NOMBRES ET STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES (R)

1. Ensembles et applications

1.1.

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Étudier les correspondances (i.e. sont-elles fonctionnelles en x, y, sur quel ensemble ?) de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont les graphes sont définis par :
a) $xy = 1$ b) $x^2 + y^2 \leqslant 1$ c) $x^3 + y^3 - x - y = 0$ d) $x^y - y^x = 0$.

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit A et B 2 parties non vides d'un ensemble E ; on définit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par :

$$f(X) = (A \cap X, B \cap X).$$

Étudier les propriétés de f et, si f est bijective, expliciter f^{-1}.

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$
On reprend l'exemple ci-dessus, exercice 1.1.2.
Montrer que, pour les relations d'ordre définies sur $\mathcal{P}(E)$ par l'inclusion et sur $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par $(X, Y) \subset (X', Y') \Leftrightarrow (X \subset X'$ et $Y \subset Y')$, f est monotone.
Étudier le cas où f est strictement monotone.

Exercice 1.1.4. $\boxed{\textbf{D}}$
Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application qui vérifie la propriété : $f(n+1) > f(f(n))$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : f(n) = n$.
(On pourra dans un premier temps s'intéresser au cas où f est monotone.)

---

2. Entiers naturels, dénombrements

2.1.

Exercice 2.1.1. $\boxed{\textbf{I}}$
En reprenant l'exercice 1.1.2 lorsque f est bijective, montrer, en posant $\operatorname{Card} A = p$, $\operatorname{Card} B = q$ que

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{p}{i} \binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}$$

(en prenant la convention suivante : $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$).
Calculer en particulier $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$ et en déduire $\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{(2n)!}{(i!)^2[(n-i)!]^2}$.

Exercice 2.1.2. **D**

Soient p, q, n des entiers tels que $0 \leqslant q < p \leqslant n$. Établir la relation :

$$\sum_{k=q+1}^{n-p+q+1} \binom{n-k}{p-q-1}\binom{k-1}{q} = \binom{n}{p}$$

en déduire : $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n} = 2^{2n}$.

Exercice 2.1.3. **I T**

À l'aide de la 1ère égalité du 2.1.2, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{h} \binom{n-k-1}{n-h-1}\binom{q+k-1}{q-1} = \binom{q+n-1}{h}.$$

En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}\binom{q+k-1}{k} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{q+n-1}{k}.$$

Cas particulier où $q = n$?

Exercice 2.1.4. **F**

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\sum\limits_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card} X = n2^{n-1}$.

Exercice 2.1.5. **F**

(1) Soient n, p, q 3 entiers naturels vérifiant $p \leqslant n$ et $q \leqslant n$.
Montrer que $\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Leftrightarrow p = q$ ou $p + q = n$.

(2) Résoudre l'équation $\binom{2n+4}{3n-1} = \binom{2n+4}{n^2-2n+3}$.

Exercice 2.1.6. **D**

Simplifier l'expression $x_n = \sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^p 4^{n-p} \binom{2n-p+1}{p}$ (poser $y_n = \sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^p 4^{n-p} \binom{2n-p}{p}$).

Exercice 2.1.7. **I**

Soit E un ensemble fini de cardinal n, évaluer les deux expressions

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \operatorname{Card}(X \cap Y) \text{ et } \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \operatorname{Card}(X \cup Y).$$

Exercice 2.1.8. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $E = \{0,1\}^{p+q+1}$, $A = \{(x_1,\dots,x_{p+q+1}) \in E \mid \sum_{i=1}^{p+q+1} x_i \geqslant p+1\}$ et $B = A^c$ complémentaire de A dans E.

(1) Pour $k \in [\![0,q]\!]$ on définit $A_k = \{(x_1,\dots,x_{p+q}) \in E \mid \sum_{i=1}^{p+k} x_i = p \text{ et } x_{p+k+1} = 1\}$.
Montrer que $\operatorname{Card} A_k = 2^{q-k}\binom{p+k}{p}$.

