FONCTIONS DE 2 VARIABLES RÉELLES ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE (R)

1. ESPACE $\mathbb{R}^2$, FONCTIONS CONTINUES

1.1.

EXERCICE 1.1.1. F

Prolonger par continuité la fonction : $f(x, y) = \frac{|y|}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}$.

EXERCICE 1.1.2. I

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$.

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 1.1.3. F

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $g(h, k) = \frac{f(a+h) - f(a-k)}{h+k}$ définie sur $(\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
Montrer que f est dérivable en a ssi g admet une limite en $(0, 0)$.

EXERCICE 1.1.4. I

Soit B la boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$.

Montrer que B est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ (on utilisera l'application $h(x, y) = \frac{(x, y)}{1 + \|(x, y)\|}$).

On rappelle qu'un homéomorphisme de U sur V est une application continue bijective dont l'application réciproque est continue et on dit dans ce cas que U et V sont homéomorphes.

EXERCICE 1.1.5. F

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction f par

$$f(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} (xt + yt^2).$$

Étudier la continuité de f .

2. CALCUL DIFFÉRENTIEL

2.1. Dérivées partielles premières.

EXERCICE 2.1.1. FSoit $f(x, y) = x^2 \sin \frac{1}{x} + y^2 \sin \frac{1}{y}$ (si $x, y \neq 0$)Prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^2$.Calculer les dérivées partielles de f et étudier leur continuité.EXERCICE 2.1.2. F

Étudier l'existence du gradient à l'origine de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0 \end{cases}.$$

EXERCICE 2.1.3. F

Étudier la continuité et l'existence du gradient pour les fonctions suivantes, supposées nulles à l'origine et données par les formules :

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{b) } g(x, y) = \frac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2} \quad ((p, q) \in \mathbb{N}^2).$$

EXERCICE 2.1.4. F CSoit $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.Montrer que la restriction de f à toutes les droites passant par $(0, 0)$ admet un minimum strict en $(0, 0)$ mais que f n'a pas d'extremum en $(0, 0)$.EXERCICE 2.1.5. FSoit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$.Trouver les extrema de f sur D définie par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$.EXERCICE 2.1.6. FExtrema de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (1 - x)^2}$.EXERCICE 2.1.7. FÉtudier la continuité et déterminer le maximum de $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 2.1.8. FExtrema de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xe^y + ye^x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 2.1.9. F

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta h, y + \theta k) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a + \theta h, y + \theta k).$$

En déduire que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $e^{\theta a} = 1 + a(1 - \theta)$.

2.2. Dérivées partielles d'ordre 2.

EXERCICE 2.2.1. I

Soit $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ne dépendant que de l'angle d'une direction donnée avec $\overrightarrow{OM}$ et dont le laplacien est nul.

Déterminer une telle fonction.

EXERCICE 2.2.2. I T

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que la fonction $g(x, y) = f(\frac{y}{x})$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

3. CALCUL INTÉGRAL

3.1.

EXERCICE 3.1.1. I

Calculer les intégrales doubles :

- (1) $I_1 = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2) dx dy$ où $\mathcal{D} : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.
- (2) $I_2 = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2) dx dy$ où $\mathcal{D} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.
- (3) $I_3 = \iint_{\mathcal{D}} a^x b^y dx dy$ où $\mathcal{D} : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$ ($a > 0$ et $b > 0$).
- (4) $I_4 = \iint_{\mathcal{D}} x^2 y \sqrt{a^3 - x^3 - y^3} dx dy$ où $\mathcal{D} : x \geq 0, y \geq 0, x^3 + y^3 \leq a^3$.
- (5) $I_5 = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2) \cos(xy) dx dy$ où $\mathcal{D} : 0 \leq x + y \leq 4, xy \geq 1, x \leq y$.

EXERCICE 3.1.2. I T

Calculer les intégrales doubles :

- (1) $J_1 = \iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{x^2 + 1} dx dy$ où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- (2) $J_2 = \iint_{\mathcal{D}} x(y - e^y) dx dy$ où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.
- (3) $J_3 = \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{x + y + 1} dx dy$ où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 0\}$.
- (4) $J_4 = \iint_{\mathcal{D}} x dx dy$ où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1, \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1\}$.

$$(5) J_5 = \iint_{\mathcal{D}} \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy \text{ où } \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}.$$

4. ÉTUDE MÉTRIQUE DES COURBES PLANES

4.1.

EXERCICE 4.1.1. I T

Montrer que l'ensemble des centres de courbure aux points de la spirale d'Archimède d'équation polaire $r = a\theta$ situés sur la droite passant par l'origine et d'angle θ_0 est inclus dans la réunion de 2 ellipses (se placer dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ où $(\vec{i}, \vec{I}) = \theta_0$).

EXERCICE 4.1.2. F

Rayon de courbure au point d'abscisse 1 de la courbe d'équation $y = \frac{\ln x}{1-x^2}$.

