FONCTIONS DE 2 VARIABLES RÉELLES ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE (R)

1. Espace $\mathbb{R}^2$, fonctions continues

1.1.

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{I}}$ Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$.

(1) Représenter l'ensemble B.
(2) Montrer que l'on peut recouvrir B par des disques ouverts (i.e. il existe une famille de points $(x_i)_{i\in I}$ et une famille de rayons $(r_i)_{i\in I}$ telles que

$$B = \bigcup_{i\in I} D(x_i, r_i).$$

(3) Peut-on recouvrir B par des disques fermés ?

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^2$. On rappelle qu'un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ est un ensemble contenant un intervalle $[A, +\infty[$.
On dit que V est un voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}^2$ ssi V contient un ensemble E_A de la forme : $E_A = \{x \in \mathbb{R}^2 | \ \|x\| \geqslant A\}$.
Soient $f(x, y) = x^4 + \alpha x^2y^2 + y^4 + x$ et $g(x, y) = \dfrac{x^4 + \alpha x^2y^2 + y^4}{x^4 + y^4 + 1}$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$.
Étudier selon les valeurs de α les limites de f et g en $+\infty$.

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$
Étudier la continuité de $f(x, y) = \dfrac{x^3y}{x^4 + y^2}$ sur $\mathbb{R}^2$. Est-ce que les dérivées partielles de f sont continues en $(0, 0)$?

Exercice 1.1.4. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et par $f(0, 0) = 0$.
Étudier la continuité de f en (0,0). Est-ce que f admet un développement limité à l'ordre 1 en $(0, 0)$?

---

2. Calcul différentiel

2.1. Dérivées partielles premières.

Exercice 2.1.1. **F**

Trouver des conditions sur les couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

soit de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.

Exercice 2.1.2. **I**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, on pose $G_n(x,y) = \displaystyle\int_0^y f(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}^2$.
(2) En déduire que G_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer son développement limité à l'ordre 1.

Exercice 2.1.3. **F**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Étudier la continuité et la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 2.1.4. **F**

Continuité et existence d'un développement limité en $(0,0)$ de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0,0) = 0 \text{ et } f(x,y) = \sqrt{|xy|}\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}).$$

Exercice 2.1.5. **I**

Soient A et B 2 points distincts d'un plan P affine euclidien. On définit Φ par $\Phi(M)$ = aire du triangle ABM.

Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble à préciser.

2.2. Dérivées partielles d'ordre 2.

Exercice 2.2.1. **I T**

Soit $u : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}\times\{0\} \mapsto \dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} y}$.

(1) Trouver les fonctions $f \in C^2(]-1,1[,\mathbb{R})$ telles que $g(x,y) = f(u(x,y))$ ait un laplacien nul.
(2) Trouver une fonction analytique h (i.e. une fonction de $z = x+iy$ développable en série entière) telle que $g(x,y) = \Re(h(x,y))$.

---

3. Calcul intégral

3.1.

Exercice 3.1.1. $\boxed{\textbf{I}}$

Calculer les intégrales doubles :

1. $I_1 = \displaystyle\iint_D (x^3+y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$
2. $I_2 = \displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(4x^2+y^2+1)^2}$ où $D : x^2+y^2 \leqslant 1,\ y \leqslant 2x$
3. $I_3 = \displaystyle\iint_D (x^2-y^2)\cos xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D : 0 \leqslant x+y \leqslant 4,\ xy \geqslant 1,\ x \leqslant y$
4. $I_4 = \displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}$ où $D : |x| \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$
5. $I_5 = \displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+y\cos x}$ où $D : 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant a < 1$
6. $I_6 = \displaystyle\int_1^2 \left(\int_{\sqrt{x}}^x \sin\frac{\pi x}{2y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_2^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 \sin\frac{\pi x}{2y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = J_6 + K_6$
   (se ramener à une intégrale double sur un seul domaine)
7. $I_7 = \displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)}$ où $D = \mathbb{R}_+^2$
   (il s'agit d'un domaine non compact et on admettra que I_5 est définie et que l'on peut utiliser le théorème de Fubini).

Exercice 3.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$

Construire la partie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x/2+y/4)^2 \leqslant x/6, y \geqslant 0\}$, calculer ensuite :

$$I = \iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

---

4. Étude métrique des courbes planes

4.1. Pour les exercices de cette section, on aura besoin des notions suivantes :

- le cercle osculateur en un point M d'une courbe est le cercle de centre Ω vérifiant $\overrightarrow{M\Omega} = R\overrightarrow{N}$ de rayon $|R|$),
- la développée d'une courbe est l'ensemble des centres des cercles osculateurs.

Exercice 4.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit (E) une ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(1) Déterminer les rayons de courbure aux sommets de (E).
(2) Montrer que le cercle osculateur aux sommets de (E) est aussi surosculateur ce qui signifie que son intersection avec l'ellipse donne une équation de la forme $Cy^4+o(y^4) = 0$ aux points $x = a$, $y = 0$.

Exercice 4.1.2. $\boxed{\textbf{D C}}$

On considère la lemniscate de Bernoulli d'équation $r^2 = a^2\cos 2\theta$ et 2 points M et M' d'angle polaire φ et φ' compris entre 0 et $\pi/4$.

Si $\cos\varphi\cos\varphi' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et si A est le point $(a,0)$ alors, montrer que arc(AM) =arc$(M'O)$.

Exercice 4.1.3. $\boxed{\textbf{I}}$
Dans le plan euclidien, soit (Γ) un arc de classe C^4, birégulier (i.e. $\forall t$, $f'(t) \neq 0$ et $f'(t) \wedge f''(t) \neq 0$). I désignant le centre de courbure en un point M de (Γ), J (s'il existe) le centre de courbure en I à la développée $\mathcal{D}$ et P le milieu de MI.
Montrer que, lorsque M décrit (Γ), la tangente en P au lieu de P est orthogonale à MJ.

