impossible.

Solution 3.1.14 On développe le sinus, on trouve

$$f(x) = x \sin x \int_2^x t \cos t\,\mathrm{d}t + x \cos x \int_2^x t \sin t\,\mathrm{d}t.$$

On peut donc dériver f comme somme et produit de fonctions dérivables et, si on rassemble le résultat sous la même intégrale, on trouve

$$f'(x) = \int_2^x t[\sin(x + t) + x \cos(x + t)]\,\mathrm{d}t + x^2 \sin 2x.$$

formule que l'on aurait pu avoir directement en utilisant le résultat de la *remarque 6.2.7 page 269* démontrée dans le cadre de la *question (i) page 269.*

Solution 3.1.15 On trouve respectivement : $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $+\infty$.

Solution 3.1.16 Ça marche avec : $a = (p+q)(p+q+1)$, $b = -pq$, $c = p+q$ et on trouve alors $I(x) = \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{8/3}$.

Solution 3.2.1

(1) On a

$$f(x_0+\lambda)-f(x)=(x_0+\lambda-x)f'(x)+\frac{(x_0+\lambda-x)^2}{2}f''(x_1)$$
$$f(x_0-\lambda)-f(x)=(x_0-\lambda-x)f'(x)+\frac{(x_0-\lambda-x)^2}{2}f''(x_2).$$

On retranche alors ces deux égalités :

$$f(x_0+\lambda)-f(x_0-\lambda)=2\lambda f'(x)+\frac{(x_0+\lambda-x)^2}{2}f''(x_1)-\frac{(x_0-\lambda-x)^2}{2}f''(x_2)$$

on isole les termes en $f'(x)$ ce qui donne

$$2\lambda f'(x)=f(x_0+\lambda)-f(x_0-\lambda)+\frac{(x_0-\lambda-x)^2}{2}f''(x_2)-\frac{(x_0+\lambda-x)^2}{2}$$

on majore f et f'' par M_0 et M_2 d'où

$$2\lambda|f'(x)|\leqslant 2M_0+\frac{M_2}{2}[2(x_0-x)^2+2\lambda^2]$$

soit $\lambda|f'(x)|\leqslant M_0+\lambda^2M_2$.

(2) Si $x\leqslant a+2\lambda$, on prend $X=a+\lambda+\varepsilon$ avec $0<\varepsilon<\min(x-a,2(l-\lambda)$, si (lorsque c'est possible) $a+2\lambda<x\leqslant\dfrac{a+b}{2}$ on prend $X=x$. Enfin, si $x\geqslant b-2\lambda$ alors, on prend $X=b-\lambda-\varepsilon$ avec $0<\varepsilon<\min(b-x,2(l-\lambda))$. Ces différents cas se recoupent aussi, pour déterminer X de manière unique, on prend les inégalités dans l'ordre de la démonstration.

Vu le 1., on peut conclure immédiatement.

(3) On étudie la fonction de λ : $\dfrac{M_0}{\lambda}+\lambda M_2$ ou on prend directement $\lambda=\sqrt{\dfrac{M_0}{M_1}}$.

Solution 3.2.2

(1) On a

$$g(x)=xg'(0)+\frac{x^3}{6}g'''(0)+\frac{1}{24}\int_0^x(x-t)^4g^{(5)}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$g'(x)=g'(0)+\frac{x^2}{2}g'''(0)+\frac{1}{6}\int_0^x(x-t)^3g^{(5)}(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où, pour $x>0$

$$\left\|g(x)-\frac{x}{3}(g'(x)+2g'(0))\right\|=\left\|\frac{1}{72}\int_0^x\Big[\underbrace{3(x-t)^4-4x(x-t)^3}_{\leqslant 0}\Big]g^{(5)}(t)\,\mathrm{d}t\right\|$$
$$\leqslant\frac{|x|^5}{180}\sup_{t\in[a,b]}\|g^{(5)}(t)\|$$

(2) On applique alors la formule précédente à $g(t)=F\left(\dfrac{a+b}{2}+t\right)-F\left(\dfrac{a+b}{2}-t\right)$ où $F(u)=\displaystyle\int_a^u f(t)\,\mathrm{d}t$ en $x=\dfrac{b-a}{2}$. $g^{(5)}(t)=f^{(4)}\left(\dfrac{a+b}{2}+t\right)+f^{(4)}\left(\dfrac{a+b}{2}-t\right)$ et donc

$$\sup_{t\in[0,x]}\left\|g^{(5)}(t)\right\|\leqslant 2\sup_{t\in[a,b]}\left\|f^{(4)}(t)\right\|.$$

d'où la formule.