(2) En déduire $\operatorname{Card} A$ et $\operatorname{Card} B$.

(3) Montrer que $\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{2^{p+k}}\binom{p+k}{p} + \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^{q+k}}\binom{q+k}{q} = 2$.

(4) En déduire la relation $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{p} 2^i\binom{2p-i}{p} = 2^{2p}$.

---

3. Structures algébriques usuelles

3.1. Groupes et anneaux.

Exercice 3.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit G un groupe ; on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall (a,b) \in G^2, \forall i \in \{k-1,k,k+1\} : (ab)^i = a^i b^i.$$

Montrer que G est abélien.
Étude des cas $k=1$, $k=0$.

Exercice 3.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit A une partie non vide d'un groupe G, on pose

$$P(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A,\ \exists (b,c) \in A^2,\ ax = xb,\ xa = cx\}.$$

Montrer que $P(A)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 3.1.3. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit E un ensemble fini non vide, $*$ une loi de composition interne (notée multiplicativement) associative et telle que tous les éléments sont réguliers.
Montrer que $(E,*)$ est un groupe.

Exercice 3.1.4. $\boxed{\textbf{F}}$

Vérifier, dans un anneau commutatif, les identités suivantes :

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$a^4+b^4+c^4-2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 + \sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

(identité de Lagrange).

EXERCICE 3.1.5. **I**

Montrer que si x et y sont 2 éléments d'un anneau commutatif alors :

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= (x+y)^n - n(x+y)^{n-2}xy + \cdots + (-1)^k n \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(x+y)^{n-2k}(xy)^k + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k n \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(x+y)^{n-2k}(xy)^k \end{aligned}$$

où $[n/2]$ désigne la partie entière de $n/2$.

En déduire, si $xy = 1$, $x^n + y^n$ en fonction de $z = x + y$.

EXERCICE 3.1.6. **I C**

À l'aide de la formule du binôme, calculer la partie entière de $(1+\sqrt{3})^{2n+1}$.

EXERCICE 3.1.7. **D**

Soit A un anneau (non commutatif) et $a \in A$. On suppose que a admet un inverse à gauche et n'admet aucun inverse à droite.

Montrer que a admet une infinité d'inverses à gauche.

3.2. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

EXERCICE 3.2.1. **F**

(1) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\dfrac{n^3+n}{2n+1}$ est-elle irréductible ?

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{15n^2+8n+6}{30n^2+21n+13}$ est irréductible.

EXERCICE 3.2.2. **I**

On définit les entiers a_n et b_n par $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad n \in \mathbb{Z}$.

Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

EXERCICE 3.2.3. **I**

Trouver tous les entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 85113$ et $a \vee b = 1764$.

EXERCICE 3.2.4. **F**

Montrer que pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{4}[n^3 + (n+2)^3]$ est entier et non premier.

EXERCICE 3.2.5. **I**

Soient a, b, c 3 entiers naturels non nuls, montrer que

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Exercice 3.2.6. **I**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

(1) Calculer $S_n \wedge S_{n+1}$.
(2) Montrer que $(S_n \wedge S_{n+1}) \wedge S_{n+2} = 1$.

Exercice 3.2.7. **I**

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $2n+1$ divise $S_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(2n)!}{k}$.

Exercice 3.2.8. **I**

Soit $n \geqslant 1$ un entier, $x_1, x_2, \dots, x_n$ des entiers non nuls, distincts 2 à 2 et n'admettant aucun diviseur premier supérieur ou égal à 5.

Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k} < 3$.

Exercice 3.2.9. **D**

On définit la suite $u_n = E(n + \sqrt{n} + 5)$, montrer que la suite (u_n) contient tous les nombres premiers $\geqslant 5$.