Exercice 4.1.4. $\boxed{\textbf{F}}$
Chercher la développée de la courbe (Γ_λ)

$$\begin{cases} x = \ln(\sin\varphi) - \sin^2\varphi + \lambda\sin\varphi \\ y = (\sin\varphi - \lambda)\cos\varphi \end{cases} \qquad \text{pour } \lambda > -1.$$

Exercice 4.1.5. $\boxed{\textbf{F C}}$
Chercher le rayon de courbure au point $M(r, \theta)$ de la courbe (C) définie par $r^\alpha = a^\alpha \cos(\alpha\theta)$ $(a > 0)$.
Cas particuliers connus.

Exercice 4.1.6. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit (C) une courbe plane vérifiant $R = a\sqrt{1 + e^{2s/a}}$. Chercher une relation entre R_1 et s_1 rayon de courbure et abscisse curviligne de la développée de (C).

Exercice 4.1.7. $\boxed{\textbf{F T}}$
Chercher les développées des courbes :

(1) Strophoïde : $x = a\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $y = tx$;
(2) Cissoïde : $x = \dfrac{at^2}{1 + t^2}$, $y = tx$.

Exercice 4.1.8. $\boxed{\textbf{I}}$
En tout point $M(s)$ d'un arc birégulier de classe C^3, on considère la droite $(M, \overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u} = \cos\alpha\overrightarrow{T} + \sin\alpha\overrightarrow{N}$, $\alpha \in]-\pi/2, +\pi/2[$ fixe.

(1) Déterminer $\lambda(s)$ de classe C^1 pour que la tangente à l'arc $\Gamma\ : s \mapsto P(s) = M(s) + \lambda(s)\overrightarrow{u}$ soit la droite $(M, \overrightarrow{u})$.
(2) Calculer le repère de Frenet et le centre de courbure en tout point de Γ.

Exercice 4.1.9. $\boxed{\textbf{F C}}$
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On suppose que la courbe (C) d'équation polaire $r = e^\theta$ roule sans glisser sur une droite fixe. Déterminer le lieu (D) de l'origine (dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ où Ω est un point choisi sur D).

---

5. Champs de vecteurs du plan et de l'espace

5.1.

Exercice 5.1.1. $\boxed{\textbf{D}}$

(1) Soit $\varphi\ : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\varphi'(0)=0$.
Montrer que $U\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $U(x)=\varphi(\|x\|)$ est de classe C^1.
Déterminer $\operatorname{grad} U$.

(2) Étudier la réciproque.

Exercice 5.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$

On considère les 2 fonctions numériques de 2 variables

$$f(x,y)=\lambda(x,y)+\frac{ax+by}{x^2+y^2},\quad g(x,y)=\mu(x,y)+\frac{bx-ay}{x^2+y^2}.$$

On suppose $(a,b)\neq(0,0)$, λ et μ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}-\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial x}=0.$$

Calculer

$$I=\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}x-g(x,y)\,\mathrm{d}y \text{ et } J=\int_C g(x,y)\,\mathrm{d}x+f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

où C désigne une courbe fermée simple (i.e. une courbe décrite une seule fois) de classe C^1 entourant 0.

Exercice 5.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$

Déterminer la fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$) pour que la forme différentielle $\omega(x,y)=\left(\dfrac{y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\dfrac{x}{1+y^2}\right)\varphi(x^2+y^2)$ soit fermée.
Trouver alors une primitive de ω.

Exercice 5.1.4. $\boxed{\textbf{F}}$

Calculer l'intégrale : $I=\displaystyle\iint_{\mathcal{D}}(3x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $\mathcal{D}:\ x^2+y^2\leqslant 1,\ (x-1)^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0$

---

1. Indications

Indication 1.1.1

(1) C'est le dessin de la boule pour la norme 1.
(2) Pour $x\in B$, prendre la distance de x à la frontière de B.
(3) Diviser par 2 le rayon pris à la question précédente.

Indication 1.1.2 Pour f, distinguer les cas $\alpha<-2$, $\alpha=-2$ (f n'a pas de limite) et $\alpha>-2$ ($f(x)\to+\infty$).
Pour g, montrer que la seule limite possible est 1 et trouver la seule valeur de α compatible.

Indication 1.1.3 Les seuls problèmes sont en $(0,0)$. f est continue en $(0,0)$ (majoration simple), par contre les dérivées partielles ne sont pas continues.

Indication 1.1.4 Passer en polaires pour la continuité et montrer que f n'admet pas de développement limité en $(0,0)$.

Indication 2.1.1 Passer en polaires, on trouve f continue en (0,0) ssi $\alpha+\beta>0$, $\alpha\geqslant 2$ et $\beta\geqslant 0$ et f $\mathcal{C}^1$ ssi $\alpha+\beta>3$, ($\alpha\geqslant 1$ et $\beta\geqslant 1$) ou ($\alpha=0$) ou ($\beta=0$).

Indication 2.1.2

(1) Développer le polynôme $(x-t)^n$.
(2) Avec le développement du (1), on a facilement la continuité des dérivées partielles.

Indication 2.1.3 Prendre la norme 1 et utiliser la majoration $|\sin u|\leqslant|u|$.

Indication 2.1.4 Passer en polaires pour la continuité, pour le D.L., considérer $\frac{f(ta,tb)}{|t|}$.

Indication 2.1.5 Utiliser la formule $\Phi(M)=\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}\|$ ou une astuce.

Indication 2.2.1

(1) Après calculs, on trouve $\operatorname{ch}^2 y\Delta g=-2uf'(u)+(1-u^2)f''(u)$ et on intègre l'équation différentielle en f'.
(2) Écrire $\operatorname{ch} y=\cos(ix)$ (revenir aux formules d'Euler) et utiliser les formules de trigonométrie généralisées aux nombres complexes.

