CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL (R)

1. Dérivation des fonctions à valeurs réelles

1.1. Dérivée en un point, fonction dérivée.

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, périodique.
Étant donné $a > 0$, montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que la tangente en x au graphe de f coupe le graphe de f en $(x+a, f(x+a))$.

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $\varphi\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \notin \{0, 1\}$.
Calculer $\varphi^n = \varphi \circ \varphi \circ \cdots \varphi$ (n fois).
On se propose de chercher toutes les fonctions $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f \circ f = \varphi$.

(1) Montrer que le cas $a < 0$ est à écarter (pas de solution).
(2) Cas $0 < a < 1$: montrer que $f \circ \varphi^n = \varphi^n \circ f$ et que $f'(x) = f'(\frac{b}{1-a})$; conclure.
(3) Si $a > 1$, montrer qu'on peut se ramener au 2.

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) = f'(b)$.
Si $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ calculer $g'(x)$.
En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

Exercice 1.1.4. $\boxed{\textbf{F}}$
Trouver toutes les fonctions $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = xf(-x)$ (on fera intervenir les fonctions p et q parties paires et impaires de f).

Exercice 1.1.5. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a, b]$ et telle que $f(a) = 0$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $|f'(x)| \leqslant \alpha|f(x)|$.
Montrer que $f = 0$ (on fera intervenir $g(x) = \dfrac{1}{2}f^2(x)e^{-2\alpha x}$).

Exercice 1.1.6. $\boxed{\textbf{F}}$
Soient $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f(x) = x^n + px + q$ n'a pas plus de 2 racines réelles si n est pair et pas plus de 3 si n est impair.

Exercice 1.1.7. **I**
Soit $f \in [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b)$, $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$.
Existe-t-il $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = f(a)$ et $f'(c) \leqslant 0$?

Exercice 1.1.8. **I**
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $x_1, \ldots, x_n$ n réels deux à deux distincts de $[0,1]$ tels que
$$\sum_{i=1}^{n} f'(x_i) = n.$$
(2) Quelle hypothèse ajouter pour pouvoir conclure à l'existence de $y_1, \ldots, y_n$ n réels deux à deux distincts de $[0,1]$ tels que
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(y_i)} = n \ ?$$

Exercice 1.1.9. **I**
Soit $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leqslant 0$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ unique tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 1.1.10. **F C**
Soit f de classe C^n sur $]a,b[$, on suppose que f s'annule en $n+1$ points distincts de $[a,b]$.
Montrer qu'il existe $x \in]a,b[$ où $f^{(n)}(x) = 0$.

Exercice 1.1.11. **I**
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0).f'(0) > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Démontrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $]0,+\infty[$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x_n) = 0$.

Exercice 1.1.12. **F C**
Soit $f_n(x) = x^{n-1} \ln x$, montrer que $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.
Donner de même une expression simplifiée de $[x^{n-1}\ln(1+x)]^{(n)}$.

Exercice 1.1.13. **F C**
Si $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + (n^2-1)f^{(n)}(x) = 0.$$

1.2. **Étude globale des fonctions dérivables.**

EXERCICE 1.2.1. **I**
Soit f deux fois dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$.
Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que $|f''(a)| \geqslant 4$.

EXERCICE 1.2.2. **F C**
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe p entiers naturels non nuls $n_1, \ldots, n_p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$ et p éléments distincts de I, ordonnés : $x_1 < \ldots < x_p$ tels que $\forall i \in [1,p]$, $\forall k \in [0, n_i - 1]$, $f^{(k)}(x_i) = 0$.
Montrer qu'il existe $c \in [x_1, x_p]$ tel que $f^{(n-1)}(c) = 0$.

EXERCICE 1.2.3. **F**
Soit $f(x) = x(1 - \ln^2 x)$, montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On écrit alors $f(x) = f(0) + xf'(\theta x)$, trouver $\lim\limits_{x \to 0} \theta$.

EXERCICE 1.2.4. **F C**
Soit f de classe C^2 sur $[a,b]$, montrer que $\forall c \in]a,b[$, $\exists d \in]a,b[$ tel que

$$f(c) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a) + \frac{1}{2}(c - a)(c - b)f''(d).$$

EXERCICE 1.2.5. **I C**
Soit f de classe C^5 sur $[a,b]$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^2}{12}(f''(b) - f''(a)) + \frac{(b-a)^5}{720} f^{(5)}(c).$$

EXERCICE 1.2.6. **I C**
Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1} + 2 \operatorname{Arctan} \dfrac{1-x}{1+x}$.

(1) Calculer $f'(x)$, comparer le domaine de définition de f' à celui de f.
(2) Montrer que $f^{(n-1)}(x) = \dfrac{a_n(x)}{(x^2+1)^n}$ où $\deg a_n = n$.
(3) Montrer que a_n admet n racines distinctes (par récurrence, à l'aide du théorème de Rolle).

EXERCICE 1.2.7. **I**
Soit $f\ : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et continue en 0. On pose

$$F(h) = \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ pour } h > 0.$$

Montrer que $\lim\limits_{h \to 0^+} F(h) = \dfrac{\pi}{2} f(0)$.

Exercice 1.2.8. **F**

Étudier les suites définies par les relations de récurrence :

(1) $2u_{n+1} = 1/2 + u_n^2$
(2) $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$, $u_0 \in [0, 2]$
(3) $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 1}$
(4) $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{1 - u_n}$.

Exercice 1.2.9. **F**

Étudier les suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée de $(u_0, v_0) \in]0, 1[^2$ et la récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = xu_n^2 + (1 - x)v_n^2 \\ v_{n+1} = (1 - x)u_n^2 + xv_n^2 \end{cases}$$

où x est fixé dans $]0, 1[$.

Exercice 1.2.10. **D**

On veut étudier le comportement asymptotique de la suite définie par $u_0 = a$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

(1) Si $a > 0$ alors montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$; en posant $v_n = \dfrac{1}{2^n} \ln u_n$ montrer que $u_n \sim \exp(2^n \alpha)$ et que $u_n = \exp(2^n \alpha) - \dfrac{1}{2} + o(1)$.
(2) Si $a < -1$ alors montrer qu'on se ramène au cas précédent.
(3) Si $-1 < a < 0$ alors montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$; en posant $w_n = -\dfrac{1}{u_n}$, montrer que $u_n \sim -\dfrac{1}{n}$.

Exercice 1.2.11. **F**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1/3$, $u_{n+1} = 1000u_n - 333$. Programmer le calcul des termes successifs de u_n en virgule flottante et exécuter le programme. Calculer la limite de la suite (u_n) et expliquer la contradiction.

Exercice 1.2.12. **F**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 201$, $u_1 = 99$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{100} - 1$. Donner, à l'aide d'une machine, les valeurs de u_n pour $n \leqslant 100$.
Qu'en penser ?
Calculer u_{1000}, u_{10000}. Résoudre alors la récurrence (on fera appel à une suite récurrente double).
Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 1.2.13. **F**

Étudier les suites définies par :

(1) $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{v_n - u_n}{2(n+1)}$, $v_{n+1} = v_n - \dfrac{v_n - u_n}{2(n+1)}$.

(2) $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$ où $0 < a < b$. Calculer les limites de (u_n) et (v_n) en fonction de $\alpha = \text{Arccos}(a/b)$.

(3) $u_0 = a$, $u_1 = b$, $u_{n+2} = ku_{n+1}u_n^2$ où $k > 0$, $(a, b) \in \mathbb{R}^{*2}$.

1.3. **Fonctions convexes.**

Exercice 1.3.1. **I C**

Soit f de classe C^2 sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $|f''(x)| \leqslant M$. On pose $P(x) = -\dfrac{M}{2}(x - a)(x - b)$.

(1) Montrer que $\forall x \in [a, b],\ |f(x)| \leqslant P(x)$.
(2) Montrer que, s'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = P(x_0)$, alors $\forall x \in [a, b],\ f(x) = P(x)$.
(3) Que peut-on dire si $f'(a) = \dfrac{M}{2}(b - a)$?

Exercice 1.3.2. **F C**

Si les $(x_i)_{i\in[1,n]}$ sont des réels positifs, montrer que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

Cas d'égalité ?

Exercice 1.3.3. **I C**

Soit φ une fonction convexe sur $[a, b]$, montrer que, si $a < s < t < u < b$ alors

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leqslant \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}.$$

t fixé, posons $\beta = \sup\limits_{s<t} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s}$, montrer que $\forall x \in [a, b],\ \varphi(x) \geqslant \varphi(t) + \beta(x - t)$ (1)

En posant $t = \displaystyle\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u$ où f est une fonction intégrable sur $[0, 1]$, montrer que :

$$\varphi\left(\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u\right) \leqslant \int_0^1 \varphi(f(u))\,\mathrm{d}u \quad (f([0, 1]) \subset [a, b]).$$

Exercice 1.3.4. **I**

On suppose que $0 < m < n$ et $a > 0$.

(1) Montrer que $(1 + \frac{a}{m})^{m/n} \leqslant 1 + \frac{a}{n}$.
(2) En déduire que $a \leqslant (1 + \frac{m}{n}(a^{1/m} - 1))^n$.
(3) Montrer alors que $n(a^{1/n} - 1) < m(a^{1/m} - 1)$.

Exercice 1.3.5. **F**

Montrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ convexe sur } [a, b] \Leftrightarrow \begin{matrix} \forall (x, y, z) \in [a, b]^3 \\ x < y < z \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

EXERCICE 1.3.6. **I**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, dérivable et 3 suites finies de n éléments de $\mathbb{R}$ décroissantes (x_i), (y_i), (z_i) vérifiant :

$$x_1 \geqslant y_1,\ x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2, \dots, x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geqslant y_1 + y_2 + \cdots + y_k,\ k \in [1, n]$$

et $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$.

(1) Montrer par récurrence sur $k \leqslant n$ que

$$(x_1 - y_1)(f'(z_1) - f'(z_k)) + \cdots + (x_{k-1} - y_{k-1})(f'(z_{k-1}) - f'(z_k)) \geqslant 0.$$

(2) Écrire cette propriété pour $k = n$, en déduire que :

$$f(x_1) + \cdots + f(x_n) \geqslant f(y_1) + \cdots + f(y_n).$$

EXERCICE 1.3.7. **D**

Soit $\mathcal{P}$ la propriété définie sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a,b[, \mathbb{R})$ par

$$\forall (u,v) \in]a,b[^2, u < v, \exists! w \in]u,v[| f(v) - f(u) = (v-u)f'(w).$$

On veut montrer que f vérifie $\mathcal{P}$ ssi f ou $-f$ est strictement convexe.

(1) Montrer que si f est strictement convexe, f vérifie $\mathcal{P}$.

(2) On suppose maintenant que f vérifie $\mathcal{P}$. Soit $L_{u,v}$ le polynôme d'interpolation de f en u et v. On définit la fonction $\varphi_{u,v}$ sur l'intervalle $]u,v[$ par $\varphi_{u,v} = f - L_{u,v}$.
Montrer que $\varphi_{u,v}$ garde un signe constant.
Prouver que, si $v' \in]u,v[$, alors $\varphi_{u,v'}$ est du même signe que $\varphi_{u,v}$.
Conclure.

EXERCICE 1.3.8. **I**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, convexe.

(1) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

(2) On suppose que $l = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$. Montrer l'existence dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $l' = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} [f(x) - lx]$.

---

2. Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles

2.1.

EXERCICE 2.1.1. **D C**

Si $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}_+)$, on pose $u_n(f) = \left(\displaystyle\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x \right)^{1/n}$.

(1) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n(f) = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$.

(2) Étudier $\displaystyle\lim_{n \to -\infty} u_n(f)$ où on a supposé que $\forall x \in [0,1],\ f(x) > 0$.

EXERCICE 2.1.2. **F**

On "rappelle" que l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Montrer que f est la fonction nulle.

EXERCICE 2.1.3. **I**

Montrer que toute fonction f de classe C^1 sur $[0,a]$ $(a>0)$ telle que $f(0)=0$ vérifie

$$\int_0^a |f(t)f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a f'^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cas d'égalité ?

EXERCICE 2.1.4. **I**

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx^n f(x)\,\mathrm{d}x$ (on pourra essayer des fonctions simples : fonctions constantes, polynomiales).

EXERCICE 2.1.5. **I**

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $a<b$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall k \in [0,n],\ \int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Montrer que f a au moins $n+1$ zéros sur $]a,b[$.