---

1. Indications

Indication 1.1.1 Réponses a) fonctionnelle sur $\mathbb{R}^*$, b) non fonctionnelle, c) non fonctionnelle, d) fonctionnelle sur $\mathbb{R}^*$.

Indication 1.1.2 f injective ssi $A \cup B = E$, surjective ssi $A \cap B = E$, si A et B sont complémentaires dans E alors $f^{-1}(A_1 \times B_1) = A_1 \cup B_1$.

Indication 1.1.3 Évident !

Indication 1.1.4 Soit $D_p = [\![p, +\infty[\![$, montrer que $f(D_p) \subset D_p$, en déduire que f est croissante et conclure.

Indication 2.1.1 On obtient tous les sous-ensembles de E à r éléments en choisissant i éléments dans A et $r-i$ dans B. On trouve ensuite : $\binom{2n}{n}$ pour la $1^{\text{ère}}$ somme et $\binom{2n}{n}^2$ pour la $2^{\text{ième}}$.

Indication 2.1.2 On écrit les parties de $[1, n]$ à p éléments sous la forme : $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ où $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ et on désigne par A_k celle pour lesquelles $i_{q+1} = k$. Pour la $2^{\text{ième}}$ égalité, transformer en somme double en remplaçant 2^k par $\sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q}$.

Indication 2.1.3 Il s'agit de faire des substitutions, penser à utiliser des majuscules (par exemple poser $Q = q-1$), puis passer aux minuscules. Remplacer ensuite 2^{n-1-k} et $\binom{q+k-1}{k}$.

Indication 2.1.4 On rassemble les sous-ensembles X selon leur cardinal puis on évalue $\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$.

Indication 2.1.5

(1) Étudier le cas $p < q$ (si c'est possible) et montrer par l'absurde que $p + q = n$.
(2) On doit avoir $n \leqslant 5$ puis on résout les équations.

Indication 2.1.6 On a $x_n = y_n - x_{n-1}$ et $y_n = 4x_{n-1} - y_{n-1}$ d'où $x_n = n+1$.

Indication 2.1.7 La première expression vaut $n2^{2n-2}$ (sommer sur Y et sur $\operatorname{Card} X = p$). La deuxième vaut $3n2^{2n-2}$ (utiliser $\operatorname{Card} X + \operatorname{Card} Y = \operatorname{Card}(X \cap Y) + \operatorname{Card}(X \cup Y)$ ou une astuce qui consiste à recopier E en E' disjoint de E).

Indication 2.1.8

(1) On choisit un sous-ensemble à p éléments d'indices de $[\![1, p+k]\!]$ et les $x_{p+k+1+j}$ sont arbitraires.
(2) $\operatorname{Card} A$ est la somme des cardinaux des A_k.
(3) Immédiat. (4) Prendre $p = q$.

Indication 3.1.1 Écrire $(ab)^{k+1} = a(ba)^k b = a^{k+1}b^{k+1}$. $k = 1 \Leftrightarrow (ab)^2 = a^2b^2$, $k = 0 \Leftrightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Indication 3.1.2 Attention aux quantificateurs et aux pièges.

Indication 3.1.3 Avec $\gamma_x \; : y \mapsto x * y$ et $\delta_x \; : y \mapsto y * x$, on montre qu'il existe e_x tel que $e_x * x = x * e_x = x$, puis que $e_x = e_y$ et finalement que tout élément admet un inverse (avec γ_x et δ_x).

Indication 3.1.4 Pas de difficulté mais ces relations sont intéressantes à retenir...

Indication 3.1.5 Procéder par récurrence en utilisant l'identité :
$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2})$.

Indication 3.1.6 Faire intervenir $(\sqrt{3} - 1)^{2n+1}$ et remarquer que $\sqrt{3} - 1 \in]0, 1[$.

Indication 3.1.7 Faire intervenir $c_n = b + a^n(1 - ab)$.