Indication 3.1.1

(1) Faire le changement de variables : $x=au\cos\theta$, $y=bu\sin\theta$, $I_1=\frac{2}{15}ab(a^3+b^3)$.
(2) Passer en polaires, $I_2=\frac{\pi}{2\sqrt{10}}$.
(3) Poser $x=u-v$, $u=u+v$, $I_3=2(\cos 1-\cos 4)-6\sin 1$.
(4) Passer en polaires, $I_4=\dfrac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$.
(5) Fubini et poser $y=\cos t$, $I_5=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-(\operatorname{Arccos} a)^2\right)$.
(6) On se ramène à $D=\{(x,y),1\leqslant y\leqslant 2, y\leqslant x\leqslant y^2\}$, $I_6=\frac{8}{\pi^3}(\frac{\pi}{2}+1)$.
(7) $I_7=\frac{\pi^2}{2}$.

Indication 3.1.2 Dans un bon repère, la frontière de D s'écrit $X^2=\dfrac{8}{15\sqrt{5}}Y$ et le domaine d'intégration s'écrit $0\leqslant y\leqslant 4\left(\sqrt{\frac{x}{6}}-\frac{x}{2}\right)$, $0\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$, $I=\frac{8}{1701}$.

Indication 4.1.1 $R=\frac{a^2}{b}$ ou $\frac{b^2}{a}$, puis on cherche l'intersection de (E) avec le cercle d'équation $\left(x-a+\frac{b^2}{a}\right)^2+y^2=\frac{b^4}{a^2}$.

Indication 4.1.2 L'abscisse curviligne est donnée par $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ puis on fait un bon changement de variable...

Indication 4.1.3 On montre que $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{N}$ et l'abscisse curviligne sur $\mathcal{D}$ vérifie $\sigma=R+C$ d'où $P=M+\frac{1}{2}R\overrightarrow{N}$.

Indication 4.1.4 Écrire $\mathrm{d}x=A\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ et $\mathrm{d}y=A\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ où $A=\lambda-2\sin\varphi+\frac{1}{\sin\varphi}>0$ et remarquer que la développée ne dépend pas de λ.

Indication 4.1.5 On obtient $R=\frac{a}{\alpha+1}(\cos\alpha\theta)^{1/\alpha-1}$. Les cas particuliers connus sont $\alpha=\pm1$, $\alpha=-2$. $\alpha=2$ et $\alpha=1/2$ sont intéressants aussi.

Indication 4.1.6 Remarquer que $\mathrm{d}s_1=\mathrm{d}R$ puis $R_1=\dfrac{s_1^2-a^2}{a}$.

Indication 4.1.7

(1) On trouve $\dfrac{a}{4(3t^2+1)}\begin{pmatrix}(t^2+3)(t^4+6t^2+1)\\-16t^3\end{pmatrix}$ $\left(R=a\dfrac{(t^4+6t^2+1)^{3/2}}{4(3t^2+1)}\right)$.
(2) $\dfrac{a}{6}\begin{pmatrix}-t^4-6t^2\\8t\end{pmatrix}$ $\left(R=\dfrac{at}{6}(t^2+4)^{3/2}\right)$

Indication 4.1.8

(1) $\lambda(s) = R(s)\sin\alpha$.

(2) Le repère de Frenet $(P, \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu})$ est tel que $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{\nu} = -\overrightarrow{T}\sin\alpha + \overrightarrow{N}\cos\alpha = \overrightarrow{v}$ et $J = I + R\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\sin\alpha\,\overrightarrow{v}$.

Indication 4.1.9 $\overrightarrow{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u} + \vec{v})$ tangente à la spirale logarithmique, le roulement se traduit par $\overrightarrow{M\Omega} = -s\overrightarrow{T}$ et O décrit une demi-droite.

Indication 5.1.1

(1) Le seul problème est en $(0,0)$, on montre que U a des dérivées partielles nulles en $(0,0)$ puis la continuité des dérivées partielles. Pour $x \neq 0$, on trouve $\operatorname{grad} U(x) = \frac{\varphi'(\|x\|)}{\|x\|}x$.

(2) La réciproque est vraie si on prend U de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe $h\ :\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^2, \operatorname{grad} U(x) = h(x).x$. On montrera que $V(x) = U\left(r\frac{x}{\|x\|}\right)$ est constant pour $r > 0$ fixé et on conclura.

Indication 5.1.2 Les formes différentielles $\lambda\,\mathrm{d}x - \mu\,\mathrm{d}y$ et $\mu\,\mathrm{d}x + \lambda\,\mathrm{d}y$ sont exactes puis on passe en polaires, on trouve $I = -b\int_C \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ et $J = a\int_C \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$.

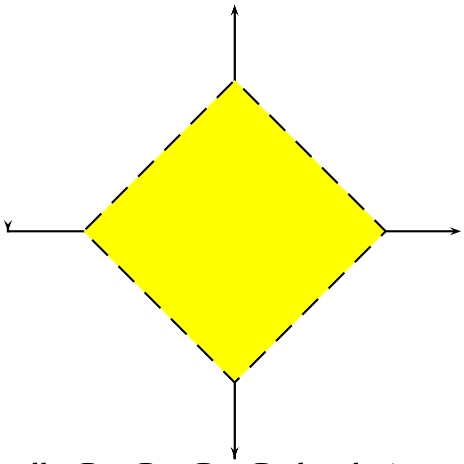
Indication 5.1.3 Poser $r = x^2 + y^2$, la résolution de l'équation différentielle obtenue donne $\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{1+r}}$. Une primitive de ω est donnée par $f(x,y) = \operatorname{Arcsin}\dfrac{xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$.