EXERCICE 2.1.6. **F**

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $f \in E$, on pose $I(f) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}.\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Trouver $\displaystyle\inf_{f\in E} I(f)$ et $\displaystyle\sup_{f\in E} I(f)$.

EXERCICE 2.1.7. **I**

Soit f est définie par : $\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= \dfrac{1}{2^n} \text{ pour } x \in]\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{1}{2^n}[\end{cases}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ (considérer f comme limite uniforme de fonctions continues par morceaux).

EXERCICE 2.1.8. **F**

Chercher les limites des suites :

(1) $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{n}{n^2+p^2}$

(2) $v_n = \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ $(\alpha \geqslant 0)$

(3) $w_n = \sum\limits_{p=1}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}}$

(on utilisera les primitives usuelles, cf. tableau page 83).

Exercice 2.1.9. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} [f(1/n).f(2/n)\cdots f(1-1/n)]^{1/n} = \exp\left(\int_0^1 \ln f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 2.1.10. $\boxed{\textbf{D}}$

On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle équirépartie dans $[0,1]$ ssi

pour tout $(\alpha,\beta) \in [0,1]^2$, $\alpha < \beta$, si on appelle $N(\alpha,\beta,n)$ le nombre d'entiers $i \leqslant n$ tels que $\alpha < x_i < \beta$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} N(\alpha,\beta,n) = \beta - \alpha$.

(1) Prouver que la suite (x_n) est divergente.
(2) Montrer que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$.
(3) Montrer que les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes :
  (i) (x_n) est équirépartie,
  (ii) pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2.1.11. $\boxed{\textbf{I}}$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \dfrac{1}{\sqrt{k+n}}\right) - n$.

Exercice 2.1.12. $\boxed{\textbf{I}}$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

(1) Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
(2) Trouver un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$ (pour les 3/2 : laisser le résultat sous forme intégrale).

Exercice 2.1.13. $\boxed{\textbf{F}}$

Chercher les limites des suites :

(1) $x_n = \dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{p=0}^{n-1} p^2 e^{ip\pi/n}$
(2) $y_n = n\sum\limits_{p=0}^{n-1} \dfrac{1}{(n+ip)^2}$.

EXERCICE 2.1.14. $\boxed{\textbf{F}}$

(1) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle : $u_n(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{x^n - 1}$.

(2) En déduire, à l'aide des sommes de Riemann les intégrales :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x - e^{it}} \text{ et } \int_0^{2\pi} \frac{x - \cos t}{x^2 - 2x\cos t + 1}\,\mathrm{d}t.$$

---

3. Intégration et dérivation

3.1. Primitives et intégrales d'une fonction continue.

EXERCICE 3.1.1. $\boxed{\textbf{F C}}$

(1) Si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = 0$.

(2) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ et $G_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Calculer I_n et montrer, à l'aide du 1., que $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n = \dfrac{\pi}{2}$ (c'est comme cela que l'on peut prouver que $\lim\limits_{X\to+\infty} \displaystyle\int_0^X \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$).

EXERCICE 3.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et telles que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) . \left(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) = 0.$$

Montrer que f ou g est nulle.

EXERCICE 3.1.3. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$; pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^n f''(t)[t - E(t) - \frac{1}{2}]^2\,\mathrm{d}t.$$

Donner une expression simple de u_n.

Pour $\alpha > 1$, en déduire un encadrement de $S(\alpha) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

EXERCICE 3.1.4. $\boxed{\textbf{I}}$

(1) Étudier la suite de terme général : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos^2 nx}$.

(2) Soit $g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)g(c)$ (formule de la moyenne).

(3) $f \in \mathcal{C}([0,\pi], \mathbb{R})$ étant donnée, étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{1 + \cos^2 nx}$.

Exercice 3.1.5. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}_+^*)$; on pose $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (x_i)_{i\in[0,n]}$, $x_i \in [a,b]$ tels que : $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{A}{n}$.

Soit g intégrable sur $[a,b]$, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} g(x_i)$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ (il est recommandé de faire intervenir G fonction réciproque de $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$).

(2) Application : $[a,b] = [0,\pi]$, $f(x) = g(x) = \sin x$.

Exercice 3.1.6. $\boxed{\textbf{F C}}$

Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3.1.7. $\boxed{\textbf{I}}$

On sait que $\cos^n t$ se linéarise, montrer alors que

$$\int_0^{\pi} \cos^n t \cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2^n}.$$

Calculer plus généralement $I(n,p) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n t \cos pt\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3.1.8. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit f une fonction strictement croissante sur $[0,a]$ telle que $f(0) = 0$, f dérivable sur $[0,a]$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(u)\,\mathrm{d}u - xf(x)$.

F est-elle dérivable ? Conclure et en donner une interprétation géométrique.

Exercice 3.1.9. $\boxed{\textbf{I}}$

On veut trouver toutes les fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

En dérivant par rapport à a puis par rapport à b et en posant $x = -a$, $x = b$, $\dfrac{a+b}{2} = 0$ trouver l'équation différentielle vérifiée par $g(x) = f(x) - f(-x)$ et $h(x) = f(x) + f(-x)$. Conclure.

Exercice 3.1.10. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit f de classe C^1 sur $[a,b]$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que

$$\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

(on pourra montrer que $f^2(t) \leqslant (t-a)\displaystyle\int_a^t f'^2(t)\,\mathrm{d}t$).

Exercice 3.1.11. $\boxed{\textbf{F}}$
Déterminer les limites suivantes :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$
(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad (x>0)$.

Exercice 3.1.12. $\boxed{\textbf{D}}$
Soit $\lambda>0$ et $E=\{f\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\leqslant \lambda f^2(b)\}$.
Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$\forall f\in E,\ \forall x\in[c,b],\ |f(x)|\geqslant\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Exercice 3.1.13. $\boxed{\textbf{D}}$
Déterminer les fonctions $f\in\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+, f^2(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3.1.14. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, déterminer $\varphi\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x\in\mathbb{R}, \varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^\pi\cos(x+y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

Exercice 3.1.15. $\boxed{\textbf{D}}$
Trouver $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que

$$\int_0^1 f(x)h''(x)\,\mathrm{d}x=0$$

pour tout h de F, où $F=\{h\in\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})|h(0)=h(1)=h'(0)=h'(1)=0\}$.

Exercice 3.1.16. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit la suite $u_n=\displaystyle\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

(1) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$.
(2) Montrer que, en $+\infty$, $u_n\sim e^{-n}2^{2n+1/2}$ (utiliser le résultat du 3.2.3).

Exercice 3.1.17. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Trouver la classe de g continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x\in\mathbb{R}^*, g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.2. Formules de Taylor.

EXERCICE 3.2.1. **F**
Soit $f : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ de classe C^2 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f''(x)| \leqslant M$.
Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}M > 0.$$

EXERCICE 3.2.2. **I C**
On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$.
Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour $f(x+h)$ et $f(x-h)$.
En déduire que : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$ et que $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$ où $M_i = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f^{(i)}(t)|$.

EXERCICE 3.2.3. **I**
Pour $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $R_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.
Montrer que :

$$R_n(f) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où $\alpha = \dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{2}$ et $\beta = -\dfrac{(b-a)^2}{12}\,[f'(b) - f'(a)]$ (utiliser la formule de Taylor pour la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$).

3.3. Développements limités.

EXERCICE 3.3.1. **I T**
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \left|e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right|^{1/n} = \left(\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta_n x}\right)^{1/n}$
Prouver que $e^{\theta_n x}$ admet un développement limité en $\dfrac{1}{n}$ à tout ordre.
En déduire un développement asymptotique de a_n à trois termes quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3.3.2. **F T**
Donner un équivalent quand x tend vers 0 de

$$\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x).$$

EXERCICE 3.3.3. **F T**

(1) Chercher le D.L. de Arcsin et Arcsin(Arcsin) en 0 à l'ordre 7.
(2) D.L. à l'ordre $n+1$ en 0 de $f(x) = \ln(1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!})$.

EXERCICE 3.3.4. $\boxed{\textbf{F}}$
Calculer les limites suivantes :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$
(2) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sin(2x-\pi/2)}{\cos 2x}\right)$
(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}(2-\frac{x}{a})^{\tan\dfrac{\pi x}{2a}}$
(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$
(5) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/6}\left(\tan\tfrac{3x}{2}\right)^{\tan 3x}$.

EXERCICE 3.3.5. $\boxed{\textbf{F T}}$

(1) Montrer que $\forall k\in\mathbb{R}$, $\ln x + x = k$ admet une seule solution x_k.
(2) Montrer que, lorsque $k\to+\infty$, on peut écrire : $x_k = ak + b\ln k + c\dfrac{\ln k}{k} + o\left(\dfrac{\ln k}{k}\right)$ a, b, c étant des constantes à déterminer.

EXERCICE 3.3.6. $\boxed{\textbf{I C T}}$
Donner un développement asymptotique à quatre termes dans l'échelle $(n^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}}$ $(n\to+\infty)$ de la $n^{\text{ième}}$ solution strictement positive de l'équation $\tan x = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

---

1. Indications

Indication 1.1.1 Appliquer le T.V.I. à $g(x) = f(x+a) - f(x) - af'(x)$.

Indication 1.1.2

(1) Montrer que f est bijective puis que $f\circ f$ est croissante.
(2) Ne pas oublier que $f = \varphi^2$ puis dériver la relation et passer à la limite.
(3) Appliquer le (2) à f^{-1}.

Indication 1.1.3 Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $g(x)$; distinguer les cas f affine, f non affine ; se ramener au cas où $f'(a) > \inf g(x) = m$; discuter enfin les cas $g(b) > m$ ou $g(b) = m$.

Indication 1.1.4 On a $p'(x) = xp(x)$ et $q'(x) = -xq(x)$ (p paire, q impaire) puis $f(x) = \lambda e^{x^2/2}$.

Indication 1.1.5 $g'(x) \leqslant 0$ et $g(a) = 0$.

Indication 1.1.6 Distinguer les cas $n = 2k$, $n = 2k+1$ et faire une étude de fonction.

Indication 1.1.7 Considérer $E = \{t\in[a,b[\mid f(t) = f(a)\}$ et montrer que $\sup E < b$ et montrer que $f(x) - f(a)$ n'est pas strictement positive sur $]c,b[$.

Indication 1.1.8

(1) Appliquer le T.A.F. sur les intervalles $[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$.
(2) Il suffit que f^{-1} soit dérivable (soit f' ne s'annule pas).

Indication 1.1.9 Prendre $g(x) = f(x) - x$ et montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$).

Indication 1.1.10 Se démontre par récurrence sur n :

Indication 1.1.11 Raisonner par récurrence en montrant par l'absurde que $f^{(n+1)}$ garde un signe constant sur $[x_n, +\infty[$ et utiliser la formule de Taylor.

Indication 1.1.12 Donner l'expression pour $n = 1, 2, 3$ et faire une récurrence avec la formule de Leibniz.

Indication 1.1.13 Trouver une équation différentielle vérifiée par f et utiliser Leibniz.

Indication 1.2.1 Raisonner par l'absurde et utiliser Taylor-Lagrange en 0 et 1.

Indication 1.2.2 Raisonner par récurrence sur n et distinguer les cas $p = 1$, $p \geqslant 2$.

Indication 1.2.3 L'existence de θ est une conséquence du T.A.F., on exprime ensuite $\ln \theta x$.

Indication 1.2.4 Remplacer c par x, $f''(d)$ par A. En faisant la différence, on obtient une fonction $g(x)$ et on suppose que A est choisi pour que $g(c) = 0$. On utilise ensuite le théorème de Rolle.

Indication 1.2.5 Remplacer b par x, $f^{(3)}(c)$ par A. En faisant la différence, on obtient une fonction $g(x)$ et on suppose que A est choisi pour que $g(b) = 0$. On utilise ensuite le théorème de Rolle.

Indication 1.2.6

(1) f' se prolonge par continuité à $\mathbb{R}$.
(2) Récurrence immédiate et on récupère une relation entre a_{n+1} et a_n.
(3) On fait une récurrence avec la généralisation du théorème de Rolle.

Indication 1.2.7 Prouver que $\lim_{h\to 0} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2}(f(x) - f(0))\,\mathrm{d}x = 0$.

Indication 1.2.8 Le tracé des courbes $y = f(x)$ et de la droite $y = x$ fournit les grandes lignes de la discussion.