EXERCICE 4.1.3. F

Centre et rayon de courbure à l'origine de la courbe (C) :

$$(x+y)^2 + 2(y \cos \alpha - x \sin \alpha) = 0.$$

EXERCICE 4.1.4. F T

Une chaînette (d'équation dans un bon repère $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$) roule sans glisser sur une droite (par exemple l'axe Ox).

Déterminer le lieu du centre de courbure au point de contact (dire qu'elle roule sans glisser signifie que l'abscisse curviligne sur la chaînette est égale à une constante près à l'abscisse sur l'axe Ox).

EXERCICE 4.1.5. D

Soit Γ une conique, A et B 2 points de Γ tels que les tangentes en A et B à Γ se coupent en O . On appelle R_A et R_B les rayons de courbure en A et B à Γ .

Montrer que $\frac{R_A}{R_B} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^3$.

(Se placer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{OA} = a\vec{i}, \vec{OB} = b\vec{j}$ ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$) et montrer que Γ a dans ce repère une équation de la forme : $\frac{x^2}{a^2} + 2\beta xy + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a} - 2\frac{y}{b} + 1 = 0$.)

EXERCICE 4.1.6. F T Soit Γ la courbe définie par
$$\begin{cases} x = ae^{-t^2}(2\cos t - \sin t) \\ y = ae^{-t^2}(2\sin t + \cos t) \end{cases}.$$

(1) Calculer le rayon de courbure en un point quelconque.

Le centre de courbure est le point Ω défini par $\vec{M\Omega} = R\vec{N}$, le cercle de courbure est le cercle de rayon $|R|$ de centre, le centre de courbure.

Trouver le cercle de courbure en tout point.

(2) Pour quelles valeurs de t passe-t-il par O ?

EXERCICE 4.1.7. F

Soit (H) l'hyperbole équilatère d'équation $xy = a^2$; M un point de (H) , C le centre de courbure de (H) en M , P le point défini par $\overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{MC}$ (voir exercice 4.1.6).
Montrer que P est sur (H) .

EXERCICE 4.1.8. F

Construction et longueur de la courbe (Γ) :

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin t(1 + \cos^2 t).$$

EXERCICE 4.1.9. F T

Trouver les courbes planes (Γ) telles que l'aire S balayée par $\overrightarrow{OM}$ (où O est un point fixe et M décrit (Γ)) soit proportionnelle à l'abscisse curviligne s sur (Γ) .

EXERCICE 4.1.10. I

Soit D une droite de $\mathcal{P}$ (plan affine euclidien).

Trouver les courbes (C) telles que le symétrique du centre de courbure I (de (C) en M) par rapport à M reste sur D quand M décrit (C) .

5. CHAMPS DE VECTEURS DU PLAN ET DE L'ESPACE

5.1.

EXERCICE 5.1.1. I

Condition sur $z(x, y)$ pour que $\omega = \frac{dx + z dy}{\sqrt{1 + z^2}}$ soit une forme différentielle fermée ?

Résoudre l'équation obtenue en imaginant y comme fonction des variables indépendantes x et z .

Calculer une primitive de ω lorsque $z = \frac{y - b}{x - a}$.

EXERCICE 5.1.2. I

Dans un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit $A(-a, 0)$ et (C) le cercle de centre O et de rayon a . Si M appartient à (C) on appelle P et Q ses projections sur Ox et Oy et N le point d'intersection des droites PM et AQ .

Construire le lieu (Γ) de N et calculer son aire intérieure.

1. INDICATIONS :

Indication 1.1.1 f se prolonge par continuité sur $0 \times \mathbb{R}^*$ mais pas en $(0,0)$.

Indication 1.1.2 Le problème ici se situe sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O , de rayon 1. On utilise alors le fait que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f_i(x,y) = -\frac{x_0^2}{2}$ où f_i , $i = 1, 2$ désigne les 2 expressions de f à l'intérieur et à l'extérieur du disque $D(0, 1)$.

Indication 1.1.3 Le sens direct utilise la différentiabilité de f , la réciproque est immédiate avec $k = 0$.

Indication 1.1.4 Se ramener en $a = (0, 0)$ puis considérer $g(X, Y) = \frac{(X, Y)}{1 - \|(X, Y)\|}$.

Indication 1.1.5 On peut prouver que $|f(x, y) - f(x', y')| \leq |x - x'| + |y - y'|$.

Indication 2.1.1 Écrire que $f(x, y) = g(x) + g(y)$ où g est une fonction qui se prolonge par continuité en 0 dérivable sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Indication 2.1.2 f n'admet pas de gradient en $(0, 0)$.

Indication 2.1.3 f admet un gradient en $(0, 0)$ (passer en polaires), pour g , si $p + q \leq 2$ alors g n'est pas continue en $(0, 0)$, si $p + q = 3$ alors g est continue en $(0, 0)$ mais n'a pas de gradient en $(0, 0)$, si $p + q \geq 4$: g admet un gradient sur $\mathbb{R}^2$ (c'est la même chose que pour f).