Indication 5.1.4 Utiliser la formule de Green-Riemann, $\mathcal{D}$ est l'intersection de 2 cercles, on trouve $I = \dfrac{5\pi}{3} - \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

2. Solutions

Solution 1.1.1

(1) C'est le dessin de la boule ouverte pour la norme 1 page 218.



(2) Soit $x \in B$, on appelle $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$ les droites $x+y=1$, $x-y=1$, $-x-y=1$, $-x+t=1$ et on pose $r_x = \inf_{i\in[1,4]}(\mathrm{d}(x,\mathcal{D}_i))$.

Par définition, on a $D(x,r_x) \subset B$ donc, avec $B' = \bigcup_{x\in B} D(x,r_x)$, on a $B' \subset B$. Or tout élément de B est aussi contenu dans B' d'où $B = B'$ soit

$$B = \bigcup_{x\in B} D(x,r_x).$$

(3) On reprend les définitions de la question précédente et on pose $\overline{D}(x,r)$ le disque fermé de centre x, de rayon $r>0$. On choisit alors $r'_x = r_x/2$ et on a

$$B = \bigcup_{x\in B} \overline{D}(x,r'_x).$$

Solution 1.1.2

- Étude de la limite de f :
  - Si $\alpha < -2$, le trinôme $t^2+\alpha t+1$ a deux racines réelles positives. Soit t situé entre ces deux racines, $f(x,\sqrt{t}x) = (t^2+\alpha t+1)x^4 + x$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$. $f(x,0) = x^4+x$ tend vers $+\infty$.
    Conclusion : f n'a pas de limite en ∞.
  - Si $\alpha = -2$, $f(x,x) = x$ et on arrive à la même conclusion que ci-dessus.
  - Si $\alpha > -2$ alors $t^2+\alpha t+1 \geqslant \beta = 1 - \dfrac{\alpha^2}{4} > 0$.
    * Si $|y| \leqslant |x|$, avec $|y| = \sqrt{t}|x|$, on a
    $$f(x,y) = (t^2+\alpha t+1)x^4 + x \geqslant \beta x^4 + x \geqslant \beta\|(x,y)\|^4 + x.$$
    * Si $|x| \leqslant |y|$, on obtient de même $f(x,y) \geqslant \beta\|(x,y)\|^4 + x$. Dans tous les cas, on a $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
- Étude de la limite de g. g est symétrique en x et y. Comme $g(x,0) = \dfrac{x^4}{x^4+1}$, la seule limite possible en ∞ est 1.

  Or $\lim_{x\to+\infty} g(x,x) = \dfrac{2+\alpha}{2}$ donc, pour que g ait une limite en ∞, il faut que $\alpha = 0$. On vérifie alors aisément que cela suffit.

Solution 1.1.3 f est continue sur $\mathbb{R}^{*2}$ comme quotient de deux fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.

f est continue en (0,0) car $2|x^2y| \leqslant x^4 + y^2$ et donc $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{|x|}{2}$.

Ensuite, les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent et sont nulles donc, si elles sont continues f admet un développement limité à l'ordre 1 qui est nul.

Or $f(x,x^2) = \dfrac{x}{2}$ ce qui contredit la nullité de ce développement limité de f en $(0,0)$.

Conclusion : si f avait des dérivées partielles continues en $(0,0)$, le théorème 5.2 page 94 nous assurerait l'existence d'un développement limité, ce qui vient d'être contredit donc l'une au moins de ces dérivées partielle n'est pas continue (ce que l'on peut vérifier en les calculant.

Remarque : on peut vérifier que f admet des dérivées selon tous les vecteurs.

Solution 1.1.4 f est continue sur $\mathbb{R}^{*2}$ comme quotient de deux fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas (cf. exercice 1.1.3).

En $(0,0)$, on passe en polaires : $f(x,y) = r\cos\theta\sin^2\theta \to 0$ quand $r \to 0$ donc f est continue en $(0,0)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ donc, si f admet un développement limité en $(0,0)$ il est nul.

Or $\dfrac{f(x,y)}{r}$ n'a pas de limite en (0,0) et donc f n'admet pas de développement limité en $(0,0)$.

Solution 2.1.1 En polaires : f continue en (0,0) ssi $\alpha+\beta > 0$, $\alpha \geqslant 2$ et $\beta \geqslant 0$.

On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x|x|^{\alpha-2}||y|^{\beta}}{(x^2+y^2)^2}\,[(\alpha-2)x^2 + \alpha y^2]$ et on fait de même avec $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ on en déduit la continuité de ces 2 applications en (0,0) ssi $\alpha+\beta > 3$, ($\alpha \geqslant 1$ et $\beta \geqslant 1$) ou ($\alpha = 0$) ou ($\beta = 0$).

Solution 2.1.2

(1) On développe donc, on obtient

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{1}{n!}\int_0^y f(t)\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{n-k}t^k\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\int_0^y f(t)\frac{t^k}{k!}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

G est une somme de fonctions continues séparément par rapport à x et y donc G est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(2) G admet des dérivées partielles, grâce à la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{n-1-k}}{(n-1-k)!}\int_0^y f(t)\frac{t^k}{k!}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^y f(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

La première égalité nous permet de dire (comme au 1.) que $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Comme $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = f(y)\frac{(x-y)^n}{n!}$, cette deuxième dérivée partielle est aussi continue.
Conclusion : G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Le développement limité à l'ordre 1 va s'écrire alors

$$\mathrm{D}_h\, G_n(x,y) = \left[\int_0^y f(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t\right] h_1 + f(y)\frac{(x-y)^n}{n!}h_2.$$

Solution 2.1.3 On prend la norme : $\|(x,y)\| = |x| + |y|$, comme $|\sin(xy)| \leqslant |x|.|y| \leqslant \|(x,y)\|^2$ alors f est continue en 0. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ mais $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,x)}{\|(x,x)\|} = \frac{1}{2} \neq 0$, f n'est pas différentiable en (0,0).