(1) Faire intervenir $\alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\beta = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.
(2) (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
(3) et (4) Suites homographiques.

Indication 1.2.9 Supposer (par exemple) que $v_0 \leqslant u_0 < 1$ et montrer, par majorations que ces suites tendent vers 0.

Indication 1.2.10

(1) $u_n \to +\infty$ par l'absurde puis, comme $v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln(1 + 1/u_{n+p})$, montrer que (v_n) est croissante et majorée. Ceci donne le premier terme en exponentielle. On étudie alors la différence.
(2) $u_1 > 0$.
(3) On utilise Césaro.

Indication 1.2.11 C'est un problème d'erreur d'arrondi.

Indication 1.2.12 Ne pas se laisser impressionner par une suite qui semble converger...

Indication 1.2.13

(1) Chercher des relations avec $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$.
(2) On trouve $v_n \sin \frac{\alpha}{2^n} = \frac{b \sin \alpha}{2^n}$ et $u_n - v_n \to 0$.
(3) Se ramener au cas où $u_n > 0$ et prendre le logarithme.

Indication 1.3.1

(1) Poser $g = f - P$, $h = f + P$ et montrer que g et $-h$ sont convexes.
(2) Montrer que $g(x) \geqslant 0$ si $x \in]a, x_0[$ puis que $g = 0$.
(3) On montre là aussi que $g(x) \geqslant 0$.

Indication 1.3.2 Utiliser l'inégalité de la moyenne.

Indication 1.3.3 Poser $t = \alpha s + (1 - \alpha)u$, $\alpha \in]0, 1[$.

Indication 1.3.4

(1) Écrire $1 = 1^{\frac{n-m}{n}}$ et utiliser l'inégalité $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).
(2) Utiliser le (1)...
(3) Immédiat.

Indication 1.3.5 Manipuler les colonnes pour avoir $\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

Indication 1.3.6

(1) Utiliser l'inégalité $f'(z_k) \geqslant f'(z_{k+1}$ pour faire la récurrence.
(2) Utiliser le T.A.F. où $f(x_k) - f(y_k) = (x_k - y_k)f'(z_k)$.

Indication 1.3.7

(1) Utiliser le T.A.F.
(2) Montrer que $\varphi_{u,v}$ ne s'annule pas sur $]u, v[$ (par exemple $\varphi_{u,v} < 0$) puis que pour tout $v' \in]u, v[$, $\varphi_{u,v'}$ a le même signe que $\varphi_{u,v}$ puis étendre cette propriété à $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$.

Indication 1.3.8

(1) Montrer que la fonction $\varphi_0(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ est croissante.
(2) Montrer que la fonction $\varphi_y(x) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est croissante.

Indication 2.1.1

(1) Soit $M = \sup f$ que l'on suppose > 0 alors on minore f par $M - \varepsilon$ sur un intervalle $[c, d]$, on prend enfin n assez grand.
(2) Prendre $g = 1/f$.

Indication 2.1.2 Montrer que $\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Indication 2.1.3 Se ramener au cas où $f' > 0$ – en utilisant la fonction g telle que $g' = |f'|$–puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le cas d'égalité correspond aux fonction linéaires.

Indication 2.1.4 Montrer que $u_n \to 1$ en étudiant $v_n = u_n - \frac{n}{n+1}f(1) = \int_0^1 nx^n(f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x$.

Indication 2.1.5 Poser $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ les points où f change de signe et montrer, en posant $g(x) = (x - a_1)(\ldots)(x - a_p)f(x)$, que $p \leqslant n$ entraîne une contradiction.

Indication 2.1.6 Utiliser Cauchy-Schwarz pour montrer que $\inf I(f) = 1$ puis, avec une fonction exponentielle, montrer que $I(f)$ n'est pas majorée.

Indication 2.1.7 Prendre $\varphi_N(x) = f(x)$ si $x > \frac{1}{2^{N+1}}$ et $\varphi_N(x) = 0$ ailleurs.

Indication 2.1.8 Reconnaître des sommes de Riemann, $u_n \to \frac{\pi}{4}$, $v_n \to \frac{1}{\alpha+1}$, $w_n \to \frac{\pi}{2}$.

Indication 2.1.9 Prendre le logarithme.

Indication 2.1.10

(1) Par l'absurde (il y a une infinité de x_n dans $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$).
(2) Immédiat.
(3) $(i) \Rightarrow (ii)$ On démontre le résultat pour les fonctions constantes, les fonctions caractéristiques d'intervalles et, finalement pour les fonctions continues par morceaux.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Immédiat.

Indication 2.1.11 Utiliser un encadrement de $\operatorname{ch} x$ avec la formule de Taylor.

Indication 2.1.12

(1) Utiliser l'inégalité $\ln(1 + x) \leqslant x$.
(2) Poser $u = t^n$, $J = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u$ où $f(u) = \frac{\ln(1+u)}{u}$ et majorer $|nI_n - J|$.
Pour le calcul de J, penser à un développement en série entière.

Indication 2.1.13 Penser aux sommes de Riemann pour des fonctions complexes. $x_n \to \frac{i}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{4i}{\pi^3}$.

Indication 2.1.14

(1) Utiliser la formule $\frac{P}{Q} = \sum \frac{P(a_i)}{Q'(a_i)(X-a_i)}$ lorsque Q a tous ses pôles simples.

(2) On utilise les sommes de Riemann et on passe à la limite.

Indication 3.1.1

(1) Faire une I.P.P.
(2) Calculer $I_n - I_{n-1}$. Montrer que $I_n - G_n \to 0$.

Indication 3.1.2 Montrer le résultat : si F et G sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifient $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, [F(a)-F(b)].[G(a)-G(b)] = 0$ alors l'une d'elle est constante.

Indication 3.1.3 En intégrant 2 fois par parties on obtient $u_n = \frac{1}{8}[f'(n)-f'(0)]+\frac{1}{2}[f(n)+f(0)]$. On trouve alors $\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{2} \leqslant S(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{8}$.

Indication 3.1.4

(1) Poser $t = nx$, I_n est constante et vaut $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
(2) Appliquer le T.A.F.
(3) On pose $t = nx$ et on applique la formule de la moyenne, on reconnaît enfin une somme de Riemann.

Indication 3.1.5

(1) Poser $x_i = G(iA/n)$ puis reconnaître une somme de Riemann.
(2) $S_n \to \frac{\pi}{4}$.

Indication 3.1.6 Calculer $I_{n+2} - I_n$, $J_{n+1} - J_n$.

Indication 3.1.7 On utilise la relation $\int_0^{\pi} \cos ht \cos pt \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\delta_{hp}$, si $n-p = 2k$, $I(n,p) = \frac{\pi}{2^n}\binom{n}{k}$, autrement $I(n,p) = 0$.

Indication 3.1.8 F est dérivable et $F' = 0$, on utilise ensuite le fait que les graphes de f et f^{-1} sont symétriques.

Indication 3.1.9 On a $h(x) = \frac{x}{2}h'(x) + h(0)$, $g(x) = \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0))$, f est un polynôme de degré $\leqslant 3$.

Indication 3.1.10 Écrire $f^2(t) = \left(\int_a^t f'(u)\, \mathrm{d}u\right)^2$ pour $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ et utiliser Cauchy-Schwarz.

Indication 3.1.11

(1) Pour x assez petit, on encadre $\cos t$, la limite est $\ln 2$.
(2) Idem avec $\frac{\sin t}{t}$, la limite vaut $\ln \frac{b}{a}$.

Indication 3.1.12 Montrer que $|f(x)| \geqslant |f(b)| - \left|\int_x^b f'(t)\, \mathrm{d}t\right|$ puis appliquer Cauchy-Schwarz à $(1, f')$ et enfin utiliser l'hypothèse $|f(b)| \geqslant \left[\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'^2(t)\, \mathrm{d}t\right]^{1/2}$.

Indication 3.1.13 Écarter le cas où $f = 0$ puis étudier $F(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$ sur un intervalle où f ne s'annule pas. On trouve finalement $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,b] \\ x-b & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$ (où f s'annule sur $[0,b]$.

Indication 3.1.14 En développant le cosinus on obtient la forme des fonctions φ recherchées ($\varphi(x) = f(x) + \alpha \cos x + \beta \sin x$). On reporte alors dans la relation.

Indication 3.1.15 Le problème ici est de trouver l'orthogonal de $H = \{h'' \mid h \in F\}$ pour le produit scalaire $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, \mathrm{d}t$. Chercher tout d'abord les fonctions de $H^{\perp}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^2$ puis étendre ce résultat.

Indication 3.1.16

(1) Prendre le logarithme et reconnaître une somme de Riemann.
(2) En utilisant le résultat du 3.2.3 on affine l'approximation.

Indication 3.1.17 g est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}^*$ mais seulement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (chercher un exemple).

Indication 3.2.1 Utiliser Taylor-Lagrange avec $f(x+y)$ (ou Taylor-Intégral mais c'est un peu plus long).

Indication 3.2.2 On fait la différence des 2 formules obtenues d'où une expression de $2hf'(x)$.

Indication 3.2.3 On exprime $R_n(f) = \frac{h}{2}U_n + \frac{h^2}{6}V_n$ où U_n et V_n sont des sommes de Riemann dont on connaît la limite.

Indication 3.3.1 Commencer par prouver que $\theta_n \sim \frac{1}{n}$ puis, par récurrence, montrer que θ_n admet un développement limité à l'ordre p. On utilise ensuite la formule de Stirling pour obtenir $a_n = |x|e\left[\frac{1}{n} - \frac{3}{2}\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln|x| - \ln\sqrt{2\pi}}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$.

Indication 3.3.2 Soit c'est du calcul un peu bourrin soit on peut tenter une simplification en donnant une formule sur $\sin u - \operatorname{sh} v$.

Indication 3.3.3

(1) Calculs bourrins...
(2) Pas de calcul ici...

Indication 3.3.4 Les limites dans l'ordre $-\frac{e}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$, $e^{2/\pi}$, $1/2$, $1/e$.

Indication 3.3.5

(1) Étudier la fonction.
(2) On a $x_k \sim k$ puis on injecte dans la relation $x_k = k + o(k)$ et on recommence.

Indication 3.3.6 On fait comme à l'exercice précédent avec $x_n \in]n\pi - 2\pi/2, n\pi - \pi/2[$.

2. Solutions

Solution 1.1.1 La condition imposée s'écrit : $g(x) = f(x+a) - f(x) - af'(x) = 0$.

On sait que $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(x_1) = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$, $f(x_2) = \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ (cf. théorème 3.22 page 64) et que $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Alors $g(x_1) \leqslant 0$ et $g(x_2) \geqslant 0$: le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 3.21 page 64) permet de conclure.

Solution 1.1.2 Si on pose $x_n = \varphi^n(x)$, la suite x_n est arithmético-géométrique :

si $l = \dfrac{b}{1-a}$ alors $x_n - l = a^n(x-l)$ donc $\varphi^n(x) = a^n x + b\dfrac{1-a^n}{1-a}$.

(1) $(\varphi^{-1} \circ f) \circ f = \mathrm{Id}$ et $f \circ (f \circ \varphi^{-1}) = \mathrm{Id}$ d'où f bijective et comme f est continue, f est strictement monotone ; $f \circ f$ est strictement croissante $\Rightarrow a > 0$.

(2) $\varphi^{n+2} = \varphi^2 \circ \varphi^n = \varphi^n \circ \varphi^2$ soit $f \circ \varphi^n = \varphi^n \circ f$ ce qui donne

$$a^n f(x) + b\frac{1-a^n}{1-a} = f(a^n x + b\frac{1-a^n}{1-a}).$$

On dérive cette relation, on simplifie par $a \neq 0$ et on passe à la limite $n \to +\infty$ et on arrive à la relation $f'(x) = f'(\frac{b}{1-a})$ donc f est affine. En cherchant f sous la forme $f(x) = \alpha x + \beta$ on trouve finalement

$$f(x) = \varepsilon\sqrt{a}x + \frac{b}{\varepsilon\sqrt{a}+1}$$

où $\varepsilon = \pm 1$.

(3) Pour $a > 1$, on considère $\varphi^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}x - \dfrac{b}{a} = a'x + b'$. On a vu que f est inversible donc on étudie le problème avec f^{-1}. Le résultat du 2. s'applique à f^{-1} et on trouve $f(x) = \varepsilon\sqrt{a}x + \dfrac{b}{\varepsilon\sqrt{a}+1}$.