Indication 2.1.4 On paramètre les droites par $y = tx$ ou $x = 0$.

Indication 2.1.5 f présente des extrema sur la frontière de $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 3\} \setminus \{0\}$.

Indication 2.1.6 Utiliser une interprétation géométrique.

Indication 2.1.7 Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^2$, bornée et que son maximum est atteint.

Indication 2.1.8 f ne présente pas d'extremum sur $\mathbb{R}^2$.

Indication 2.1.9 Appliquer le théorème des accroissements finis à $\varphi(t) = f(a + th, b + tk)$ puis prendre $f(x, y) = ye^x$.

Indication 2.2.1 Prendre une b.o.n. (e_1, e_2) telle que e_2 donne la direction et poser $f(x_1, x_2) = g(u)$. On obtient $f(x, y) = \lambda \operatorname{Arcsin} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \mu$.

Indication 2.2.2 Poser $z = \frac{y}{x}$ et résoudre l'équation différentielle obtenue. On obtient $g(x, y) = \frac{y}{2x} + \mu$.

Indication 3.1.1 (1) Faire une translation suivie d'un passage en coordonnées polaires, on obtient $I_1 = \pi$.

(2) Utiliser la transformation $X = \frac{x}{a}$, $Y = \frac{y}{b}$ et un passage en polaires, on obtient $I_2 = \frac{\pi(a^2 - b^2)ab}{4}$.

(3) Application directe du théorème de Fubini, on obtient $I_3 = \frac{a \ln b - b \ln a + \ln a - \ln b}{\ln a \ln b (\ln a - \ln b)}$ et si $a = b$

refaire tous les calculs et on a $I_3 = \frac{a}{\ln a} - \frac{a - 1}{(\ln a)^2}$.

(4) Utiliser Fubini et faire les changements de variables : $y = \frac{a}{t}$, $u = (t^3 - 1)^{1/3}$. On trouve alors $I_4 = \frac{\pi a^6}{27\sqrt{3}}$.

(5) Faire le changement de variables : $x = u - v$, $y = u + v$ et poser $V = u^2 - v^2$, on obtient alors : $I_5 = 2(\cos 4 - \cos 1) + 6 \sin 1$.

Indication 3.1.2 (1) Ne pas passer en polaires, utiliser Fubini, on trouve $J_1 = \frac{\pi - 2}{4}$.

(2) Là aussi on fubinise, $J_2 = \frac{61}{24} - e$.

(3) Fubini encore, $J_3 = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

(4) Toujours Fubini après avoir redéfini le domaine d'intégration, $J_4 = \frac{1}{3}$.

(5) Faire le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$, $J_5 = \frac{e^2 - 1}{4e}$.

Indication 4.1.1 Pour $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ on obtient un ensemble contenu dans l'ellipse d'équation $X^2 + 2(Y - \frac{3a}{4})^2 = \frac{a^2}{8}$. L'autre ellipse est la symétrique par rapport à 0.

Indication 4.1.2 En faisant un D.L. on trouve $R = -\frac{3}{4}\sqrt{5}$.

Indication 4.1.3 Faire un changement de repère, Les coordonnées du centre de courbure sont $\left(\frac{\sin \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}, \frac{-\cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}\right)$.

Indication 4.1.4 Le lieu cherché est la parabole $y = a\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)$.

Indication 4.1.5 L'équation générale d'une conique s'écrit $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \varphi = 0$ et en traduisant les conditions, on trouve l'équation donnée en indication dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ non nécessairement orthonormé. Prendre ensuite $\vec{J}$ pour que $(\vec{i}, \vec{J})$ soit orthonormé. Écrire $Y = F(X)$ dans ce repère et utiliser la formule $R_A = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X^2}{2Y}$ d'où $R_A = \frac{a^2|1-\beta ab|}{b \sin \theta}$ et R_B par symétrie.

Indication 4.1.6 Faire une rotation d'angle ϕ tel que $\cos \phi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(1) Rayon de courbure : $R = \left[\frac{(1+4\theta^2)^{3/2}}{3+4\theta^2}\right] r$, Centre Ω du cercle osculateur $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{2r}{3+4t^2}(\vec{u} - t(1+4t^2)\vec{u}')$.

(2) Cercles passant par O : $\|\overrightarrow{O\Omega}\| = R \Leftrightarrow (1+4\theta^2)^2 = 4 \Leftrightarrow \theta = \pm \frac{1}{2}$.

Indication 4.1.7 Le centre de courbure C a pour coordonnées $(x - \frac{dy}{d\alpha}, y + \frac{dx}{d\alpha})$, les calculs se simplifient et on trouve $P\left(-\frac{a^4}{x^3}, -\frac{x^3}{a^2}\right) \in (H)$.