Solution 2.1.4 En polaires $|f(x,y)| \leqslant r$ donc f est continue en $(0,0)$.
Si $(a,b) \neq (0,0)$, $\theta(t) = \frac{f(ta,tb)}{|t|}$ n'a pas de limite en 0, donc f n' admet pas de développement limité en $(0,0)$.

Solution 2.1.5 On utilise la formule $\Phi(M) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\|$ (c'est une conséquence de la question (i) page 27) : $\Phi(M) = n \circ f(M)$ où $f(M) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}$ et $n(v) = \|\overrightarrow{v}\|$.
f est $\mathcal{C}^1$ sur le plan ($\mathrm{D}_{\overrightarrow{H}}\, f(M) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{H}$) et n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le plan vectoriel privé de O ($\mathrm{D}_{\overrightarrow{K}}\, n(\overrightarrow{v}) = \frac{(\overrightarrow{v}|\overrightarrow{K})}{\|\overrightarrow{v}\|}$).
Φ est donc C^1 sur P privé de la droite AB.
Dans un bon repère, on peut aussi remarquer que $\Phi(M) = |y|$ ce qui permet de conclure immédiatement !

Solution 2.2.1

(1) On a

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y} f'(u) + \frac{\sin^2 x}{\operatorname{ch}^2 y} f''(u)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \left(\frac{2\cos x \operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{ch}^3 y} - \frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right) f'(u) + \frac{\cos^2 x \operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{ch}^4 y} f''(u).$$

D'où $\Delta g = \frac{2\cos x}{\operatorname{ch}^3 y}(\operatorname{sh}^2 y - \operatorname{ch}^2 y) f'(u) + \frac{1}{\operatorname{ch}^4 y}(\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y) f''(u)$ et donc, après modifications, on trouve :

$$\operatorname{ch}^2 y \Delta g = -2uf'(u) + (1-u^2)f''(u).$$

D'où $\Delta g = 0 \Leftrightarrow f'$ est solution de l'équa diff : $(1-u^2)z' - 2uz = 0$ qui s'écrit encore : $[(1-u^2)z]' = 0$. Vu que $u^2 < 1$ (car $(x,y) \neq (0,0)$ on obtient $f'(u) = \frac{a}{1-u^2}$ i.e. $f(u) = \frac{a}{2}\ln\frac{1+u}{1-u} + b$.

(2) On a donc $g(x,y) = \dfrac{a}{2}\ln\dfrac{\operatorname{ch} y + \cos x}{\operatorname{ch} y - \cos x} + b$ et avec les formules de trigonométrie, $g(x,y) = \dfrac{a}{2}\ln\left(\dfrac{\cos z/2}{\sin z/2}\dfrac{\cos \bar{z}/2}{\sin \bar{z}/2}\right) + b$ i.e. $h(x,y) = -a\ln(\tan z/2) + b$.

Solution 3.1.1

(1) Par changement de variables : $x = au\cos\theta$, $y = bu\sin\theta$, $u \in [0,1]$, $\theta \in [0,\pi/2]$; $J = abu$ (jacobien), $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} ab\left(\int_0^1 (a^3u^4\cos^3\theta + b^3u^4\sin^3\theta)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{15}ab(a^3+b^3)$.

(2) En polaires $I_2 = \displaystyle\iint_\Delta \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{[r^2(4\cos^2\theta + \sin^2\theta)+1]^2}$ où $\Delta : 0 \leqslant r \leqslant 1$, $\theta_0 - \pi \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ (avec $\theta_0 = \operatorname{Arctan} 2$) d'où

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{7+3\cos 2\theta} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{7+3\cos 2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{10}}.$$

(3) En posant $x = u - v$, $y = u + v$ on a $I_3 = 8\displaystyle\iint_{\Delta'} uv\cos(u^2-v^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ où $\Delta' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leqslant u \leqslant 2, 0 \leqslant v \leqslant \sqrt{u^2-1}\}$.
On utilise alors Fubini en intégrant par rapport à v puis à u ce qui donne $I_3 = 2(\cos 1 - \cos 4) - 6\sin 1$.

(4) Compte tenu des symétries (par rapport aux axes Ox et Oy), on a

$$I_4 = 4\iint_{D'} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2} \text{ où } D' = \{0 \leqslant x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\}.$$

Par passage en coordonnées polaires, on obtient

$$I_4 = 4\iint_\Delta \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{(1+r^2)^2} \text{ où } \Delta = \{0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \cos\theta \leqslant r \leqslant 1\}.$$

On a alors : $I_4 = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{1+\cos^2\theta} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\theta$ et en posant $t = \tan\theta$, on obtient finalement

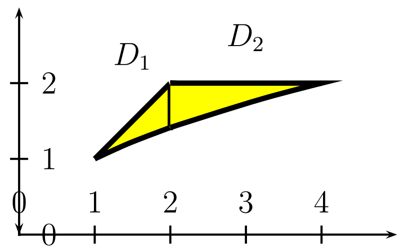
$$I_4 = -\frac{\pi}{2} + 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$$

(5) On peut utiliser Fubini, $I_5 = \displaystyle\int_0^a\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos x}\right)\mathrm{d}y$. Le calcul de la première intégrale résulte d'un résultat classique et $I_5 = \displaystyle\int_0^a \frac{2\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right)$.
On pose alors $y = \cos t$ d'où

$$I_5 = -2\int_0^{\operatorname{Arccos} a} \operatorname{Arctan}\tan\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - (\operatorname{Arccos} a)^2\right)$$

en remarquant que $\sqrt{\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}} = \tan\dfrac{t}{2}$.