Solution 1.1.3 On trouve $g'(x) = \dfrac{f'(x) - g(x)}{x-a}$.

Si f est affine, tout point de $]a,b[$ convient.

Si f n'est pas affine, supposons $f'(a) > \inf_{x\in[a,b]} g(x) = m$ (si cette condition n'est pas réalisée, on prend $-f$ voir à la fin).

Soit $c \in]a,b]$ tel que $g(c) = m$:

- si $c \neq b$ alors $g'(c) = 0$ et on a bien $f'(c) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$,
- si $c = b$ alors $g'(b) = \dfrac{f'(b) - m}{b-a}$ or, g présentant un maximum de b qui est une extrémité de l'intervalle, on a $g'(b) \leqslant 0$ donc $f'(b) \leqslant m$ soit $f'(b) = f'(a) \leqslant m$ ce qui est impossible.

Supposons que $f'(a) = m$, on pose alors $f_1 = -f$, $g_1 = -g$. Si à nouveau on a $f_1'(a) = \inf_{x\in[a,b]} g_1(x)$ c'est que g est constante i.e. f est affine, ce que l'on a écarté. On a donc $f_1'(a) > \inf_{x\in[a,b]} g_1(x)$ et on applique le résultat que l'on vient de prouver à f_1 et g_1 ce qui permet finalement de conclure.

Solution 1.1.4 Soit $p(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$; $q(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ alors $p'(x) = xp(x)$ et $q'(x) = -xq(x)$ donc $p(x) = \lambda e^{x^2/2}$, $q(x) = \mu e^{-x^2/2}$.

$\mu = 0$ car q est impaire) d'où $f(x) = \lambda e^{x^2/2}$.

La réciproque est immédiate.

Solution 1.1.5 $g'(x) = (f'(x)f(x) - \alpha f^2(x))e^{-2\alpha x} \leqslant 0$: $g \searrow$ et $g(a) = 0$, $g(x) \geqslant 0 \Rightarrow g = 0 \Rightarrow f = 0$.

Solution 1.1.6

- Si $n = 2k$ $f'(x)$ s'annule pour $x_0 = -\dfrac{p}{2k}$ et donc f s'annule au plus 2 fois.
- Si $n = 2k+1$:
  - si $p \geqslant 0$ f est croissante et f ne s'annule qu'une seule fois,
  - si $p < 0$ f' s'annule 2 fois, pour $x_0 = \pm\left(\dfrac{p}{2k+1}\right)^{1/2k}$ et donc f s'annule au plus 3 fois.

Solution 1.1.7 Géométriquement, la réponse est OUI.

Soit $E = \{t \in [a, b[\mid f(t) = f(a)\}$. E est non vide et majoré par b. Soit $c = \sup E$.

Si $c = b$ alors on peut trouver une suite (t_n) d'éléments de E qui tend vers b. On aurait $\dfrac{f(t_n) - f(b)}{t_n - b} = 0$ et, à la limite, $f'(b) = 0$ ce qui est impossible.

On a donc $c < b$.

$g(x) = f(x) - f(a)$ ne s'annule pas sur $]c, b[$, elle garde donc un signe constant.

Supposons que g soit positive sur $]c, b[$ alors, pour $x \in]c, b[$, on aurait $\dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0$ et donc $f'(b) \leqslant 0$ ce qui est impossible.

On a donc $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$ et $f'(c) = 0$.

Enfin, comme f est continue, $f(c) = f(a)$.

Solution 1.1.8

(1) On applique le théorème des accroissements finis sur les intervalles $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ pour $i \in [1, n]$ et on trouve

$$f(\frac{i}{n}) - f(\frac{i-1}{n}) = \frac{1}{n} f'(x_i).$$

On fait la somme de toutes ces relations, l'égalité demandée est alors immédiate.

(2) Si f est strictement monotone, f est bijective, supposons que f^{-1} soit dérivable alors on peut appliquer le a à f^{-1}. On utilise alors la relation $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$ pour conclure.

Solution 1.1.9 Soit $g(x) = f(x) - x$, comme f est décroissante, $x < 0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(0) \Rightarrow g(x) \geqslant f(0) - x$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

$x \geqslant 0$: supposons $g(x)$ minorée : $g(x) \geqslant a$ alors $f(x) \geqslant a + x$ mais f est décroissante et donc il est impossible d'avoir $f(0) \geqslant f(x) \geqslant a + x$ pour tout x.

Conclusion : g s'annule une fois et une seule.

Solution 1.1.10 Se démontre par récurrence sur n :
si $n = 1$ c'est le théorème de Rolle.
Supposons la propriété vraie à l'ordre n. À l'ordre $n+1$: si $x_1 < \cdots < x_{n+1}$ sont les points où $f(x_i) = 0$ alors $\exists y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(y_i) = 0$ et on applique l'hypothèse de récurrence à f'.

Solution 1.1.11 On suppose que $f(0) > 0$. Si f' ne s'annule pas, f' reste positive et donc f est strictement croissante, elle ne peut tendre vers 0 ce qui est impossible. Ceci assure donc l'existence de x_1.

On suppose avoir trouvé $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par récurrence.

Si $f^{(n+1)}$ garde un signe constant sur $]x_n, +\infty[$, par exemple $f^{(n+1)}(x) > 0$. Soit $a > x_n$ alors la fonction $f^{(n)}$ est strictement croissante et, pour $x \geqslant a$, on a $f^{(n)}(x) \geqslant f^{(n)}(a) > 0$.

On peut alors écrire :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$$

(formule de Taylor avec reste intégral, théorème 4.31 page 84) et donc

$$f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

en minorant $f^{(n)}(t)$ par $f^{(n)}(a)$.

On aurait alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ce qui est contradictoire.

En changeant au besoin le signe de f, on peut se ramener au cas précédent et conclure.

Solution 1.1.12 Par récurrence sur n :

- $n = 1$ immédiat.
- On suppose la propriété vraie à l'ordre n. À l'ordre $n+1$, on a (en utilisant la formule de Leibniz—cf. théorème 4.4 page 69—)

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (xf_n(x))^{(n+1)} = xf_n^{(n+1)}(x) + (n+1)f_n^{(n)}(x) = \frac{n!}{x}.$$

De même, on trouve $[x^{n-1}\ln(1+x)]^{(n)} = \dfrac{(n-1)!}{x}\left[\dfrac{1}{(1+x)^n} - 1\right]$.

Solution 1.1.13 On vérifie que $(1+x^2)f'(x) - xf(x) = 0$ et on dérive $n+1$ fois avec Leibniz. Ce genre de technique est à connaître car on aura l'occasion de s'en servir à d'autres moments.

Solution 1.2.1 Par l'absurde, supposons que $\forall x \in]0,1[$, $|f''(x)| < 4$.
On applique la formule de Taylor-Lagrange à f aux points 0 et 1 : on obtient $f(1/2) = \dfrac{1}{8}f''(\alpha)$ donc $|f(1/2)| < 1/2$ et $f(1/2) = 1 + \dfrac{1}{8}f''(\beta)$. Conclusion : $|1 - f(1/2)| < 1/2$ ce qui donne une contradiction !
On pouvait aussi appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $g(x) = f(1-x) - f(x)$.

Solution 1.2.2 On procède par récurrence sur n entier tel que la propriété demandée s'applique à toute fonction de classe C^∞.

- Si $n = 1$, on a $p = 1$ et $k = 0$, le résultat est acquis.
- Supposons maintenant la propriété vraie à l'ordre n :
  à l'ordre $n+1$, distinguons 2 cas :

- $p = 1$, c'est immédiat.
- $p \geqslant 2$, on applique Rolle sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. La fonction $g = f'$ vérifie alors la propriété à l'ordre n (en remplaçant p par $2p-1$).

Cet exercice généralise le résultat de l'exercice 1.1.10

Solution 1.2.3 Par continuité : $f(0) = 0$ et $x > 0$: $f'(x) = 1 - \ln^2 x - 2\ln x$: le TAF implique : $\exists \theta \in]0,1[\ x(1-\ln^2 x) = x(1-\ln^2 \theta x - 2\ln \theta x) \Rightarrow \ln x = (\ln \theta x)\left(1 + \dfrac{2}{\ln \theta x}\right)^{1/2} = \ln \theta x + 1 + o(1) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \theta = \dfrac{1}{e}$.

Solution 1.2.4 Soit $g(x) = f(x) - \left[f(x) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + A(x-a)(x-b)\right]$ où A est choisi tel que $g(c) = 0$.

Alors $g(a) = g(b) = g(c) = 0 \Rightarrow \exists d \in]a,b[,\ g''(d) = 0 \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}f''(d)$ (utiliser le 1.1.10 avec $n = 2$).

Solution 1.2.5 Soit

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(x)+f'(a)) + \frac{(x-a)^2}{12}(f''(x)-f''(a)) - \frac{(x-a)^5}{720}A$$

où A est tel que $\varphi(b) = 0$. φ est C^3 sur $[a,b]$. On a alors

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}[f'(x)-f'(a)] - \frac{x-a}{6}(2f''(x)+f''(a)) + \frac{(x-a)^2}{12}f'''(x) - \frac{A}{144}(x-a)^4$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{6}[f''(x)-f''(a)] - \frac{x-a}{6}f^{(3)}(x) + \frac{(x-a)^2}{12}f^{(4)}(x) + \frac{A}{36}(x-a)^3$$

d'où $\varphi^{(3)}(x) = \dfrac{(x-a)^2}{12}(f^{(5)}(x) - A)$ or $\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi''(a) = 0$ et en appliquant le théorème de Rolle plusieurs fois, on a l'existence de

- $c_1 \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c_1) = 0$,
- $c_2 \in]a,c_1[$ tel que $\varphi''(c_2) = 0$,
- $c \in]a,c_2[$ tel que $\varphi'''(c) = 0$.

On a donc $A = f^{(5)}(c)$.

Remarque : si on applique le résultat précédent à une primitive de f aux points $x_k = a + kh$ où $h = \dfrac{b-a}{n}$ alors

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})] - \frac{h^2}{12}[f'(x_{k+1})-f'(x_k)] + \frac{h^5}{720}f^{(4)}(c_k)$$

soit, en faisant la somme pour k variant de 0 à $n-1$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{h}{2}[f(b)-f(a)] - \frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)] + \frac{h^4}{720}[f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)] + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

en reconnaissant une somme de Riemann. Ce résultat est à rapprocher de celui de l'exercice 3.2.3.

Solution 1.2.6

(1) $f'(x) = -\dfrac{2x(2x+1)}{(x^2+1)^2}$ donc f' peut se prolonger par continuité à $\mathbb{R}$. On a donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (ce qui signifie que les demi-tangentes à droite et à gauche du point de discontinuité sont les mêmes).

(2) Par récurrence : la propriété est vraie pour $n = 2$;
$$f^{(n)}(x) = \frac{-2nxa_n(x) + (1+x^2)a_n'(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$
d'où : $a_{n+1} = -2nxa_n(x) + (1+x^2)a_n'(x)$: $\deg a_{n+1} = n+1$ (avec les termes de plus haut degré).

(3) Par récurrence, on utilise le théorème de Rolle et le fait que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$: on vérifie que a_2 a deux racines (0 et $-1/2$). Supposons que a_n ait n racines que l'on ordonne $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Grâce au théorème de Rolle généralisé (cf. corollaire 4.6 page 70 et la question (i) page 70) on sait qu'il existe $y_1 < x_1$, $y_{n+1} > x_n$ tels que $f^{(n)}(y_1) = 0$ et $f^{(n)}(y_{n+1}) = 0$. On utilise ensuite le théorème de Rolle entre x_{i-1} et x_i, $i \in [2, n]$ pour trouver y_i tel que $f^{(n)}(y_i) = 0$. Comme les zéros de $f^{(n)}$ sont des racines de a_{n+1}, alors on a prouvé que a_{n+1} a bien $n+1$ racines distinctes, ce qui achève la récurrence.