Remarque : cette formule permet de majorer l'erreur dans la méthode de Simpson.

Si on pose $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ et

$$S_n = \frac{b-a}{6n}[f(a) + 4f(\frac{a+x_1}{2}) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_i) + 4f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \cdots + f(b)]$$

alors $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n\right| \leqslant \dfrac{(b-a)^5}{2880n^4}\sup_{t\in[a,b]}|f^{(4)}(t)|$.

Solution 3.2.3 On écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 et on trouve $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3} = f'''(x)$.

Solution 3.3.1 Avec u_0 quelconque on a $u_1 \in [-1,1]$ puis, à partir du rang 1, les termes de la suite gardent un signe constant. Supposons que $u_1 > 0$ alors $(u_n) \searrow$ donc la suite (u_n) converge, et $u_n \to 0$.

On a ensuite : $u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$ d'où, si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_{n+1}^\alpha = u_n^\alpha\left(1 - \frac{\alpha u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right) = u_n^\alpha - \frac{\alpha}{6}u_n^{\alpha+2} + o(u_n^{\alpha+2}).$$

Avec $\alpha = -2$ on a : $w_n = u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} \to \dfrac{1}{3}$. D'où :

$$\frac{1}{n}\sum_{p=0}^n w_n = \frac{1}{n}(u_{n+1}^{-2} - u_0^{-2}) \to \frac{1}{3}$$

i.e. $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

Solution 3.3.2 On écrit donc que $f(x) = f(0) + a_1x + a_2x^2 + x^2\varepsilon(x)$. Comme $\dfrac{p}{n^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \to 0$, alors on choisit n suffisamment grand pour que $|\varepsilon(\frac{p}{n^\alpha}| \leqslant 1$. On a alors

$$u_n = n[A + f(0)] + a_1\frac{n(n+1)}{2n^\alpha} + a_2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^{2\alpha}} + \sum_{p=1}^n \frac{p^2}{n^{2\alpha}}\varepsilon(\frac{p}{n^\alpha}$$

d'où la discussion qui s'ensuit :

- Si $A + f(0) \neq 0$, $u_n \to \pm\infty$.
- Si $A + f(0) = 0$ et
  - si $\alpha = 2$ alors $u_n \to \dfrac{a_1}{2}$,
  - si $\alpha > 2$ alors $u_n \to 0$,
  - si $\alpha < 2$ alors
    - ∗ si $a_1 \neq 0$ alors $u_n \to \pm\infty$,
    - ∗ si $a_1 = 0$ alors
      - · si $\alpha > \frac{3}{2}$ alors $u_n \to 0$,
      - · si $\alpha = \frac{3}{2}$ alors $u_n \to \dfrac{a_2}{6}$.

Solution 3.3.3 On écrit que $g(y) = x$ où $y = f(x) = a_1 x + o(x)$. $y \sim a_1 x$ donc $o(y) = o(x)$ et $g(y) = b_1 y + o(y)$ où $a_1 b_1 = 1$.
On utilise pour la suite des fonctions $\varepsilon_i(y)$ qui tendent vers 0 lorsque y tend vers 0.
Pour mieux voir comment se passe la récurrence, regardons l'ordre 2 : on peut écrire $g(y) = b_1 y + y\varepsilon_1(y) = x$ soit

$$\begin{aligned} y = f(x) &= a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2) \\ &= a_1(b_1 y + y\varepsilon_1(y)) + a_2(b_1 y + y\varepsilon_1(y))^2 + o(y^2) \\ &= y + a_1 y\varepsilon_1(y) + a_2 b_1^2 y^2 + o(y^2) \end{aligned}$$