Indication 3.2.1

(1) La fraction est irréductible ssi $n \not\equiv 2[5]$ (sinon on peut diviser par 5).
(2) On montre (par Bézout) que 5 est le seul diviseur possible du numérateur et du dénominateur, puis on montre que 5 diviserait $5n + 1$ ce qui est impossible.

Indication 3.2.2 Prouver que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

Indication 3.2.3 Montrer que 21 divise a et b puis finalement que $a = 21 \times 12$ et $b = 21 \times 7$.

Indication 3.2.4 Factoriser $n^3 + (n+2)^3$ et distinguer les cas n pair et n impair.

Indication 3.2.5 Utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers.

Indication 3.2.6 Pour les 2 questions, distinguer les cas $n = 2p$ et $n = 2p + 1$ et utiliser l'expression factorisée de S_n.

Indication 3.2.7 Partager la somme de $k = 1$ à n et de $k = n + 1$ à $2n$ puis changer l'indice de sommation dans la deuxième somme et tout regrouper pour faire apparaître $2n + 1$.

Indication 3.2.8 $x_i = 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i}$ où les couples (α_i, β_i) sont distincts. Majorer alors la somme par le produit de 2 sommes.

Indication 3.2.9 En fait l'énoncé est une arnaque, montrer que, pour $a^2 \leqslant n < (a+1)^2$, alors u_n prend toutes les valeurs entre $5 + a^2 + a$ et $5 + (a+1)^2 + a - 1$.

2. Solutions

Solution 1.1.1 On remarque que toutes les correspondances sont symétriques ; a) fonctionnelle sur $\mathbb{R}^*$, b) non fonctionnelle, c) non fonctionnelle, d) fonctionnelle sur $\mathbb{R}^*$ (x fixé, on étudie la fonction $f_x(y) = x^y - y^x$ et on précise ce qui se passe pour $x \in [n, n+1]$).

Solution 1.1.2 On obtient les résultats suivants :

a) f injective ssi $A \cup B = E$:

- Si $A \cup B \neq E$, soit $X = (A \cup B)^c$ (X est le complémentaire de $A \cup B$ dans E) alors $f(X) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$ donc f n'est pas injective.
- Si $A \cup B = E$, soit X et Y des sous-ensembles de E tels que $f(X) = f(Y)$. On a alors $A \cap X = A \cap Y$ et $B \cap X = B \cap Y$ et comme

$$(A \cap X) \cup (B \cap X) = (A \cup B) \cap X = X$$

(grâce à la distributivité de $\cap$ sur $\cup$) alors $X = Y$.

b) f surjective ssi $A \cap B = \emptyset$:

- Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $(A \cap B, \emptyset)$ n'a pas d'antécédent. En effet, si $A \cap X = A \cap B$ alors $X \supset A \cap B$ donc $X \cap B \supset A \cap B \neq \emptyset$. f n'est pas surjective dans ce cas.
- Si $A \cap B = \emptyset$ et si $(A_1, B_1) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ alors on prend $X = A_1 \cup B_1$ comme antécédent.

(On a utilisé dans les deux premiers cas un raisonnement par contraposée.)

c) f bijective ssi A et B sont complémentaires et l'on trouve $f^{-1}(A_1 \times B_1) = A_1 \cup B_1$.

Solution 1.1.3 La monotonie ne pose pas de problème.

f est strictement monotone ssi $A \cup B = E$ i.e. f injective ce qui est encore évident !.

Solution 1.1.4 On va montrer que $f(n) \geqslant n$ et pour cela, que $f(D_p) \subset D_p$ où $D_p = [p, +\infty[$.

On a $f(D_1) \subset D_1$ par hypothèse et, par récurrence, si $f(D_p) \subset D_p$ alors pour tout k dans $\mathbb{N}$, $f(p+k+1) > f(\underbrace{f(p+k)}_{\in D_p}) \geqslant p$ donc $f(p+k+1) \in D_{p+1}$ ce qui achève la récurrence. On a donc $f(n) \geqslant n$ pour tout n.