Solution 1.2.7 Un calcul simple nous donne : $\displaystyle\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} h$, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2}(f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x \to 0$.
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha,\ |f(x)-f(0)| < \varepsilon \Rightarrow \left|\int_0^\alpha \frac{h}{h^2+x^2}(f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon\int_0^\alpha \frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\frac{\pi}{2}$$
et, en posant $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$,
$$\left|\int_\alpha^1 \frac{h}{h^2+x^2}(f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M\int_\alpha^1 \frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x = 2M\left(\operatorname{Arctan}\frac{h}{\alpha} - \operatorname{Arctan} h\right)$$
On choisit h assez grand pour que $2M\left(\operatorname{Arctan}\dfrac{h}{\alpha} - \operatorname{Arctan} h\right) \leqslant \varepsilon\dfrac{\pi}{2}$ ce qui permet de conclure.

Solution 1.2.8

(1) On pose $\alpha = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (α et β sont les racines de l'équation $2x = 1/2 + x^2$).
Par des récurrences très simples, on a :
- si $u_1 \in [0, \alpha]$, $(u_n) \nearrow \alpha$,
- si $u_1 \in]\alpha, \beta[$, $(u_n) \searrow \alpha$,
- si $u_1 = \beta$, $u_n = \beta$ pour tout n
- et enfin, si $u_1 > \beta$ alors $(u_n) \nearrow +\infty$.

(On a fait la discussion sur u_1 qui est positif ce qui réduit les cas.)

(2) On remarque que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes et qu'elles convergent vers 1. En effet, si $f(x) = \sqrt{2-x}$ alors $g = f \circ f$ est croissante donc les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
On peut supposer que $u_0 < u_1$ (l'autre cas se traitant de manière tout à fait semblable) alors $u_0 < \sqrt{2-u_0}$ donc $u_0 < 1 < u_1$ et, par une récurrence immédiate, $u_{2n} < 1 < u_{2n+1}$.

(u_{2n}) est croissante, (u_{2n+1}) est décroissante.
En multipliant par les expressions conjuguées, on arrive à

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{u_{n+1} + u_n}$$

et, si $u_{n+1} > 1$ alors $u_0 < u_n < 1$ donc $u_{n+1} + u_n > 1 + u_0$ (et si $u_0 = 0$, on part de u_1).
On a alors $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \dfrac{u_1 - u_0}{(1+u_0)^n}$ donc les suites sont bien adjacentes.

(3) et (4) on a affaire à des suites homographiques...

Solution 1.2.9 Supposons (par exemple) $1 > u_0 \geqslant v_0$ alors $u_1 \leqslant u_0^2$, $v_1 \leqslant u_0^2$ et par récurrence, $u_n \leqslant u_0^{2^n}$, $v_n \leqslant u_0^{2^n}$ donc la limite est nulle.

Solution 1.2.10

(1) Si $a > 0$, (u_n) croissante et si $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n < +\infty$ alors $l^2 = 0$ ce qui est impossible.
On a alors $v_{n+p+1} - v_{n+p} = \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln(1 + 1/u_{n+p})$ et comme la suite (u_n) est croissante,

$$0 \leqslant v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln(1 + 1/u_n).$$

En additionnant ces inégalités, pour $p \in [0, k]$, on obtient

$$0 \leqslant v_{n+k+1} - v_n \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^{n+p+1}} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \frac{1}{2^n}.$$

La suite (v_n) est donc croissante et majorée, elle converge vers α et, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on a :

$$0 \leqslant \alpha - v_n \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \frac{1}{2^n}.$$

On multiplie cette dernière inégalité par 2^n et, en prenant l'exponentielle qui est une fonction croissante, on a

$$u_n \leqslant e^{2^n\alpha} \leqslant u_n + 1.$$

Première conclusion : $u_n \sim e^{2^n\alpha}$.
Deuxième conclusion : si on pose $\beta_n = e^{2^n\alpha} - u_n$ alors la suite (β_n) est bornée, de plus, elle vérifie la relation de récurrence

$$\beta_{n+1} = -\beta_n^2 + \beta_n + (2\beta_n - 1)e^{2^n\alpha}$$

et donc $|2\beta_n - 1| \leqslant |\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n| e^{-2^n\alpha} \to 0$ ce qui permet de dire que $\beta_n \to \dfrac{1}{2}$.

(2) $a < -1$ alors $u_1 > 0$.

(3) Par récurrence : $u_n \in]-1, 0[$ et comme (u_n) est croissante, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Puis $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{1+u_n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (w_n - w_{n+1}) = 1$ i.e. $w_n \sim -n$ (en utilisant la convergence de Césaro) et donc $u_n \sim -\dfrac{1}{n}$.

Solution 1.2.11 Sur CASIO FX-850P, on obtient $u_6 = -333333$, $u_8 = -3,3333333.10^{11}$, $u_{37} = +\infty$ (l'erreur est en effet due aux arrondis...). Qu'en pense MAPLE ?

Solution 1.2.12 On trouve $u_{100} = 100,00025$, puis $u_{1000} = 101,810744$ i.e. la suite semble converger mais si on calcule u_{10000} on obtient $5,8987.10^{36}$ ce qui anéanti nos espoirs de voir converger cette suite. Un étude théorique permet de comprendre ce phénomène : si on pose $\Delta = 1,01$ on trouve $u_n = \left(\frac{101}{2} - \frac{99}{2\sqrt{\Delta}}\right) r_1^n + \left(\frac{101}{2} + \frac{99}{2\sqrt{\Delta}}\right) r_2^n + 100$ où $r_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{\Delta})$ et $r_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{\Delta})$.

Comme le coefficient de r_1^n est faible, il n'intervient pas beaucoup dans le calcul des premiers termes mais c'est lui qui détermine le comportement asymptotique.

Solution 1.2.13

(1) On a $(n+1)(u_{n+1}-v_{n+1}) = n(u_n - v_n)$ et $u_{n+1}+v_{n+1} = u_n+v_n$ donc $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ ce qui donne $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{a+b}{2}$.

(2) On aura : $a = b\cos\alpha$ et par récurrence : $u_n = b\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cos^2\frac{\alpha}{2^n}$, $v_n = \frac{u_n}{\cos(\alpha/2^n)}$ d'où : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}$ (en effet $v_n \sin\frac{\alpha}{2^n} = \frac{b\sin\alpha}{2^n}$).

(3) On remarque que u_n est du signe de u_1, pour $n \geqslant 2$, on suppose que $u_1 > 0$ et on pose $v_n = \ln u_n$, on a alors $v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n + \ln k$ d'où $v_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n - \frac{1}{2}\ln k$ i.e. $u_n = \frac{1}{\sqrt{k}} e^{\alpha(-1)^n} e^{\beta 2^n}$ pour $n \geqslant 1$.

Solution 1.3.1

(1) $g''(x) = f''(x) + M \geqslant 0$ donc g est convexe. En exploitant l'inégalité de convexité, pour $t \in [0,1]$, $g(ta + (1-t)b) \leqslant tg(a) + (1-t)g(b) = 0$, on a $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant P(x)$.
On fait de même avec h d'où $-P(x) \leqslant f(x) \leqslant P(x)$.

(2) $g(x_0) = 0$ soit $x \in]a, x_0[$ alors, comme $x_0 \in]x, b[$, il existe $t \in]0,1[$ tel que $x_0 = tx + (1-t)b$ donc $g(x_0) \leqslant tg(x) + (1-t)g(b)$ d'où $g(x) \geqslant 0$.
Or $g(x) \leqslant 0$ donc : $g = 0$.
On procède de même si $x \in]x_0, b[$.

(3) $g'(a) = 0$ et g' est croissante donc $\forall x \in [a,b]$, $g'(x) \geqslant 0$ soit $g(x) \geqslant 0$ et comme $g(x) \leqslant 0$, $g = 0$ i.e. $f(x) = P(x)$.

Solution 1.3.2 On pose $\alpha_i = \frac{x_i}{x_{i+1}}$ ($\alpha_n = \frac{x_n}{x_1}$) alors on sait que

$$\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \alpha_i$$

(inégalité de la moyenne—cf. question (*iii*) page 73—) avec égalité ssi $\alpha_i = \alpha_j$ d'où

$$\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i\right)^{1/n} = 1 \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_1}\right)$$

et on a égalité ssi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Solution 1.3.3 Évidente géométriquement, la première inégalité se démontre en posant $t = \alpha s + (1-\alpha)u$.
t fixé, si $x < t$ $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(x)}{t-x} \leqslant \beta \Rightarrow (1)$ et si $x > t$, $\beta \leqslant \dfrac{\varphi(x)-\varphi(t)}{x-t} \Rightarrow (1)$ (pour $x = t$ (1) est évident). Dans (1), on remplace x par $f(u)$ et on intégre de 0 à 1.
Remarque : on peut obtenir directement cette inégalité en utilisant les sommes de Riemann.

Solution 1.3.4

(1) On écrit que $1 = 1^{\frac{n-m}{n}}$ puis on utilise l'inégalité $AB \leqslant \dfrac{1}{p}A^p + \dfrac{1}{q}B^q$ avec $A = (1+\frac{a}{m})^{m/n}$, $B = 1^{(n-m)/n}$, $p = \dfrac{n}{m}$, $q = \dfrac{n}{n-m}$.
(2) Si $A = (1+\frac{a}{m})^m$ alors $a = m(A^{1/m}-1)$ et l'égalité du (1) donne $A^{1/n} \leqslant 1+\dfrac{m}{n}(A^{1/m}-1)$ c.q.f.d.
(3) $A^{1/n} - 1 \leqslant \dfrac{m}{n}(A^{1/m}-1) \Leftrightarrow n(A^{1/n}-1) \leqslant m(A^{1/m}-1)$.

Solution 1.3.5 On retranche la 2$^{\text{ième}}$ colonne à la 3$^{\text{ième}}$ puis la 1$^{\text{ère}}$ à la 2$^{\text{ième}}$ et on développe le déterminant par rapport à la première ligne d'où l'équivalence :

$$\begin{vmatrix} y-x & z-y \\ f(y)-f(x) & f(z)-f(y) \end{vmatrix} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Leftrightarrow f \text{ convexe.}$$

Solution 1.3.6

(1) $f' \nearrow$ donc $(x_1-y_1)(f'(z_1)-f'(z_2)) \geqslant 0$: la propriété est vraie pour $k=2$.
À l'ordre $k+1$: $(x_k - y_k) \geqslant -(x_1-y_1) - \cdots - (x_{k-1}-y_{k-1})$ donc

$$\begin{aligned}(x_1-y_1)(f'(z_1)-f'(z_{k+1})) + \cdots + (x_k-y_k)(f'(z_k)-f'(z_{k+1}))\\ \geqslant (x_1-y_1)(f'(z_1)-f'(z_k)) + \cdots + (x_{k-1}-y_{k-1})(f'(z_{k-1})-f'(z_k)) \geqslant 0\end{aligned}$$

(où on a appliqué l'hypothèse de récurrence et l'inégalité $f'(z_k) \geqslant f'(z_{k+1})$).
(2) On aura donc : $(x_1-y_1)f'(z_1) + \cdots + (x_n-y_n)f'(z_n) \geqslant 0$ et à l'aide du théorème des accroissements finis :

$$f(x_1) + \cdots + f(x_n) - (f(y_1) + \cdots + f(y_n)) \geqslant (x_1-y_1)f'(z_1) + \cdots + (x_n-y_n)f'(z_n) \geqslant 0$$

où $z_i = y_i$ ($f' \nearrow$).

Solution 1.3.7

(1) On utilise le théorème des accroissements finis, ce qui assure l'existence de w, l'unicité étant obtenue par la croissance stricte de f'.
(2) On remarque tout d'abord que $\varphi_{u,v}(u) = \varphi_{u,v}(v)$.
- Si $\varphi_{u,v}(x) = 0$ pour $x \in]u,v[$, alors le théorème de Rolle appliqué aux intervalles $]u,x[$ et $]x,v[$ nous assure l'existence de w_1 et w_2 distincts tels que $\varphi'_{u,v}(w_i) = 0$. Comme $\varphi'_{u,v}(x) = f'(x) - \dfrac{f(v)-f(u)}{v-u}$ on obtient une contradiction avec la propriété $\mathcal{P}$.
  $\varphi_{u,v}$ ne s'annule pas et comme elle est continue, elle garde un signe constant.