d'où g admet un développement limité à l'ordre 2 qui s'écrit

$$g(y) = \frac{1}{a_1} y - \frac{a_2 b_1^2}{a_1} y^2 + o(y^2).$$

La récurrence ne pose pas de réels problèmes (mis à part l'écriture des relations obtenues !) ; si $g(y) = b_1 y + \cdots + b_p y^p + y^p \varepsilon_p(y)$ alors, en écrivant que $y = f(x) = a_1 g(y) + \cdots + a_{p+1} g(y)^{p+1} + o(y^{p+1})$ et en tenant compte de l'hypothèse de récurrence qui assure l'annulation des coefficients de y^i pour $i \leqslant p$, on obtient l'expression de $\varepsilon_p(y)$. Les coefficients b_p vérifient la relation

$$b_p a_1^p = -\sum \frac{k!}{n_1! \ldots n_p!} a_1^{n_1} \ldots a_p^{n_p} b_k$$

où la somme est étendue à tous les p-uplets $(n_1, \ldots, n_p)$ vérifiant $n_1 + \cdots + n_p = k$ et $n_1 + \cdots + p n_p = p$ (on a utilisé ici la formule du multinôme—qui n'est pas explicitement au programme—remarque 7.3.5 page 125).

Solution 3.3.4 On obtient, avec un logiciel, les courbes suivantes

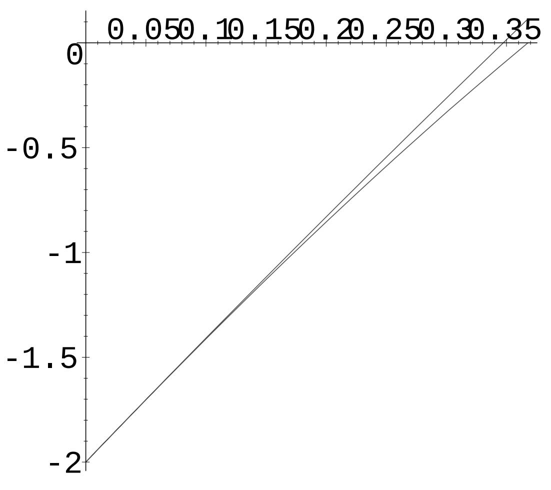


FIGURE 1. Point de rebroussement de deuxième espèce

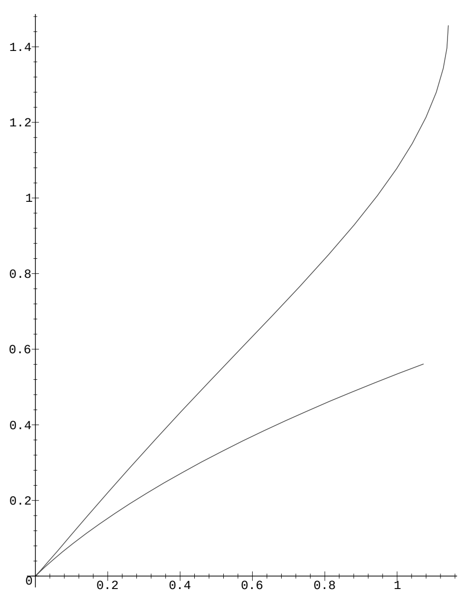


FIGURE 2. Point de rebroussement de première espèce

En effet, pour la courbe 1, on a

$$\begin{pmatrix} x'(t) = e^{t-1} - 1 \\ y'(t) = 3t^2 - 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x''(t) = e^{t-1} \\ y''(t) = 6t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'''(t) = e^{t-1} \\ y'''(t) = 6 \end{pmatrix},$$

donc les vecteurs dérivées seconde et troisième sont égaux (lorsque $t = 1$) mais le vecteur dérivée quatrième est indépendant, on a bien un point de rebroussement de deuxième espèce, figure 1. Pour la courbe 2, on a

$$\begin{pmatrix} x'(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ y'(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^3 + 1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x''(1) = 1 \\ y''(1) = 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'''(1) = -1 \\ y'''(1) = -2 \end{pmatrix},$$

donc les vecteurs dérivées seconde et troisième sont linéairement indépendants, on a un point de rebroussement de première espèce.