En appliquant la propriété à $n = f(p)$, on a $f(f(p)) \geqslant f(p)$ or $f(p+1) > f(f(p)) \geqslant f(p)$ donc f est croissante.

Enfin, $f(n+1) > f(f(n)) \geqslant f(n)$ donc, comme f est croissante, $n+1 > f(n) \geqslant n$ donc $f(n) = n$.

Exercice posé aux olympiades de mathématiques et qui est loin d'être évident !

Solution 2.1.1 Soit X un sous-ensemble de E contenant r éléments :
si on pose $\text{Card}(X \cap A) = i$ alors $\text{Card}(X \cap B) = r - i$.
Comme f est bijective, on obtiendra tous les sous-ensembles de E à r éléments en choisissant i éléments dans A et $r - i$ éléments dans B (ce nombre de choix est nul si $i > p$ ou si $r - i > q$).
On obtient alors la formule en additionnant les choix possibles.
On trouve ensuite : $\dbinom{2n}{n}$ pour la $1^{\text{ère}}$ somme et $\dbinom{2n}{n}^2$ pour la $2^{\text{ième}}$.

Solution 2.1.2 La première égalité est simple à démontrer avec l'indication : soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $[1, n]$ à p éléments et $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des parties de $\mathcal{A}$ telles que $i_{q+1} = k$ alors comme $\mathcal{A} = \bigcup_{k=q+1}^{n-p+q+1} \mathcal{A}_k$ la famille $(\mathcal{A}_k)_{k\in[q+1,n-p+q+1]}$ réalise une partition de $\mathcal{A}$. Pour déterminer un élément de $\mathcal{A}_k$, il faut et il suffit de choisir $k-1$ éléments dans $[1, q]$ et $n-k$ éléments dans $[q+2, p]$ donc $\operatorname{Card} \mathcal{A}_k = \binom{k-1}{q}.\binom{n-k}{p-q-1}$. On utilise alors la proposition 7.2.6 page 119 dans le cas d'ensembles disjoints pour obtenir la formule.

Pour la deuxième, on écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n} = S_n &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q}\binom{2n-k}{n} \\
&= \sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q}\binom{2n-k}{n}\right) \\
&= \sum_{q=0}^{n} T_q
\end{aligned}$$

où $T_q = \binom{2n+1}{q+n+1}$ est obtenu en remplaçant n par $2n+1$, k par $k+1$ et p par $q+1+n$.

Enfin, comme $T_q = \binom{2n+1}{2n+1-(q+n+1)} = \binom{2n+1}{n-q}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{q=0}^{n} T_q &= \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n}\left(\binom{2n+1}{q+n+1} + \binom{2n+1}{n-q}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n}\binom{2n+1}{q} + \frac{1}{2}\sum_{q=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{q} \\
&= \frac{1}{2}2^{2n+1} = 2^{2n}
\end{aligned}$$

soit $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n} = 2^{2n}$.

Solution 2.1.3 Il suffit de poser $N = q+n-1$, $K = q+k$, $P = q+n-h-1$, $Q = q-1$ puis on remplace les majuscules par des minuscules pour obtenir la relation demandée.

Ensuite, en remplaçant dans la première égalité 2^{n-1-k} par $\sum_{p=0}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{p}$ et $\binom{q+k-1}{k}$ par $\binom{q+k-1}{q-1}$ (cf. relations page 120 après la proposition 7.2.10) on écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-1-k}\binom{q+k+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{p}\binom{q+k-1}{k} \\
&= \sum_{h=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{h}\binom{n-k-1}{p}\binom{q+k-1}{q-1}\right) \\
&= \sum_{h=0}^{n-1}\binom{q+n-1}{h}
\end{aligned}$$

(on a posé $h = p + k$) ce qui donne la relation.
Cas particulier : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}\binom{n+k-1}{k} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k} = 2^{n-1}$.