- On raisonne ensuite par l'absurde. Quitte à changer tous les signes, on peut prendre $\varphi_{u,v} < 0$. Supposons qu'il existe $v' \in]u,v[$ tel que $\varphi_{u,v'} > 0$,
  Soit $v_1 \in]u,v'[$, alors $f(v_1) = L_{u,v_1}(v_1) > L_{u,v'}(v_1)$ et $L_{u,v_1}(u) = L_{u,v'}(u)$ donc, comme les fonctions L sont affines, $\forall x > u$, $L_{u,v_1}(x) > L_{u,v'}(x)$. D'où $L_{u,v_1}(v') > L_{u,v'}(v') = f(u')$.
  De même, on aura $\forall x > u$, $L_{u,v_1}(x) < L_{u,v}(x)$ et donc $L_{u,v_1}(v) < L_{u,v}(v) = f(v)$ (un petit dessin permet de comprendre un peu mieux).
  Sur $[v',v]$, $\varphi_{u,v_1}(v') < 0$ et $\varphi_{u,v_1}(v) > 0$ donc $\exists v_2 | \varphi_{u,v_1}(v_2) = 0$ i.e. $L_{u,v_1}(v_2) = f(v_2)$. On a donc $L_{u,v_1} = L_{u,v_2}$ ce qui donne $\varphi_{u,v_1} = \varphi_{u,v_2}$ et $\varphi_{u,v_2}(v_1) = 0$ où $v_1 \in]u,v_2[$ ce qui est en contradiction avec le fait que $\varphi_{u,v_2} \neq 0$.
- Montrons enfin que, si pour $(\alpha,\beta) \in]a,b[^2$, $\alpha < \beta$, $\varphi_{\alpha,\beta} < 0$ alors $\forall (u,v) \in]a,b[^2$, $\varphi_{u,v} < 0$:
  grâce a ce qu'on a fait ci-dessus, on sait que $\forall \beta' \in]\alpha,\beta[$, $\varphi_{\alpha,\beta'} < 0$, on démontrerait de même que $\varphi_{\alpha',\beta} < 0$ pour $\alpha' \in]\alpha,\beta[$. Donc, on arrive au résultat suivant : $\forall (u,v) \in [\alpha,\beta]^2$, $\varphi_{u,v} < 0$.
- Dans le cas où $u < \alpha$ on remarque que le signe de $\varphi_{u,\beta}$ est le même que celui de $\varphi_{\alpha,\beta}$, on peut alors étendre la propriété annoncée.
- Pour conclure, on a $\forall w \in]u,v[$, $f(w) < L_{u,v}(w)$ et, en posant $w = tu + (1-t)v$, $t \in]0,1[$ on obtient $f(tu + (1-t)v) < tf(u) + (1-t)f(v)$.

Solution 1.3.8

(1) f étant convexe sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 < x \leqslant y$ on a
$$\varphi_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant \varphi_0(y) = \frac{f(y) - f(0)}{y}.$$
φ_0 est croissante, elle admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, il en est de même pour $\dfrac{f(x)}{x}$.

(2) De même, la fonction φ_y est croissante de limite l en $+\infty$, on a donc
$$\forall y \in \mathbb{R}_+ \setminus \{x\}, \varphi_y(x) \leqslant l$$
on peut déduire de ceci que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+, x \leqslant y, f(y) - ly \leqslant f(x) - lx,$$
la fonction $\psi(x) = f(x) - lx$ est décroissante, elle admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Solution 2.1.1

(1) On pose $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ et on suppose $M > 0$. On a évidemment $u_n(f) \leqslant M$.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on sait que $\exists (c,d) \in [0,1]^2,\ c < d$ tels que : $\forall x \in [c,d]$, $f(x) \geqslant M - \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow u_n(f) \geqslant \left(M - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)(d-c)^{1/n}$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(M - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)(d-c)^{1/n} = M - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc $\exists N$, $\forall n \geqslant N$: $\left(M - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)(d-c)^{1/n} \geqslant M - \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(f) = M$.

(2) On pose $g = \dfrac{1}{f}$ et on remarque que $u_{-p}(f) = \dfrac{1}{u_p(g)} \Rightarrow \lim\limits_{n\to-\infty} u_n(f) = \inf\limits_{x\in[0,1]} f(x)$.

Solution 2.1.2 Soit $P_n \xrightarrow{C.U.} f$, on sait que $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\,dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(t)\,dt = \int_0^1 f(t)(f(t) - P_n(t))\,dt$ d'où $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt \leqslant \|f\|.\|f - P_n\|$ pour tout n donc $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt = 0 \Rightarrow f = 0$.

Solution 2.1.3 Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ alors $\displaystyle\int_0^a |f(t)f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a g(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et comme $\displaystyle\int_0^a g'^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f'^2(t)\,\mathrm{d}t$ il suffit de le montrer pour g car $g(x) = \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| = |f(t)|$: on a :

$$\frac{1}{2}g(a)^2 = \int_0^a g(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_0^a g'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a g'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

en appliquant Cauchy-Schwarz aux fonctions 1 et g'.
Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que toutes les inégalités soient des égalités i.e. $g'(t) = \lambda > 0 \Leftrightarrow g(x) = \lambda x \Leftrightarrow f(x) = \mu x$ ($\mu \in \mathbb{R}$).

Solution 2.1.4
$\displaystyle\int_0^1 nx^n\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1} \to 1$; montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = f(1)$ où $u_n = \displaystyle\int_0^1 nx^n f(x)\,\mathrm{d}x$.
Posons $v_n = u_n - \dfrac{n}{n+1}f(1) = \displaystyle\int_0^1 nx^n(f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x$ comme f est continue en 1, pour ε donné, on pourra trouver $\alpha > 0$ tel que

$$x \in [1-\alpha, 1] \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left|\int_{1-\alpha}^1 nx^n(f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

f est bornée par M et donc $\left|\displaystyle\int_0^{1-\alpha} nx^n(f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M\dfrac{n}{n+1}(1-\alpha)^{n+1}$, on choisit n pour que $2M\dfrac{n}{n+1}(1-\alpha)^{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
On a bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$.

Solution 2.1.5 On raisonne par l'absurde (donc f n'est pas la fonction nulle).
Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ les éléments de $]a, b[$ pour lesquels f présente un changement de signe avec $p \leqslant n$ car, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, si f change de signe en a_i, f s'annule en a_i.
On remarque que $p \geqslant 1$, sinon f garderait un signe constant et l'on ne pourrait avoir $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
$(x-a_1)(x-a_2)(\ldots)(x-a_p)f(x)$ garde donc un signe constant. Or

$$(x-a_1)(x-a_2)(\ldots)(x-a_p) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_p x^p$$

donc $\displaystyle\int_a^b (x-a_1)(x-a_2)(\ldots)(x-a_p)f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
$g(x) = (x-a_1)(x-a_2)(\ldots)(x-a_p)f(x)$ est une fonction continue, de signe constant dont l'intégrale sur $[a, b]$ est nulle. Le théorème 4.19 page 78 nous dit alors que $g(x) = 0$ ce qui est contradictoire.

Conclusion : $p \geqslant n+1$.

Solution 2.1.6 Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (proposition 4.2.7 page 78), on a

$$I(f) \geqslant \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{f(t)}}.\sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t\right) = 1.$$

Cette minoration n'est atteinte que lorsque f et $1/f$ sont proportionnelles, i.e. lorsque f est constante (cf. remarque 4.1.2 page 197).

$I(f)$ n'est pas majorée, prendre $f(t) = e^{at}$ alors $I(f) = \dfrac{2}{a^2}(\operatorname{ch} a - 1)$.

Solution 2.1.7 On définit φ_N par $\varphi_N(x) = f(x)$ si $x > \dfrac{1}{2^{N+1}}$ et $\varphi_N(x) = 0$ ailleurs, alors $\|f - \varphi_N\| = \dfrac{1}{2^{N+1}}$. Or $\displaystyle\int_0^1 \varphi_N(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N} 2^{-n}.2^{-(n+1)} = \frac{1}{2}\frac{1-2^{-2(N+1)}}{1-1/4} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

Solution 2.1.8

(1) $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{1+(p/n)^2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

(2) $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{p}{n}\right)^\alpha \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{\alpha+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

Solution 2.1.9 $\ln[f(1/n)\cdots f(1-1/n)]^{1/n}$ est une somme de Riemann qui a pour limite : $\displaystyle\int_0^1 \ln f(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution 2.1.10

(1) Si (x_n) était convergente, comme $N(0,1/3,n) \sim \dfrac{n}{3}$ la limite de (x_n) serait nécessairement dans $[0,1/3]$, ceci est contradictoire avec le fait que $N(2/3,1,n) \sim \dfrac{n}{3}$ car il n'y aurait qu'un nombre fini de termes de la suite (x_n) dans l'intervalle $[2/3,1]$.

(2) Il est évident que la suite (x_n) est dense dans $[0,1]$ car, pour tout couple (α,β), $\alpha < \beta$ il existe une infinité de termes de la suite (x_n) compris entre α et β.

(3) Montrons que $(i) \Rightarrow (ii)$:

- si f est constante, c'est évident.
  Supposons f en escalier : soient $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p = 1$ les points de discontinuité de f, on peut écrire :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{p-1}\int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{p-1}(\alpha_{j+1}-\alpha_j)f_j$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{p-1} N(\alpha_j,\alpha_{j+1},n)f_j + \frac{1}{n}\sum_{j|x_j\in\{\alpha_0,\ldots,\alpha_p\}} f(\alpha_j).$$

  Si on note $N(x,n)$ le nombre de $i \leqslant n$ tels que $x_i = x$ alors $N(0,1,n) = N(0,x,n) + N(x,1,n) + N(x,n)$. On divise par n et on prend la limite quand $n \to +\infty$. On obtient $N(x,n) = o(n)$. (on a supposé ici que $x \in]0,1[$ mais il n'est pas très difficile de traiter les cas $x = 0$ ou $x = 1$).

On a donc $\dfrac{1}{n} \sum_{j|x_j \in \{\alpha_0,\dots,\alpha_p\}} f(\alpha_j) = 0$ d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{j=0}^{p-1} (\alpha_{j+1} - \alpha_j) f_j = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si f est continue par morceaux alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe φ une fonction en escalier telle que $\|f - \varphi\| \leqslant \varepsilon/3$ (c'est une version du théorème 4.13 page 75, revue à la lueur du théorème 5.61 page 255). On a alors

$$\left| \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \right| \leqslant \int_0^1 |f(t) - \varphi(t)|\,\mathrm{d}t + \left| \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \right| + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i) - f(x_i)|.$$

Les quantités aux extrêmes sont majorées chacune par $\varepsilon/3$, indépendamment de n ; on choisit alors n suffisamment grand pour que l'expression du milieu soit elle aussi majorée par $\varepsilon/3$ c.q.f.d.

Il reste à démontrer que $(ii) \Rightarrow (i)$: il suffit pour cela de prendre $f = 1_{]\alpha,\beta[}$ et de lui appliquer la propriété.

Remarque : pour plus de détails sur les suites équiréparties, voir le problème des Mines Math 1 1999.

Solution 2.1.11 Pour $x \geqslant 0$, on a $1 + \dfrac{x^2}{2} \leqslant \operatorname{ch} x \leqslant 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} \operatorname{sh} x$ (conséquence de la formule de Taylor).

Si l'on pose $s_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \dfrac{1}{\sqrt{k+n}} \right) - n$ alors

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \leqslant s_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} + \frac{1}{6n^{3/2}} \operatorname{sh} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(on a majoré x par $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$).

Si on pose $v_n = \dfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+n}$ alors $s_n - v_n$ tend vers 0, et comme v_n tend vers $\dfrac{\ln 2}{2}$ (il suffit pour cela de se ramener à une somme de Riemann), s_n a la même limite.

Solution 2.1.12

(1) On sait que, pour $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ d'où $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.
On a donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

(2) En posant $u = t^n$ on arrive à $I_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} u^{1/n}\,\mathrm{d}u$. Soit $J = \displaystyle\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u$ où $f(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u}$. On a

$$|nI_n - J| = \left| \int_0^1 f(u)(u^{1/n} - 1)\,\mathrm{d}u \right| \leqslant \sup_{u\in[0,1]} |f(u)| \int_0^1 (1 - u^{1/n})\,\mathrm{d}u = \frac{\sup_{u\in[0,1]} |f(u)|}{n+1}.$$

Il reste à calculer maintenant J :
la série $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{u^{k-1}}{k}$ converge uniformément sur $[0,1]$ grâce au théorème des séries alternées, on a donc

$$J=\int_0^1\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{u^{k-1}}{k}\,\mathrm{d}u=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\int_0^1 u^{k-1}\,\mathrm{d}u=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$

Comme $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ on arrive à

$$J=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Solution 2.1.13

On reconnaît des sommes de Riemann.