Solution 3.3.5

(1) La courbe est définie pour $t \neq 0$.

$$x'(t) = \frac{2(t-1)(2t^3 + t^2 + t + 1}{t^3},\ y'(t) = \frac{2(t^3 - 1)}{t^3}.$$

En étudiant $2t^3 + t^2 + t + 1$, on prouve que cette équation n'a qu'une seule racine $t_0 < 0$ d'où les variations

t	$-\infty$		t_0			0			1		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$		$\Vert$		$-$	0	$+$	
y'			$+$			$\Vert$		$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert$	∞	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $t = 1$ on a un point singulier, on vérifie qu'il correspond à un point de rebroussement de première espèce.
$t \to 0$ $y - x = 4t - 2t^2$ fourni l'asymptote et la position de la courbe par rapport à celle-ci.
$t \to \infty$ voir deuxième question.
Point double : on résout les équations $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$ avec $t_1 \neq t_2$. t_1 et t_2 (après simplifications) sont solutions de $t^2 - 2t - 1 = 0$ et les coordonnées du point double sont $(7, 5)$.

(2) $y^2 - 2x - 2y \sim \dfrac{4}{t}$ quand $t \to \infty$ donc la parabole d'équation $y^2 - 2x - 2y = 0$ est asymptote à la courbe.

Solution 3.3.6 Résultats :

a) $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$
b) $e(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24}) + o(x^2)$
c) $-\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{x^2}{720} + o(x^2)$
d) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$
e) $x - \frac{x^5}{5} + o(x^8)$
f) $\frac{\pi}{2}(\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{40}) + O(x^6)$
g) $x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$.

h) On obtient $(1+x)\left[1-\dfrac{x}{3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{2n+1}+o(x^n)\right]$.

Solution 3.3.7 On prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$ où $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left|\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^{\alpha n}-e^{-k\alpha}\right|$. En la décomposant en 2 par K, on pourra ainsi majorer $\sum\limits_{k=K}^{n}\left|\left(1-\dfrac{k}{n}\right)^{\alpha n}-e^{-k\alpha}\right|$ par $\sum\limits_{k=K}^{n} e^{-k\alpha}\leqslant \dfrac{e^{-\alpha K}}{1-e^{-\alpha}}$ que l'on peut majorer par $\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour K assez grand.
K étant fixé, l'autre somme tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (somme finie de termes qui tendent tous vers 0). On choisit alors n suffisamment grand pour que cette deuxième somme soit majorée par $\dfrac{\varepsilon}{2}$.
On pouvait aussi utiliser la convergence normale de la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k(n)$ avec $u_k(n) = \begin{cases}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\alpha n} & \text{si } k<n\\ 0 & \text{si } k\geqslant n\end{cases}$.

Solution 3.3.8 Réponse : $\dfrac{x^5}{180}$ (après quelques calculs).

Solution 3.3.9 On trouve dans l'ordre : 1 ; $+\infty$; 0 ; $(2^{16}3^{36})^{-\frac{1}{\pi}}$; 0 ($\sim \frac{x}{2}$).

Solution 3.3.10

(1) On prend le logarithme : $\ln(1+\frac{u_n}{n})^n = n\ln(1+\frac{u_n}{n}) = n\left(\dfrac{u_n}{n}+O\left(\dfrac{u_n^2}{n^2}\right)\right) = u_n+o(1)$.

(2) Posons $f(x)=x-\ln(1+x)$ et on va prouver que $f(x)\to 0 \Leftrightarrow x\to 0$. En fait, une étude rapide de f donne le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On note g_1 et g_2 les fonctions réciproques de f sur $]-1,0]$ et $[0,+\infty[$. Si $y=f(x)$ alors $x=g_1(y)$ si $x\geqslant 0$ et $x=g_2(y)$ si $x\leqslant 0$ et donc $|x|\leqslant|g_1(y)|+|g_2(y)|$. Si $y\to 0$ alors $g_i(y)\to 0$ donc $x\to 0$.
On applique alors cette propriété à $v_n=f(u_n)$ donc $u_n\to 0$.

(3) En prenant le logarithme on a $u_n-n\ln\left(1+\dfrac{u_n}{n}\right)\to 0$ et on applique le résultat de la question 2 à $v_n=\dfrac{u_n}{n}$. On sait donc que $u_n=o(n)$, on précise alors la première propriété $u_n-n\ln\left(1+\dfrac{u_n}{n}\right)=\dfrac{u_n^2}{2n}+o\left(\dfrac{u_n^2}{n}\right)\to 0$ donc $u_n=o(\sqrt{n})$.