Indication 4.1.8 Réduire l'ensemble d'étude, ensuite $ds^2 = a^2 \cos^2 t(4 - 3 \sin^2 t) dt^2$ d'où la longueur $L = \frac{8a}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Indication 4.1.9 $\frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2}r^2$; $\frac{ds}{d\theta} = \frac{r}{\sin V} \Leftrightarrow r \sin V = a \Rightarrow r(\cos V + \cos V \frac{dV}{d\theta}) = 0$: cercles de centre O et droites.

Indication 4.1.10 Avec $D = Ox$ prendre $\alpha = \widehat{(\vec{i}, \vec{T})}$ comme paramètre : (C) admet comme équations paramétriques $x = a \ln |\tan(\alpha/2 + \pi/4)| + b$, $y = \frac{a}{\cos \alpha}$.

Indication 5.1.1 On obtient la condition $\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (1), les conditions du théorème des fonctions implicites donnent $\frac{\partial z}{\partial y} \neq 0$. On obtient $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$ et finalement $y = xz + \phi(z)$.

Pour $z = \frac{y-b}{x-a}$, $\phi(z) = b - az$ on trouve $\int \omega = \varepsilon \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ où ε est du signe de $x-a$.

Indication 5.1.2 N a pour coordonnées $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta(1 + \cos \theta)$, l'aire intérieure vaut $S = \pi a^2$.

1. SOLUTIONS

Solution 1.1.1 On a $f(x, y) = h \circ g(x, y)$ où $g(x, y) = \frac{|y|}{x^2}$ et $h(u) = ue^{-u}$; le seul problème se situe sur l'axe des y : f se prolonge par continuité sur $0 \times \mathbb{R}^*$ mais pas en $(0, 0)$ (prendre des paraboles d'équation $y = ax^2$).

Solution 1.1.2 Sur chacun des ouverts $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ et $D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$ f est continue, il reste à voir ce qui se passe sur le cercle $\mathcal{C}$.
Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 \right) = -\frac{1}{2}x_0^2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} -\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x_0^2$$

donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe η_1 et η_2 positifs tels que

$$\forall (x, y) \in \overline{D}_1, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \eta_1 \Rightarrow \left\| \left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 \right) + \frac{1}{2}x_0^2 \right\| \leq \varepsilon$$

$$\forall (x, y) \in D_2, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \eta_2 \Rightarrow \left\| -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x_0^2 \right\| \leq \varepsilon.$$

On prend $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ pour conclure à la continuité de f .

Solution 1.1.3 • Supposons f dérivable alors $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$ et $f(a-k) = f(a) - kf'(a) - k\varepsilon(-k)$ donc

$$|g(h, k) - f'(a)| \leq \left| \frac{h\varepsilon(h) + k\varepsilon(-k)}{h+k} \right| \leq |\varepsilon(h)| + |\varepsilon(-k)| \rightarrow 0$$

• Réciproque immédiate, on prend $k = 0$.

Solution 1.1.4 On commence par faire une translation pour se ramener au cas où $a = (0, 0)$ et une homothétie pour se ramener au cas où $r = 1$.

h est continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $B((0, 0), 1)$.

$g(X, Y) = \frac{(X, Y)}{1 - \|(X, Y)\|}$ est une application continue de $B((0, 0), 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ qui est exactement l'application réciproque de h .

Solution 1.1.5 On peut exprimer f mais il est plus simple de procéder ainsi :

$$xt + yt^2 = (x - x')t + (y - y')t^2 + x't + y't^2$$

$$\leq |x - x'| + |y - y'| + f(x', y')$$

soit $f(x, y) \leq |x - x'| + |y - y'| + f(x', y')$ et par symétrie $|f(x, y) - f(x', y')| \leq |x - x'| + |y - y'|$, f est lipschitzienne donc continue.

Solution 2.1.1 f est bien évidemment continue sur $(\mathbb{R}^*)^2$ car elle est somme et produit de fonctions continues.

En fait, la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'argument

précédemment cité s'applique à la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ prolongée par $f(x, y) = g(x) + g(y)$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour $x \neq 0$, cela résulte des théorèmes généraux et pour $x = 0$, on revient à la définition de la dérivée et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0$ ce qui assure la dérivabilité en 0.

Mais $g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 donc g n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g'(x)$ on en déduit que les dérivées partielles de f ne sont pas continues sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque : cet exercice est facile car on a pu séparer les variables x et y . À chaque fois qu'on le pourra, il sera intéressant (quitte à faire un changement de variables) de se ramener à des variables séparées.

Solution 2.1.2 Si f admet un gradient en $(0,0)$, $\text{grad } f(0,0) = 0$ car les dérivées partielles en $(0,0)$ sont nulles.

Or la dérivée selon le vecteur $(1,1)$ n'est pas nulle.

Conclusion : f n'admet pas de gradient en $(0,0)$.