Solution 2.1.4 On rassemble les sous-ensembles X selon leur cardinal :

$$\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \operatorname{Card} X = \sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{\operatorname{Card} X=p} \operatorname{Card} X\right) = \sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}.$$

Or $\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = f(1)$ où $f(x) = \sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}x^{p-1} = [(1+x)^n]' = n(1+x)^{n-1}$ d'où le résultat.

Solution 2.1.5

(1) La réciproque est immédiate.
Intéressons-nous au sens direct : on a $\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{q!(n-q)!}$ soit $p!(n-p)! = q!(n-q)!$.
Si $p = q$ c'est gagné, supposons $p < q$ (si c'est possible) alors on a, après simplifications, $(n-p)(n-p-1)(\ldots)(q-p+1) = q(q-1)(\ldots)(q-p+1)$.
Si $n - p > q$ ou $n - p < q$ on a tout de suite une contradiction.
Conclusion : on a soit $p = q$ soit $p + q = n$.

(2) Il faut déjà avoir $2n + 4 \geqslant 3n - 1$ soit $n \leqslant 5$. On résout alors les 2 équations $3n - 1 = n^2 - 2n + 3$ soit $n \in \{1, 4\}$ et $5 - n = n^2 - 2n + 3$ soit $n \in \{-1, 2\}$.
Conclusion : l'ensemble des solutions est donné par $\{1, 2, 4\}$ (auquel on peut rajouter $[\![6, +\infty[\![$ si on prend les coefficients binomiaux généralisés).

Solution 2.1.6 On a $\binom{2n-p+1}{p} = \binom{2n-p}{p} + \binom{2n-p}{p-1}$ (valable même si $p = 0$) d'où

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p 4^{n-p}\binom{2n-p}{p} + \sum_{p=1}^{n}(-1)^p 4^{n-p}\binom{2n-p}{p-1} \\ &= y_n - x_{n-1}. \end{aligned}$$

De même $\binom{2n-p}{p} = \binom{2n-p-1}{p} + \binom{2n-p-1}{p-1}$ et, de la même façon, on obtient $y_n = 4x_{n-1} - y_{n-1}$.
Pour éliminer y_n entre ces 2 équations, on écrit $y_n = x_n + x_{n-1}$ (première équation) et l'on reporte dans la deuxième d'où $x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = 0$ i.e. $x_n = an + b$.
On calcule les premières valeurs $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, soit $b = 1$ et $a = 1$ d'où $x_n = n + 1$ soit

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p 4^{n-p}\binom{2n-p+1}{p} = n + 1.$$

Solution 2.1.7 Commençons par la première relation :

$$\begin{aligned}\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\operatorname{Card}(X\cap Y) &\underset{(1)}{=}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\operatorname{Card}X=p}\left(\sum_{Y\in\mathcal{P}(E)}\operatorname{Card}(X\cap Y)\right)\\ &\underset{(2)}{=}\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}\sum_{k=1}^{p}k\operatorname{Card}\{Y\in\mathcal{P}(E)\mid\operatorname{Card}(X\cap Y)=k\}\\ &\underset{(3)}{=}\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}\sum_{k=1}^{p}2^{n-p}k\binom{p}{k}\\ &\underset{(4)}{=}\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p}p2^{p-1}=n2^{2n-2}\end{aligned}$$

où (1) est obtenu en distinguant les cas selon le cardinal de X, (2) on a $\binom{n}{p}$ choix pour X de cardinal p, (3) on construit les ensembles Y en choisissant k éléments dans X et en complétant par un sous-ensemble quelconque du complémentaire de X (2^{n-p} choix en tout), (4) on utilise la relation $k\binom{p}{k}=p\binom{p-1}{k-1}$ 2 fois.