(1) $\lim_{n\to+\infty}x_n=\int_0^1 x^2e^{i\pi x}\,\mathrm{d}x=\frac{i}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}-\frac{4i}{\pi^3}$

(2) $\lim_{n\to+\infty}y_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+ix)^2}=\left[\frac{i}{1+ix}\right]_0^1=\frac{1-i}{2}.$

Solution 2.1.14

(1) $u_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x-e_k}$ où $e_k=e^{2ik\pi/n}$ en utilisant la formule $\frac{P(X)}{Q(X)}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P(e_k)}{Q'(e_k)(X-e_i)}$.

(2) Posons $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\pi}{n}\frac{1}{x-e_k}=2\pi\frac{x^{n-1}}{x^n-1}$: $S_n(x)$ est une somme de Riemann,

$$\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{x-e^{it}}=\begin{cases}0 & \text{si } |x|<1\\ \frac{2\pi}{x} & \text{si } |x|>1\end{cases}\text{ ; puis :}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{x-\cos t}{x^2-2x\cos t+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{x-e^{it}}+\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{x-e^{-it}}\right)=\begin{cases}0 & \text{si } |x|<1\\ \frac{2\pi}{x} & \text{si } |x|>1\end{cases}$$

et pour $|x|=1$ on trouve $\frac{\pi}{x}$.

Solution 3.1.1

(1) On intégre par parties :

$$\int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t=\underbrace{\left[f(t)\frac{-\cos nt}{n}\right]_a^b}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin nt\,\mathrm{d}t}_{=B_n}.$$

$|B_n|\leqslant\frac{1}{n}\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t\to 0$ quand $n\to+\infty$.

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t=0.$

(2) $I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \cos 2nx\,\mathrm{d}x = 0$ donc $I_n = I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Or $I_n - G_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\sin(2n+1)x\,\mathrm{d}x \to 0$ où $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, étudions ce qui se passe en 0 :

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x\sin x} = \frac{x}{6} + o(x)$$
$$f'(x) = \frac{\sin^2 x - x^2\cos x}{x^2\sin^2 x} = \frac{1}{6} + o(1)$$

en faisant des développements limités.

On prolonge f par continuité en 0 et, comme f' admet une limite en 0, on sait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (on utilise le théorème du prolongement dérivable—théorème 4.10 page 72—). On applique finalement le résultat de la première question et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Solution 3.1.2 Montrons d'abord le résultat suivant :
si F et G sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifient

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, [F(a) - F(b)].[G(a) - G(b)] = 0$$

alors l'une d'elle est constante.

Supposons que F ne soit pas constante, il existe alors $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(a) \neq F(b)$ et donc $G(a) = G(b)$.

Soit maintenant $c \in \mathbb{R}$, si $F(a) \neq F(c)$ alors $G(a) = G(c)$, si $F(a) = F(c)$ alors $F(b) \neq F(c)$ et donc $G(b) = G(c)$ et $G(c) = G(a)$ i.e. G est bien constante.

On applique alors ce résultat à $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et à $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, la conclusion est alors immédiate.

Solution 3.1.3 soit $a_k = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_k^{k+1} f''(t)[t - E(t) - 1/2]^2\,\mathrm{d}t$, on intègre deux fois par parties, on trouve

$$a_k = \frac{1}{8}[f'(k+1) - f'(k)] - \frac{1}{2}[f(k+1) + f(k)] + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{8}[f'(n) - f'(0)] - \sum_{k=0}^{n} f(k) + \frac{1}{2}[f(n) + f(0)] + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc $\boxed{u_n = \dfrac{1}{8}[f'(n) - f'(0)] + \dfrac{1}{2}[f(n) + f(0)]}$.

On applique ensuite la formule précédente à la fonction $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^\alpha}$, on obtient

$$u_{n-1} = \frac{1}{8}\left[\alpha - \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}\right] + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{n^\alpha}\right].$$

On pose $I_n(\alpha) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^n \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}\left[t - E(t) - \frac{1}{2}\right]^2\mathrm{d}t$ et $I(\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n(\alpha)$.

On arrive alors aux expressions :

$$u_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} + I_n(\alpha)$$

et

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{\alpha}{8} + \frac{1}{2} - I(\alpha).$$

Comme $0 \leqslant \left[t - E(t) - \frac{1}{2}\right]^2 \leqslant \frac{1}{4}$ on peut écrire $0 \leqslant I(\alpha) \leqslant \frac{1}{8}\int_1^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\alpha}{8}$ d'où l'encadrement recherché :

$$\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{2} \leqslant S(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{8}.$$

Solution 3.1.4

(1) On pose $t = nx$ d'où $I_n = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(2) Soit $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis à G donc il existe $c \in]a,b[$ tel que $G(b) - G(a) = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)G'(c) = (b-a)g(c)$.

(3) De même, on pose $t = nx$ et on trouve : $J_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{f(\frac{u+k\pi}{n})}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u$.
On utilise la formule de la moyenne, chaque intégrale de la somme s'écrit donc

$$f(x_k)\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} f(x_k) \text{ où } x_k \in [\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}].$$

On reconnaît pour J_n une somme de Riemann : $J_n = \frac{\pi}{n\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ donc $\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution 3.1.5

(1) $G\ : [0,A] \to [a,b]$, on pose $y_i = i\frac{A}{n}$ et $x_i = G(y_i)$.

$$AS_n = \sum_{i=0}^{n-1}(y_{i+1} - y_i)g(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1}(y_{i+1} - y_i)g \circ G(y_i)$$

somme de Riemann et donc $\lim_{n\to+\infty} AS_n = \int_0^A g(G(t))\,\mathrm{d}t$ d'où, en posant $x = G(t)$: $\lim_{n\to+\infty} AS_n = \int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) Application : $G(y) = \mathrm{Arccos}(1-y)$, $y_i = \frac{2i}{n}$, $x_i = \mathrm{Arccos}\left(1 - \frac{2i}{n}\right)$.

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2i}{n}\right)^2} \to \int_0^1 \sqrt{1-(1-2t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Solution 3.1.6 $I_{n+2} - I_n = 0 \Rightarrow I_{2n} = 0$ et $I_{2n+1} = 2\pi$; $J_{n+1} - J_n = I_{2n+1} \Rightarrow J_n = 2\pi n$.

Solution 3.1.7

$$\cos^n t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \left(e^{i(n-2k)t} + e^{-i(n-2k)t}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k} \cos(n-2k)t.$$

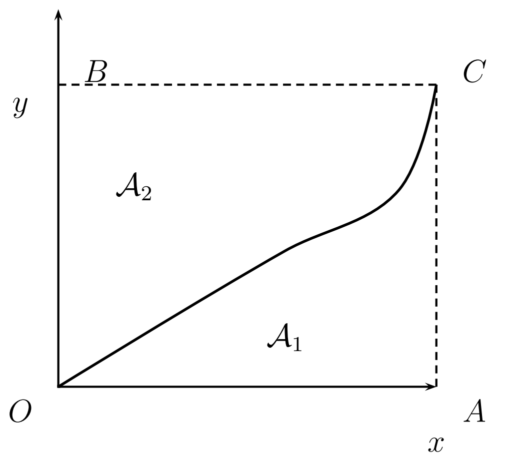
Puis : $\displaystyle\int_0^\pi \cos ht \cos pt \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\delta_{hp} \Rightarrow \int_0^\pi \cos^n t \cos nt \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2^n}$.

Si $p > n$ $I(n,p) = 0$; $p \leqslant n$: si $n - p = 2k$, $I(n,p) = \dfrac{\pi}{2^n}\dbinom{n}{k}$, autrement $I(n,p) = 0$.

Solution 3.1.8 f est un homéomorphisme de $[0,a]$ sur $[0, f(a)]$ (i.e. f est bijective, f et f^{-1} sont continues). F est dérivable et

$$F'(x) = f(x) + f^{-1}(f(x)) - [f(x) + xf'(x)] = 0$$

i.e. $\displaystyle\underbrace{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}_{=\mathcal{A}_1} + \underbrace{\int_0^{f(x)} f^{-1}(u)\,\mathrm{d}u}_{=\mathcal{A}_2} = xf(x).$



Soit l'aire du rectangle $OABC$ est la somme des aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

Solution 3.1.9 On dérive, on fait la somme et la différence :

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(b) + f'(a) + 4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$
$$f(b) + f(a) = \frac{b-a}{6}[f'(b) - f'(a)] + \frac{1}{3}\left[f(b) + f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

D'où $h(x) = \dfrac{x}{2}h'(x) + h(0)$ et $g(x) = \dfrac{x}{3}[g'(x) + 2g'(0)]$ soit, en résolvant les équations différentielles obtenues, $h(x) = Cx^2 + h(0)$ et $g(x) = C'x^3 + g'(0)x$. f est un donc polynôme de degré 3.

Réciproque : comme on veut prouver l'égalité de deux formes linéaires, il suffit de prouver leur égalité sur une base. On prend alors la base $(1, x-a, (x-a)^2, (x-a)^3)$ et les calculs sont immédiats.

Remarque : on reconnaît l'expression rencontrée dans la méthode de Simpson.

Solution 3.1.10 Sur $[a, \dfrac{a+b}{2}]$:

$$f^2(t) = \left(\int_a^t f'(u)\,\mathrm{d}u\right)^2 \leqslant (t-a)\int_a^t f'(u)^2\,\mathrm{d}u \leqslant (t-a)\int_a^{(a+b)/2} f'^2(u)\,\mathrm{d}u$$

avec Cauchy-Schwarz. On a donc $\displaystyle\int_a^{(a+b)/2} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{(a+b)/2} f'^2(u)\,\mathrm{d}u \times \frac{(b-a)^2}{8}$.

On fait de même avec $\displaystyle\int_{(a+b)/2}^b f^2(t)\,\mathrm{d}t$ pour trouver

$$\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Solution 3.1.11

(1) Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}$ on a $\cos 2x \leqslant \cos t \leqslant \cos x$ d'où

$$\cos 2x \ln 2 \leqslant \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \cos x \ln 2,$$

la limite est égale à $\ln 2$. De même si $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$.

(2) Si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ alors $\dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{\sin t}{t} \leqslant \dfrac{\sin 2x}{2x}$ d'où

$$\frac{\sin x}{x}\ln\frac{b}{a} \leqslant \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\sin 2x}{2x}\ln\frac{b}{a}.$$

La limite vaut donc $\ln\dfrac{b}{a}$. On fait de même pour $x < 0$.

Solution 3.1.12 On remarque tout d'abord que E n'est pas vide (E contient les fonctions constantes). Si $f \in E$ on écrit : $f(x) = f(b) - \displaystyle\int_x^b f'(t)\,\mathrm{d}t$ donc $|f(x)| \geqslant |f(b)| - \left|\displaystyle\int_x^b f'(t)\,\mathrm{d}t\right|$.

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz au couple $(1, f')$ dans la dernière intégrale, ce qui nous donne

$$\left|\int_x^b f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left[(b-x)\int_x^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right]^{1/2} \leqslant \left[(b-x)\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right]^{1/2}.$$

En utilisant l'hypothèse $|f(b)| \geqslant \left[\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right]$ on obtient :

$$\forall x \in [a,b], |f(x) \geqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{b-x}\right)\left(\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Comme on peut trouver c dans $]a,b[$ tel que $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{b-c} \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}$, on arrive enfin à

$$\forall f \in E, \forall x \in [c,b], |f(x)| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Solution 3.1.13 On remarque que $f(0) = 0$. Supposons pour la suite que f n'est pas identiquement nulle. Si $f(a) \neq 0$, on prend I le plus grand intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant a sur lequel f ne s'annule pas. Comme f est continue, f conserve le signe de $f(a)$ sur I. On appelle b la borne inférieure de I, comme f est continue, $f(b) = 0$ (sinon b ne serait pas la borne inférieure).
Posons $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ alors on sait que $F'^2(x) = 2F(x)$ donc F est strictement positive sur I et F' garde un signe constant sur I. On a donc

$$\forall x \in I, \frac{F'(x)}{\sqrt{F(x)}} = \varepsilon\sqrt{2}$$

et par intégration $\sqrt{F(x)} = \varepsilon\sqrt{2}(x-\lambda)$ soit $F(x) = \dfrac{1}{2}(x-\lambda)^2$, d'où, en dérivant, $f(x) = x - \lambda$ sur I. On a bien sûr $\lambda = b$.
Soit c la borne supérieure de I alors $c = +\infty$ (par l'absurde en utilisant la relation trouvée).
Sur $[0, b]$ on a nécessairement f qui est nulle (sinon, le raisonnement ci-dessus s'applique et on aurait pas $f(b) = 0$).