Solution 2.1.3

- Pour f :
 - si $(x, y) \neq (0,0)$ alors f admet un gradient comme rapport de deux fonctions admettant un gradient, le dénominateur ne s'annulant pas ;
 - si $x = y = 0$ alors $f(x, y) = r^2 \frac{\sin 4\theta}{4}$ en passant en polaires donc f admet bien un développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$.
- Pour g :
 - si $p + q \leq 2$ g n'est pas continue en $(0,0)$;
 - si $p + q = 3$ alors g est continue en $(0,0)$ mais n'a pas de gradient en $(0,0)$ (cf exercice 2.1.2) ;
 - si $p + q \geq 4$: g admet un gradient sur $\mathbb{R}^2$ (c'est la même chose que pour f).

Solution 2.1.4 On paramètre les droites par $y = tx$ ou $x = 0$, la réponse est immédiate.

L'intérêt ici tient dans le contre-exemple plus que dans la difficulté de l'exercice.

Solution 2.1.5 f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Soit $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 3\} \setminus \{0\}$. $\text{grad } f$ ne s'annule pas sur D' donc f ne peut présenter d'extremum local sur D' .

Les extrema sont à chercher sur la frontière de D' i.e. soit en $(0,0)$, soit sur le cercle $x^2 + y^2 = 9$.

- En $(0,0)$ on a un minimum absolu strict car $\sqrt{x^2 + y^2} + y^2 > 0$ si $(x, y) \neq (0,0)$.
- La borne supérieure est atteinte en $(0, \pm 3)$ et vaut 11. En effet, sur le cercle, on a $f(x, y) = 2 + y^2$.

Solution 2.1.6 Soit $A(1,0)$, $B(0,1)$ alors $f(x, y) = AM + BM$ (où M est le point de coordonnées (x, y)).

Grâce à cette interprétation géométrique, on peut conclure :

f atteint son minimum absolu en tout point de $[A, B]$; en dehors de ce segment, il n'y a pas d'extremum local.

Solution 2.1.7 La continuité en $(0,0)$ se traite avec l'inégalité $0 \leq f(x, y) \leq \frac{xy}{x+y} \leq x$.

f est bornée car pour $x \leq 1$ et $y \leq 1$ $f(x, y) \leq 1$ et si x ou y est supérieur à 1, on a de même $f(x, y) \leq 1$.

On a $f(1, 1) = \frac{1}{8}$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$ donc f atteint son maximum. On vérifie alors que f atteint son maximum en $(1,1)$.

On peut aussi remarquer que, en posant $g(x, y, z) = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$ avec $X = \frac{y}{z}$, $Y = \frac{z}{x}$ et $Z = \frac{x}{y}$, on a : $g(x, y, z) = 2 + X + \frac{1}{X} + Y + \frac{1}{Y} + Z + \frac{1}{Z}$ et que $f(x, y) = \frac{1}{g(x, y, 1)}$.

Solution 2.1.8 Le seul point critique de f est le point $(-1, -1)$ (un point critique d'une application f est un point où le gradient de f s'annule).

Or ce point là ne correspond pas à un extremum, donc f ne présente pas d'extremum sur $\mathbb{R}^2$.

Solution 2.1.9 Soit $\varphi(t) = f(a+th, b+tk)$ qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis. Il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= f(a+h, b+k) = \varphi(0) + \varphi'(\theta) \\ &= f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta h, y + \theta k) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a + \theta h, y + \theta k). \end{aligned}$$

On applique alors ce résultat à $f(x, y) = ye^x$ avec $a = b = 0$ et $h = a, k = 1$.

Solution 2.2.1 On fait un changement de base orthonormée telle que si (e_1, e_2) est la nouvelle base telle que e_2 donne la direction, alors $f(x_1, x_2) = g(u)$ où $u = \frac{x_2}{r}$ et $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Le calcul du Laplacien donne

$$\Delta f = \frac{x_2}{r^3}(-g'(u)) + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{x_2^2}{r^4} \right) g''(u).$$

On a alors les équivalences

$$\Delta f = 0 \Leftrightarrow -ug'(u) + (1 - u^2)g''(u) = 0 \Leftrightarrow g'(u) = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - u^2}}$$

pour $|u| < 1$.

En intégrant on obtient alors $f(x, y) = \lambda \operatorname{Arcsin} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \mu$.

Solution 2.2.2 En posant $z = \frac{y}{x}$ on obtient l'équation différentielle

$$(z^2 - 1)f''(z) + 2zf'(z)$$

et donc les solutions sont de la forme $f(z) = \frac{z}{2} - \lambda \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + \mu$. Or on cherche les solutions

f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ soit $f(z) = \frac{z}{2} + \mu$ et donc $g(x, y) = \frac{y}{2x} + \mu$.

Solution 3.1.1

- (1) On pose : $x = 1 + u \cos v, y = u \sin v$ ce qui correspond à une translation suivie d'un passage en coordonnées polaires : le domaine $\mathcal{D}$ est alors redéfini par

$$\begin{cases} u \in [0, 1] \\ v \in [0, 2\pi] \end{cases} .$$

On a alors $I_1 = \iint_{\mathcal{D}'} [(1 + u \cos v)^2 - u^2 \sin^2 v] u \, du \, dv$ en appliquant successivement le changement de variable affine et le passage en coordonnées polaires.