(6) J_6 et K_6 sont les intégrales d'une même fonction sur sur l'ensemble



$D = D_1 \cup D_2 = \{(x, y), 1 \leqslant y \leqslant 2, y \leqslant x \leqslant y^2\}$

donc

$$I_6 = \int_1^2 \mathrm{d}y \left(\int_y^{y^2} \sin \frac{\pi x}{2y} \, \mathrm{d}x \right) = \frac{8}{\pi^3}(\frac{\pi}{2} + 1).$$

(7) $I_7 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2 y} \right) \frac{\mathrm{d}y}{1 + y} = \int_0^{+\infty} \frac{\pi/2}{\sqrt{y}(1 + y)} \mathrm{d}y = [\pi \operatorname{Arctan} \sqrt{y}]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{2}.$

Solution 3.1.2 $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4}\right)^2 - \dfrac{x}{6} = 0$ est une parabole ; en effet, avec $X = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} - \dfrac{2}{15}\right)$, $Y = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(x - 2y + \dfrac{8}{15}\right)$ alors C devient : $X^2 = \dfrac{8}{15\sqrt{5}} Y$ parabole d'axe $Y = 0$.

On peut redéfinir le domaine d'intégration par

$$-\sqrt{\frac{x}{6}} \leqslant \frac{x}{2} + \frac{y}{4} \leqslant \sqrt{\frac{x}{6}}, \ y \geqslant 0, \ x \geqslant 0$$

soit encore

$$0 \leqslant y \leqslant 4 \left(\sqrt{\frac{x}{6}} - \frac{x}{2} \right), \ 0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}.$$

On a alors

$$I = \int_0^{2/3} \left[\int_0^{4(\sqrt{x/6} - x/2)} xy \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^{2/3} \frac{x}{2} 4 \left[\sqrt{\frac{x}{6}} - \frac{x}{2} \right]^2 \mathrm{d}x = \frac{8}{1701}.$$

Solution 4.1.1

(1) (E) s'écrit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ alors $R = \dfrac{a^2}{b}$ ou $\dfrac{b^2}{a}$.

(2) Si $a > b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ alors, on cherche l'intersection de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec le cercle $\left(x - \dfrac{c^2}{a}\right)^2 + y^2 = \dfrac{b^4}{a^2}$. En $(a, 0)$: $x = a\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{b^2}}$ et $(a^2 - b^2) \left[1 - \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{b^2}} \right]^2 \sim (a^2 - b^2) \dfrac{y^4}{4b^4}$.

Solution 4.1.2 Le calcul de l'abscisse curviligne donne $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ (on utilise la formule fournie dans l'exemple au bas de la page 101).

Pour montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{a \, \mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \int_{\varphi'}^{\pi/4} \frac{a \, \mathrm{d}\psi}{\sqrt{\cos 2\psi}}$ on utilise la transformation $\psi = \arccos \left(\dfrac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} \right)$ qui donne le bon changement de variable.

Solution 4.1.3 On sait que $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{N}$; on suppose $R' = \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s} \neq 0$, on oriente $\mathcal{D}$ par $\overrightarrow{N}$ et on prend $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}R$ sur $\mathcal{D}$ d'où : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}\sigma} = -\dfrac{\overrightarrow{T}}{RR'} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = -RR'\overrightarrow{T} \Rightarrow \overrightarrow{MJ} = -RR'\overrightarrow{T} + R\overrightarrow{N}$.
$P = M + \dfrac{1}{2}R\overrightarrow{N} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{T} + R'\overrightarrow{N}) \perp \overrightarrow{MJ}$ c.q.f.d.

Solution 4.1.4 On écrit que :

$$\mathrm{d}x = A\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \text{ et } \mathrm{d}y = A\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

où $A = \lambda - 2\sin\varphi + \dfrac{1}{\sin\varphi} > 0$.

Si α désigne l'angle $\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T}}$, on obtient alors $\alpha = \varphi$, $\mathrm{d}s = A\,\mathrm{d}\varphi$: $R = A$.

La développée s'obtient alors par : $\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N}$ d'où $\Omega \begin{cases} x = \ln(\sin\varphi) - \cos^2\varphi \\ y = \dfrac{\cos^3\varphi}{\sin\varphi} \end{cases}$ $\varphi \in]0, \pi[$.

On remarque que le résultat ne dépend pas de λ et donc, ces courbes ont même développée. On dit ici que ces courbes sont parallèles, en fait, les courbes (Γ_λ) sont les développantes de la courbe ensemble des points Ω.

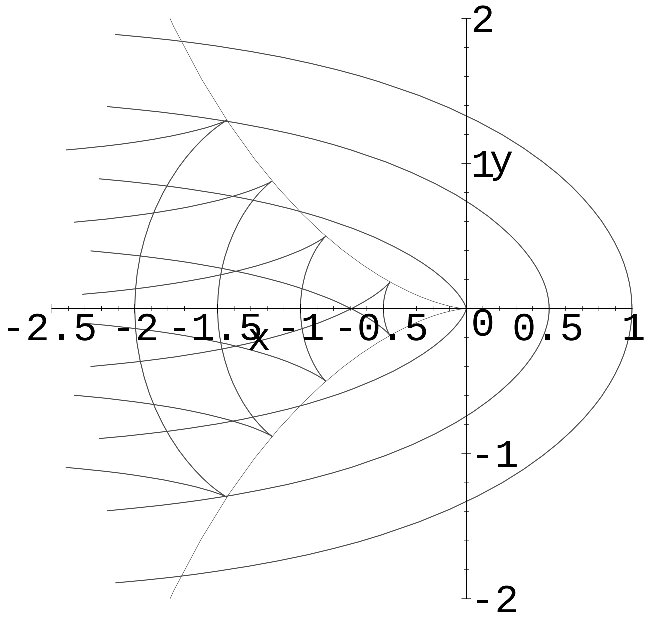


FIGURE 1. Les courbes Γ_λ et leur développée

Solution 4.1.5 On a

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \left(r^2 + r'^2\right)^{1/2} = r\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{1/2} = \frac{r}{\cos\alpha\theta}.$$

en dérivant r logarithmiquement.