Conclusion : toutes les solutions non identiquement nulles sont données par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, b] \\ x - b & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

(la réciproque étant évidente).

Solution 3.1.14 On pose $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$ alors, en développant $\cos(x+y)$, on peut écrire $\psi(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$ donc les solutions cherchées s'écriront

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha\cos x + \beta\sin x.$$

Réciproquement, si $\psi(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$, en reportant dans l'égalité, on obtient les conditions :

(*i*) $\alpha\left(1 - \dfrac{\pi}{2}\lambda\right) = \lambda I$,

(*ii*) $\beta\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\lambda\right) = -\lambda J$

où on a posé $I = \displaystyle\int_0^\pi \cos y f(y)\,\mathrm{d}y$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi \sin y f(y)\,\mathrm{d}y$.

D'où les différents cas :

- si $\lambda \notin \{-2/\pi, 2/\pi\}$, on obtient une seule solution,
- si $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, $\begin{cases} I \neq 0 & \text{, on n'a pas de solution,} \\ I = 0 & \text{, on a une infinité de solutions} \end{cases}$.
- On raisonne de même si $\lambda = -\dfrac{\pi}{2}$.

Solution 3.1.15 Introduisons sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ le produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, le problème est donc de trouver l'orthogonal de $H = \{h'', h \in F\}$.
Cherchons dans un premier temps les fonctions de $H^\perp$ de classe C^2 :
on fait deux intégrations par parties, on arrive à $\displaystyle\int_0^1 f''(t)h(t)\,\mathrm{d}t = 0$. En prenant $h_n = t^2(1-t)^2 P_n(t)$, où P_n est une suite de polynôme qui converge uniformément vers f'', alors, par passage à la limite, on obtient la condition $f'' = 0$.
Conclusion : l'ensemble des fonctions de $H^\perp$ de classe C^2 se réduit à l'ensemble $\mathcal{A}$ des fonctions affines, i.e. $\mathcal{A} \subset H^\perp$.

Étendons maintenant ce résultat.
Soit $f \in H^{\perp}$, on sait que l'on peut projeter orthogonalement f sur $\mathcal{A}$. Soit $g = p(f)$, on a $f = g + \varphi$ où φ est une application continue.
En prenant comme base orthonormale la base $(1, (2t-1)\sqrt{3})$ alors, grâce à la formule de la *proposition 4.2.2 page 200*, on a

$$g(x) = 3(2x-1)\int_0^1 (2t-1)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par la formule de Taylor, reste intégral, on sait que la primitive seconde de $f - g = \varphi$ qui s'annule en 0 et dont la dérivée s'annule en 0 est donnée par $h(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)(f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t$.
On va prouver que $h \in F$ soit que $h(1) = h'(1) = 0$. On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t)(f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t &= h(1)\\ &= \int_0^1 (1-t)\left[f(t) - \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u - 3(2t-1)\int_0^1 (2u-1)f(u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t - 3\underbrace{\int_0^1 (1-t)(2t-1)`\,\mathrm{d}t}_{=-1/6}\int_0^1 (2u-1)f(u)\,\mathrm{d}u\\ &= 0\end{aligned}$$

et $h'(1) = \displaystyle\int_0^1 (f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t = 0$ car $\displaystyle\int_0^1 (2t-1)\,\mathrm{d}t = 0$.
On a alors $h'' \in H \cap H^{\perp}$ donc $h'' = 0$ soit $f = g$ et on retrouve le premier cas.

On pouvait aussi conclure directement par le calcul : vu que g est affine, on a $\displaystyle\int_0^1 g(t)(f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t = 0$.
Enfin $f \in H^{\perp}$ et $f - g \in H$ donc

$$\int_0^1 f(t)(f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t = 0 \text{ et } \int_0^1 (f(t)-g(t))^2\,\mathrm{d}t = 0 \text{ i.e. } f = g \text{ c.q.f.d.}$$

Solution 3.1.16

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln u_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$ (somme de Riemann) $\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(2) On utilise le résultat du n$^\circ$ 3.2.3 avec $f(x) = \ln(1+x)$, $a = 0$, $b = 1$.

Solution 3.1.17 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ donc g est de classe C^3 sur $\mathbb{R}^*$.

Étude en 0 :
en écrivant la relation de Taylor reste d'Young (cf. théorème 4.38 page 86), on a

$$F(x) = xf(0) + \frac{x^2}{2}f'(0) + \frac{x^3}{6}f''(0) + o(x^3)$$

donc $g(x) = f(0) + \dfrac{x}{2}f'(0) + \dfrac{x^2}{6}f''(0) + o(x^2)$.
On vérifie alors immédiatement que g est dérivable en 0.

Ensuite $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{F(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}f'(0) + \dfrac{x}{3}f''(0) + o(x)$ donc g' est est continue en 0 et g est de classe $\mathcal{C}^1$ puis

$$g''(x) = \frac{f'(x)}{x} - 2\frac{f(x)}{x^2} + 2\frac{F(x)}{x^3} = \frac{1}{3}f''(0) + o(1)$$

donc g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

On ne peut rien dire de mieux, en effet, avec $f''(x) = x\ln|x|$, $f'(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln|x| - \dfrac{x^2}{4}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{6}\ln|x| - \dfrac{5x^3}{36}$, $F(x) = \dfrac{x^4}{24}\ln|x| - \dfrac{13x^4}{288}$, on trouve $g'''(x) = \dfrac{1}{4}\ln|x| + \dfrac{3}{16}$ qui ne peut être prolongée par continuité en 0.

Remarque : si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors on peut prouver que g est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ en utilisant la formule

$$g(x) = \int_0^1 f(ux)\,\mathrm{d}u$$

(obtenue par le changement de variable $t = ux$) et en utilisant le corollaire 6.27 page 268 de dérivation sous le signe intégral.

Solution 3.2.1 Avec Taylor-Lagrange $f(x+y) = f(x) + yf'(x) + \dfrac{y^2}{2}f''(z)$ et on écrit : $f(x+y) > 0$, $f''(z) < M$ d'où

$$f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}M \geqslant f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(z) = f(x+y) > 0.$$

Solution 3.2.2

$$\left\{\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x+\theta_1 h) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x-\theta_2 h) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 2hf'(x) = f(x+h) - f(x-h) + \\ \dfrac{h^2}{2}[f''(x-\theta_2 h) - f''(x+\theta_1 h)] \\ \Rightarrow 2h|f'(x)| \leqslant 2M_0 + h^2 M_2 \end{array}\right\}$$

d'où $\forall h > 0 \ : \ M_1 \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2} \Rightarrow M_1 \leqslant \inf\limits_{h>0}\left(\dfrac{M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}\right) = \sqrt{2M_0M_2}$ c.q.f.d.

Remarque : on peut aussi utiliser la formule de Taylor-intégral mais cela donne une preuve un peu plus lourde.

Solution 3.2.3 Si on pose $x_k = a + kh$ où $h = \dfrac{b-a}{n}$ alors $R_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(F(x_k+h) - F(x_k) - hF'(x_k))$. Or $F(x_k+h) = F(x_k) + hF'(x_k) + \dfrac{h^2}{2}F''(x_k) + \dfrac{h^3}{6}F'''(y_k)$ où $y_k \in]x_k, x_k+h[$ d'où

$$R_n(f) = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} hf'(x_k) + \frac{h^2}{6}\sum_{k=0}^{n-1} hf''(y_k) = \frac{h}{2}U_n + \frac{h^2}{6}V_n.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \displaystyle\int_a^b f''(t)\,\mathrm{d}t = f'(b) - f'(a)$, $U_n = \displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t - R_n(f')$ et $R_n(f') = \dfrac{h}{2}\sum\limits_{k=0}^{n-1} hf''(x_k) + O(h^2)$ ce qui donne le résultat.

Remarque : l'exercice 1.2.5 fournit directement une réponse encore plus précise.

Solution 3.3.1 On écrit la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+2$, ceci nous donne : $e^{\theta_n x} - 1 = \dfrac{x}{n+1} e^{\theta_{n+1} x}$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \theta_n = 0$ et $\theta_n \sim \dfrac{1}{n}$.

En écrivant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+p+1$, on peut affirmer que $e^{\theta_n x} - 1$ admet un développement limité en $\dfrac{1}{n}$ à l'ordre p, i.e. $e^{\theta_n x} - 1 = \dfrac{a_1}{n} + \cdots + \dfrac{a_p}{n^p} + o\left(\dfrac{1}{n^{p+1}}\right) = u_n$.

Donc $\theta_n = \dfrac{\ln(1+u_n)}{x}$ admet un développement limité à l'ordre p en $\dfrac{1}{n}$ en vertu du théorème de composition des développements limités.

Ensuite, on utilise par exemple la formule de Stirling pour avoir

$$\frac{1}{[(n+1)!]^{1/n}} = e\left[\frac{1}{n} - \frac{3}{2}\frac{\ln n}{n^2} - \frac{\ln\sqrt{2\pi}}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \text{ et } \exp\frac{\theta_n x}{n} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$|x|^{1+1/n} = |x|\left(1 + \frac{\ln|x|}{n} + o(\frac{1}{n})\right) \text{ d'où } a_n = |x|e\left[\frac{1}{n} - \frac{3}{2}\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln|x| - \ln\sqrt{2\pi}}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Solution 3.3.2 Après des calculs (que l'on peut tenter de simplifier en écrivant $\sin u - \operatorname{sh} v = u - v - \dfrac{1}{6}(u^3+v^3) + \dfrac{1}{120}(u^5 - v^5) - \dfrac{1}{5040}(u^7+v^7) + o(u^7) + o(v^7)$, on trouve : $-\dfrac{x^7}{45}$.

Solution 3.3.3

(1) $\operatorname{Arcsin} x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \dfrac{5x^7}{112} + o(x^7)$; $\operatorname{Arcsin}(\operatorname{Arcsin} x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{7x^5}{30} + \dfrac{64x^7}{315} + o(x^7)$.

(2) $f(x) = \ln\left(e^x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})\right) = x - e^{-x}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$.

Solution 3.3.4

(1) $(1+x)^{1/x} = e.e^{-x/2+o(x)} \Rightarrow \lim = -\dfrac{e}{2}$

(2) $\sin(2x - \pi/2) = -\cos 2x \Rightarrow \lim = -\pi/4$

(3) $u = x - a \Rightarrow \left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}} = \left(1 - \dfrac{u}{a}\right)^{-1/\tan\frac{\pi u}{2a}}$ et en prenant le log : $\lim = e^{2/\pi}$.

(4) $\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{1-\cos x} = \dfrac{1}{1+\cos x} \Rightarrow \lim = 1/2$

(5) $\lim = \dfrac{1}{e}$.

Solution 3.3.5

(1) $x + \ln x$ est strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ donc x_k existe et est unique.

(2) $x_k \to +\infty$ quand $k \to +\infty$ donc $x_k \sim k$ car $\ln x_k = o(x_k)$. Puis $\ln x_k \sim \ln k$ d'où $x_k = k - \ln k + o(\ln k)$.

$$\text{Or } x_k = k - \ln x_k = k - \ln k - \ln\left(\frac{x_k}{k}\right) = k - \ln k + \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

Solution 3.3.6 En étudiant la fonction $f(x) = \tan x - \dfrac{x^3}{x^2-1}$, on vérifie que, si l'on excepte 0, f s'annule une première fois entre 1 et $\dfrac{\pi}{2}$, puis s'annule une seule fois sur chaque intervalle $]n\pi - 3\pi/2, n\pi - \pi/2[$. C'est donc dans ce dernier intervalle que l'on va trouver la $n^{\text{ième}}$ solution positive (strictement).

On pose alors $x_n = n\pi - \frac{\pi}{2} - y_n$. En écrivant cette relation dans l'équation qui fournit x et en remarquant que $x_n \sim n\pi$, on obtient le développement suivant :

$$x_n = n\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$