En développant et en simplifiant (l'intégrale d'un cosinus, sur un multiple d'une période, est nulle) on obtient

$$I_1 = \iint_{\mathcal{D}'} (1 + 2u \cos v + u^2 \cos 2v) u \, du \, dv = \iint_{\mathcal{D}'} u \, du \, dv = \pi$$

en utilisant le théorème de Fubini.

- (2) Même technique que ci-dessus, on utilise la transformation $X = \frac{x}{a}, Y = \frac{y}{b}$ d'où

$$I_2 = \iint_{\mathcal{D}'} (a^2 X^2 - b^2 Y^2) ab \, dX \, dY$$

où $\mathcal{D}'$ est défini par $X^2 + Y^2 \leq 1$. puis on passe en polaires ce qui donne, en définissant $\mathcal{D}''$ par $r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi[$,

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{\mathcal{D}''} (a^2 r^2 \cos^2 \theta - b^2 r^2 \sin^2 \theta) abr \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^1 abr^3 \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta) \, d\theta}_{=\pi(a^2 - b^2)} \right] dr \text{ grâce à Fubini} \\ &= \frac{\pi(a^2 - b^2)ab}{4} \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \pi$.

- (3) C'est une application directe du théorème de Fubini, le domaine $\mathcal{D}'$ est défini par $x \in [0, 1]$ et $y \in [0, 1 - x]$ d'où

$$I_3 = \int_0^1 a^x \left[\frac{b^y}{\ln b} \right]_0^{1-x} dx = \frac{a \ln b - b \ln a + \ln a - \ln b}{\ln a \ln b (\ln a - \ln b)} .$$

et, si $a = b$ on refait tous les calculs en faisant le changement de variable $u = x, v = x + y$ ce qui donne, en posant $\mathcal{D}' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \in [0, 1], u \in [0, v]\}$,

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{\mathcal{D}'} a^v \, du \, dv = \int_0^1 a^v \left(\int_0^v du \right) dv = \int_0^1 a^v v \, dv \\ &= \frac{a}{\ln a} - \frac{a-1}{(\ln a)^2} \text{ en faisant une intégration par parties} \end{aligned}$$

Remarque : on pouvait aussi obtenir ce résultat en passant à la limite quand b tend vers a (mais la justification utilise le théorème de continuité sous le signe intégral—cf théorème 6.35 page 260—).

- (4) On utilise le théorème de Fubini

$$I_4 = \int_0^a y \varphi(y) \, dy \text{ où } \varphi(y) = \int_0^{\sqrt[3]{a^3 - y^3}} x^2 \sqrt[3]{a^3 - x^3 - y^3} \, dx = \frac{1}{4} (a^3 - y^3)^{4/3} .$$

En faisant les changements de variables : $y = \frac{a}{t}$, $u = (t^3 - 1)^{1/3}$ (un peu parachutés), on obtient :

$$I_4 = \frac{a^6}{4} \int_0^{+\infty} \frac{u^6}{(u^3 + 1)^3} du = \frac{a^6}{18} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^3 + 1}$$

(en intégrant par parties).

$$\text{On trouve alors } I_4 = \frac{\pi a^6}{27\sqrt{3}}.$$

Remarque : on aura avantage à laisser le soin à un programme de calcul formel de faire la dernière intégration.

- (5) On fait le changement de variables : $x = u - v$, $y = u + v$, d'où, en prenant comme nouveau domaine $\mathcal{D}' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq \sqrt{u^2 - 1}\}$,

$$I_5 = -8 \iint_{\mathcal{D}'} uv \cos(u^2 - v^2) du dv = -8 \int_1^2 u \left(\int_0^{\sqrt{u^2-1}} v \cos(u^2 - v^2) dv \right) du.$$

On pose $V = u^2 - v^2$ dans l'intégrale $\int_0^{\sqrt{u^2-1}} v \cos(u^2 - v^2) dv$ on trouve

$$\int_0^{\sqrt{u^2-1}} v \cos(u^2 - v^2) dv = \frac{\sin u^2 - \sin 1}{2}.$$

On obtient alors : $I_5 = 2(\cos 4 - \cos 1) + 6 \sin 1$.

Solution 3.1.2

- (1) Ne pas passer en polaires, une simple application de Fubini suffit ici.