Si V désigne l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}})$ alors $\tan V = \dfrac{r}{r'} = -\operatorname{cotan}\alpha\theta$ donc $V = \alpha\theta + \dfrac{\pi}{2}$ et comme $\alpha = \theta + V$, on obtient

$$R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{a}{\alpha + 1}(\cos\alpha\theta)^{1/\alpha - 1}.$$

Cas particuliers :

- $\alpha = 1$: cercle,
- $\alpha = -1$: droite,
- $\alpha = 2$: lemniscate de Bernoulli,
- $\alpha = -2$: hyperbole (on a $r^2 \cos 2\theta = a^2$ soit $x^2 - y^2 = a^2$),
- $\alpha = 1/2$: cardioïde d'équation $r = \dfrac{a}{2}(1 + \cos\theta)$,
- $\alpha = -1/2$: parabole d'équation $r = \dfrac{2a}{1 + \cos\theta}$ (cf. proposition 2.3.6 page 45).

Remarque : la lemniscate de Bernoulli et la cardioïde de sont pas des courbes figurant au programme mais il peut être intéressant de les connaître.

Solution 4.1.6 On a $\mathrm{d}s_1 = \mathrm{d}R$, on prend $s_1 = R$: $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Gamma}}{\mathrm{d}s_1} = \overrightarrow{N} = \overrightarrow{T}_1$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}_1}{\mathrm{d}s_1} = \dfrac{1}{R_1}\overrightarrow{N}_1 = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}R} = \dfrac{1}{RR'}(-\overrightarrow{T}) \Rightarrow R_1 = RR' = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(R^2) = ae^{2s/a} = \dfrac{R^2 - a^2}{a} = \dfrac{s_1^2 - a^2}{a}$.

Solution 4.1.7

(1) On trouve $\dfrac{a}{4(3t^2+1)}\begin{pmatrix}(t^2+3)(t^4+6t^2+1)\\ -16t^3\end{pmatrix}$ $\left(R = a\dfrac{(t^4+6t^2+1)^{3/2}}{4(3t^2+1)}\right)$.

(2) $\dfrac{a}{6}\begin{pmatrix}-t^4 - 6t^2\\ 8t\end{pmatrix}$ $\left(R = \dfrac{at}{6}(t^2+4)^{3/2}\right)$

(3) On trouve une développante de cercle.

Solution 4.1.8

(1) On a $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{T} + \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{u} + \dfrac{\lambda(s)}{R}\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directement perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$.
$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}}{\mathrm{d}s}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ ssi $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}}{\mathrm{d}s}.\overrightarrow{v} = 0$ ce qui est équivalent à $\lambda(s) = R(s)\sin\alpha$, λ est de classe C^1 et ne s'annule pas.
On remarque que le point obtenu est la projection orthogonale du centre de courbure I en $M(s)$ sur $(M, \overrightarrow{u})$.
Avec cette condition
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}}{\mathrm{d}s} = \left(\cos\alpha + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\sin\alpha\right)\overrightarrow{u},$$
nous nous placerons sur un arc où $\cos\alpha + \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\sin\alpha$ ne s'annule pas.

(2) Si σ est l'abscisse curviligne de P,
$$\mathrm{d}\sigma = \cos\alpha\,\mathrm{d}s + \sin\alpha\,\mathrm{d}R$$
et le repère de Frenet $(P, \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\nu})$ est tel que
$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{u}, \overrightarrow{\nu} = -\overrightarrow{T}\sin\alpha + \overrightarrow{N}\cos\alpha = \overrightarrow{v}.$$
On sait aussi que $\psi = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\tau}}) = \varphi + \alpha$ donc le rayon de courbure est
$$\rho = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\psi} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varphi} = \left(\cos\alpha + \sin\alpha\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)R,$$

le centre de courbure étant

$$\begin{aligned} J = P + \rho\overrightarrow{\nu} &= M + R\sin\alpha\,\overrightarrow{u} + R\left(\cos\alpha + \sin\alpha\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)\overrightarrow{v} \\ &= M - R\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\sin^2\alpha\,\overrightarrow{T} + R\left(1 + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\sin\alpha\cos\alpha\right)\overrightarrow{N} \\ &= I + R\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\sin\alpha\,\overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

Solution 4.1.9 On a $\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u} + \vec{v})$ où $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ et $\vec{v} \perp \vec{u}$ et on prend $s = \sqrt{2}e^{\theta}$. Dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ où $\overrightarrow{M\Omega} = -s\overrightarrow{T}$ (ceci traduit le roulement), O a pour coordonnées : $(\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\theta}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\theta})$: D est une demi-droite ouverte.

Solution 5.1.1

(1) Vu que $x \mapsto \|x\|$ est de classe C^1 sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, U est de classe C^1 sur Ω.
Notons $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Si $t \neq 0$, on $\dfrac{U(te_i) - U(0)}{t} = \dfrac{\varphi(|t|) - \varphi(0)}{t}$ qui a une limite nulle en 0. On a donc U qui admet des dérivées partielles nulles en 0.
Montrons que les dérivées partielles U_i' sont continues en 0 :
On a $U_1'(x) = \dfrac{x_i}{\|x\|}\varphi'(\|x\|)$, comme $\dfrac{|x_i|}{\|x\|} \leqslant 1$ et $\varphi'(\|x\|) \to 0$, on a bien la conclusion annoncée. On peut donc affirmer que U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On trouve enfin

$$\operatorname{grad} U(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi'(\|x\|)}{\|x\|}x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

(2) Supposons maintenant que U est une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $h\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \operatorname{grad} U(x) = h(x).x \tag{1}$$

Posons $\varphi(r) = U(re_1)$ pour $r \geqslant 0$. φ est bien de classe C^1. Soit $V(x) = U\left(r\dfrac{x}{\|x\|}\right)$, $r > 0$ étant fixé. On a

$$V_i'(x) = r\sum_{k=1}^{2} U_k'\left(r\frac{x}{\|x\|}\right)\left(\frac{\delta_{ik}}{\|x\|} - \frac{x_i x_k}{\|x\|^3}\right)$$

(on a dérivé la $k^{\text{ième}}$ coordonnée de $\dfrac{x}{\|x\|}$ par rapport à x_i).
Comme $U_i'\left(r\dfrac{x}{\|x\|}\right) = h\left(r\dfrac{x}{\|x\|}\right)x_i$ d'après la relation (1) et que $\operatorname{grad} U\left(r\dfrac{x}{\|x\|}\right).x = h\left(r\dfrac{x}{\|x\|}\right)\|x\|^2$ on en déduit que V_i' est nulle sur Ω et donc V est constante sur Ω.
Conclusion partielle : pour tout $r > 0$ et tout $x \neq 0$, $U\left(r\dfrac{x}{\|x\|}\right) = U(re_1) = \varphi(r)$ i.e. $U(x) = \varphi(\|x\|)$. Par définition de $\varphi(0)$ c'est aussi vrai pour $x = 0$.
Montrons pour conclure que $\varphi'(0) = 0$: on sait que $\operatorname{grad} U(0) = 0$ d'après (1) et donc

$$\varphi'(0) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(\varphi(t) - \varphi(0)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U(te_1) - U(0)) = U_1'(0) = 0$$

d'où le résultat :
si U est une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors on a équivalence entre les deux propriétés

- $\operatorname{grad} U(x) \in \operatorname{Vect}(x)$ et
- U ne dépend que de $\|x\|$.

Solution 5.1.2 Les formes différentielles $\lambda\,\mathrm{d}x - \mu\,\mathrm{d}y$ et $\mu\,\mathrm{d}x + \lambda\,\mathrm{d}y$ sont fermées et, grâce au théorème de Poincaré (théorème 6.5 page 105), vu que $\mathbb{R}^2$ est étoilé, elle sont exactes. Leurs intégrales sur C sont donc nulles.

On remarque ensuite que $\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)'$ donc

$$I = -b\int_C \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \text{ et } J = a\int_C \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$$

Le calcul en polaires nous donne directement

$$I = -b\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = -2\pi b \text{ et } J = 2\pi a.$$

Remarque : on peut aussi travailler avec les complexes, on a $f + ig = \lambda + i\mu + \dfrac{a+ib}{x+iy}$ et

$$I + iJ = \int_C (f+ig)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \int_C (a+ib)\frac{\mathrm{d}z}{z} = 2i\pi(a+ib)$$

en effet, grâce au théorème du relèvement, si on pose $r = \sqrt{x^2+y^2}$ alors on peut définir θ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $z = re^{i\theta}$ et $\mathrm{d}z = e^{i\theta}\,\mathrm{d}r + ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

Solution 5.1.3 Si on écrit $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ alors

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\varphi + 2y^2\varphi'}{1+x^2} \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\varphi + 2x^2\varphi'}{1+y^2}.$$

Une C.N.S. pour que ω soit fermée est donc que $(y^2 - x^2)[\varphi + 2(1 + x^2 + y^2)\varphi'] = 0$.

Par continuité, en posant $r = x^2 + y^2$, on obtient : $\varphi(r) + 2(1+r)\varphi'(r) = 0$. En résolvant cette équation différentielle, on trouve $\varphi(r) = \dfrac{1}{\sqrt{1+r}}$.

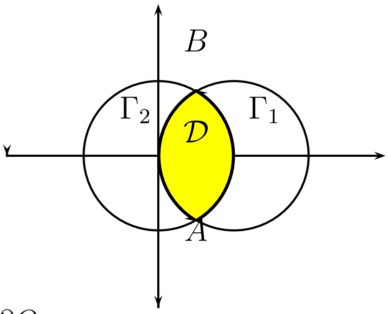
Recherche d'une primitive de ω :

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{y\sin\theta}{\sqrt{1+y^2}}\right)$$

en posant $x = \tan\theta$.

On obtient finalement : $f' = \omega$ avec $f(x,y) = \operatorname{Arcsin}\dfrac{xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$.

Solution 5.1.4 Voilà une occasion d'utiliser la formule de Green-Riemann (cf. théorème 6.6 page 106) :



On prend $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -3x^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = y^2$ d'où, si Γ désigne la réunion des deux courbes Γ_1 (portion du cercle de centre $(0, 0)$, de rayon 1, comprise entre les points A et B) et Γ_2 (portion du cercle de centre $(1, 0)$, de rayon 1, comprise entre les points B et A), ces deux cercles étant parcourus dans le sens trigonométrique, alors

$$\begin{aligned} I &= \int_\Gamma (-3x^2 y \, \mathrm{d}x + y^2 x \, \mathrm{d}y) \\ &= \int_{\Gamma_1} (-3x^2 y \, \mathrm{d}x + y^2 x \, \mathrm{d}y) + \int_{\Gamma_2} (-3x^2 y \, \mathrm{d}x + y^2 x \, \mathrm{d}y) \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Or

$$I_1 = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4 \sin^2\theta \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

en posant $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$, puis

$$I_2 = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \sin^2\theta (1 + \cos\theta)(3 + 4\cos\theta) \, \mathrm{d}\theta = -\frac{19}{8}\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}$$

en posant $x = 1 + \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.
Finalement, on obtient

$$I = \frac{5\pi}{3} - \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$