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2 + 1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1 - x^2}{1 + x^2} dx \\ &= \frac{\pi - 2}{4} \end{aligned}$$

- (2) Là aussi on fubinise.

$$J_2 = \int_0^1 \left[(y - e^x) \int_0^{1-y} x dx \right] dy = \frac{61}{24} - e.$$

- (3) Fubini encore :

$$J_3 = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x \frac{dy}{x + y + 1} \right) dx = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

- (4) Toujours Fubini mais il faut redéfinir le domaine d'intégration : $\mathcal{D} = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, 1 - 2\sqrt{x} + x \leq y \leq x - 1 + 2\sqrt{1-x}\}$ et

$$J_4 = \int_0^1 x \left(\int_{1-2\sqrt{x}+x}^{x-1+2\sqrt{1-x}} dy \right) dx = \frac{1}{3}$$

- (5) On fait le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$ de jacobien $\frac{1}{2}$ et le domaine d'intégration devient $\mathcal{D}' = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, -u \leq v \leq u\}$ donc

$$J_5 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-u}^u e^{v/u} dv \right) du = \frac{e^2 - 1}{4e}$$

Solution 4.1.1 On étudie d'abord les points d'angle polaire $\theta_0 + 2k\pi$ d'où le centre de courbure :
 $X = a\theta + R \cos(V + \frac{\pi}{2}) ; Y = R \sin(V + \frac{\pi}{2})$ avec $R = \frac{\alpha}{\cos V(1 + \cos^2 V)}$ ensemble contenu dans
 l'ellipse d'équation $X^2 + 2\left(Y - \frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{8}$. L'autre ellipse est la symétrique par rapport à 0.

Solution 4.1.2 En faisant un D.L. on trouve $R = -\frac{3}{4}\sqrt{5}$.

Solution 4.1.3 Changement de repère $X = x \cos \alpha + y \sin \alpha, Y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \Rightarrow R = \frac{-1}{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}$.

Les coordonnées du centre de courbure sont $\left(\frac{\sin \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}, \frac{-\cos \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}\right)$.

Solution 4.1.4 L'abscisse curviligne sur la chaînette vaut $s = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}$, et le rayon de courbure
 $R = a \left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)$. Dans le repère fixe Oxy , l'abscisse du point cherché est égal à s et son
 ordonnée vaut R .
 Le lieu cherché est donc la parabole $y = a \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)$.

Solution 4.1.5 L'équation générale d'une conique s'écrit $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \varphi = 0$.
 On exprime que $\Gamma \cap Ox$ est proportionnel à $(x - a)^2$ et $\Gamma \cap Oy$ est proportionnel à $(y - b)^2$ (ceci traduit la condition de tangence) d'où $\alpha x^2 + \delta x + \varphi = \lambda(x - a)^2$, $\gamma y^2 + \varepsilon y + \varphi = \mu(y - b)^2$.
 $\varphi \neq 0$ donc, quitte à diviser par φ , on se ramène au cas où $\varphi = 1$ et dans ce cas, l'équation
 de Γ s'écrit $\frac{x^2}{a^2} + 2\beta xy + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a} - 2\frac{y}{b} + 1 = 0$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ non nécessairement
 orthonormé.
 On prend $\vec{J}$ pour que $(\vec{i}, \vec{J})$ soit orthonormé, d'où les formules de changement de repère
 (avec $\vec{j} = \vec{i} \cos \theta + \vec{J} \sin \theta$) (dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{J})$)

$$X = x - a + y \cos \theta, Y = y \sin \theta.$$

Dans ce nouveau repère, la conique est tangente en A à l'axe AX . On sait que l'on peut
 exprimer localement Y en fonction d' X (théorème des fonctions implicites) et que, lorsque
 $X \rightarrow 0, Y = O(X^2)$ (condition de tangence). Si $Y = F(X)$ alors la formule donnant la rayon
 de convergence s'écrit (en $X = 0$) $R = \frac{1}{F''(0)}$ (au signe près). en prenant $x' = 1, y' = 0,$
 $x'' = 0$. Or, grâce à la formule de Taylor-Young appliquée à F

$$F(X) = F(0) + XF'(0) + \frac{X^2}{2}F''(0) + o(X^2) = \frac{X^2}{2}F''(0) + o(X^2),$$

on peut affirmer que $F''(0) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{2F(X)}{X^2}$.

On a alors $R_A = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X^2}{2Y}$. L'équation de la conique au voisinage du point A s'écrit

$$\frac{X^2}{a^2} + 2a\beta \frac{Y}{\sin \theta} - 2\frac{Y}{b \sin \theta} + o(X^2) = 0$$

d'où $R_A = \frac{a^2|1 - \beta ab|}{b \sin \theta}$ et par symétrie $R_B = \frac{b^2|1 - \beta ab|}{a \sin \theta}$.

On vérifie alors que $\frac{R_A}{R_B} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^3$.

Remarque : on peut exprimer le rayon de courbure dans un repère non orthonormé avec $\vec{i} \cdot \vec{j} = \cos \varphi$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$:

On pose $x = a(1+t)$ d'où $2y \frac{1-2\beta ab(1+t)}{b} + \frac{y^2}{b^2} = t^2$ et donc $y = \frac{bt^2}{2(1-2\beta ab)} + o(t^2)$.

Donc, avec le paramètre t , on obtient : $\vec{F}'(0) = a\vec{i}$, $\vec{F}''(0) = \lambda = \frac{b}{1-2\beta ab}\vec{j}$ et donc

$$|R_A| = \frac{\|\vec{F}'(0)\|^3}{\sqrt{G(\vec{F}', \vec{F}'')}} = \frac{a^3}{\sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & a\lambda \cos \theta \\ a\lambda \cos \theta & \lambda^2 \end{vmatrix}}} = \frac{a^2}{\sqrt{\lambda^2(1-\cos^2 \theta)}} = \frac{a^2}{b}K$$

où $K = \frac{|1-2\beta ab|}{\sin \theta}$ et on peut conclure.

Solution 4.1.6 Soit ϕ tel que $\cos \phi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On passe en polaires et on fait une rotation d'angle ϕ d'où $r = a\sqrt{5}e^{-\theta^2}$.

(1) Rayon de courbure : $R = \left[\frac{(1+4\theta^2)^{3/2}}{3+4\theta^2} \right] r$.

Centre Ω du cercle osculateur :

$$\vec{O}\vec{\Omega} = \frac{2r}{3+4t^2}(\vec{u} - (t(1+4t^2)\vec{u}')).$$

(2) Cercles passant par O : $\|\vec{O}\vec{\Omega}\| = R \Leftrightarrow (1+4\theta^2)^2 = 4 \Leftrightarrow \theta = \pm \frac{1}{2}$.

Solution 4.1.7 Le centre de courbure C a pour coordonnées :

$$\left(x - \frac{dy}{d\alpha}, y + \frac{dx}{d\alpha} \right)$$

où M a pour coordonnées (x, y) . En effet, $\vec{T} = \begin{pmatrix} dx \\ ds \\ dy \\ ds \end{pmatrix}$ donc $\vec{N} = \begin{pmatrix} -dy \\ ds \\ dx \\ ds \end{pmatrix}$ et, en remplaçant

R par $\frac{ds}{d\alpha}$ dans la formule $\vec{M}\vec{C} = R\vec{N}$, on obtient la formule annoncée.

Les calculs se simplifient alors :

$$\frac{dy}{d\alpha} = -\frac{x}{2} \left(1 + \frac{a^4}{x^4} \right), \quad \frac{dx}{d\alpha} = \frac{x^3}{2a^2} \left(1 + \frac{a^4}{x^4} \right)$$

donc $P \left(-\frac{a^4}{x^3}, -\frac{x^3}{a^2} \right) \in (H)$.

Solution 4.1.8 Pour avoir la courbe une fois et une seule, il suffit d'en faire l'étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puis de faire une symétrie par rapport à Oy suivie d'une symétrie par rapport à Ox .

Le calcul de l'abscisse curviligne donne donc $ds^2 = a^2 \cos^2 t (4 - 3 \sin^2 t) dt^2$ d'où la longueur en intégrant ds sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et en multipliant par 4

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 3 \sin^2 t} \cos t dt = \frac{8a}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

en faisant le changement de variable $u = \sin t$.

Solution 4.1.9 $\frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2}r^2; \frac{ds}{d\theta} = \frac{r}{\sin V} \Leftrightarrow r \sin V = a \Rightarrow r(\cos V + \cos V \frac{dV}{d\theta}) = 0$: cercles de centre O et droites.

Solution 4.1.10 $D = Ox$; on prend $\alpha = (\widehat{i, T})$ comme paramètre : $(C) : M = O + f(\alpha)\vec{i} + g(\alpha)\vec{j}$. La condition se traduit par : $g(\alpha) = f'(\alpha)$ et $\frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)} \tan \phi \Rightarrow f(\alpha) = a \ln |\tan(\alpha/2 + \pi/4)| + b, g(\alpha) = \frac{a}{\cos \alpha}$.

Solution 5.1.1 On obtient la condition $\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (1).

Si on veut pouvoir exprimer y comme fonction de (x, z) , on se place dans les conditions du théorème des fonctions implicites ce qui donne $\frac{\partial z}{\partial y} \neq 0$.

On a : $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ et $dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz$ et donc, par identification :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

(et $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = 1$). Ces relations servent en Physique, notamment en thermodynamique.

(1) est alors équivalent à $\frac{\partial y}{\partial x} = z$ (avec $\frac{\partial z}{\partial y} \neq 0$). Ce qui donne finalement $y = xz + \phi(z)$.

Pour $z = \frac{y-b}{x-a}$, $\phi(z) = b - az$ on trouve $\int \omega = \varepsilon \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ où ε est du signe de $x-a$.

Solution 5.1.2 $N \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta (1 + \cos \theta) \end{cases}$ Point d'inflexion $\begin{cases} (1 - \sqrt{3})a/2 \\ (3 - \sqrt{3})\sqrt{6}a/4 \end{cases}$

Aire intérieure $S = \int_{-\pi}^{+\pi} xy' d\theta = \pi a^2$.