Deuxième relation : on utilise la relation $\operatorname{Card}X+\operatorname{Card}Y=\operatorname{Card}(X\cap Y)+\operatorname{Card}(X\cup Y)$. On a $\sum_{X\in\mathcal{P}(E)}\operatorname{Card}X=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$ d'où, vu qu'il y a 2^n sous-ensembles distincts de E,

$$\begin{aligned}\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}[\operatorname{Card}X+\operatorname{Card}Y] &=\sum_{X\in\mathcal{P}(E)}\left[\sum_{Y\in\mathcal{P}(E)}\operatorname{Card}X+\operatorname{Card}Y\right]\\ &=\sum_{X\in\mathcal{P}(E)}\left[2^n\operatorname{Card}X+\sum_{Y\in\mathcal{P}(E)}\operatorname{Card}Y\right]\\ &=\sum_{X\in\mathcal{P}(E)}\left[2^n\operatorname{Card}X+n2^{n-1}\right]\\ &=n2^{2n-1}+2^n\sum_{X\in\mathcal{P}(E)}\operatorname{Card}X=2n2^{2n-1}\qquad\text{(C)}\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}\operatorname{Card}(X\cup Y) &=\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2}[\operatorname{Card}X+\operatorname{Card}Y-\operatorname{Card}(X\cup Y)]\\ &=4n2^{2n-2}-n2^{2n-2}=3n2^{2n-2}.\end{aligned}$$

Remarque : on peut obtenir la formule (C) beaucoup plus rapidement, il suffit de “recopier” l'ensemble E en un ensemble E' disjoint et de chercher $\sum_{X\in\mathcal{P}(E\cup E')}\operatorname{Card}X=m2^{m-1}$ avec $m=2n$.

Solution 2.1.8

(1) Les éléments de A_k sont caractérisés par le choix des indices $i\in[\![1,p+k]\!]$ pour lesquels $x_i=1$ (les autres étant nuls) et par un choix arbitraire des $x_{p+k+1+j}$, $j\in[\![p+k+2,p+q+1]\!]$ i.e. 2^{q-k} choix.

(2) $A = \bigcup_{k=0}^{q} A_k$ la réunion étant disjointe donc

$$\operatorname{Card} A = \sum_{k=0}^{q} 2^{q-k}\binom{p+k}{p}.$$

En échangeant les rôles des 0 et des 1, on obtient $\operatorname{Card} B = \sum_{k=0}^{p} 2^{p-k}\binom{q+k}{q}$.

(3) Comme $\operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B = \operatorname{Card} E = 2^{p+q+1}$ la formule proposée est immédiate.

(4) On prend $p = q$ dans la relation précédente.

Solution 3.1.1 On écrit $(ab)^{k+1} = a(ba)^k b = a^{k+1}b^{k+1}$ (se démontre par une simple récurrence) d'où : $(ba)^k = a^k b^k = (ab)^k$. De même : $(ba)^{k-1} = (ab)^{k-1}$ et donc, en composant la première égalité par les inverses de la deuxième égalité, on obtient : $ab = ba$.
Si $k = 1$, la seule égalité significative est $(ab)^2 = a^2b^2$ et donc, si dans un groupe G, cette propriété est vérifiée alors G est abélien.
Si $k = 0$, la seule égalité significative est $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ et donc cette propriété est caractéristique des groupes abéliens d'où la prudence qu'il faut avoir lorsque l'on écrit l'inverse d'un produit de termes dans un groupe non nécessairement commutatif : il faut absolument inverser l'ordre des termes (cf. remarque 7.3.2 page 121)

Solution 3.1.2 Attention aux quantificateurs !

- $P(A)$ est non vide par définition.
- Stabilité : soit $(x, y) \in (P(A))^2$, montrons que $xy \in P(A)$.
  $\forall a \in A$,
  $$\begin{aligned} axy &= (ax)y = (xb)y = x(by) \text{ car } x \in P(A) \text{ et } G \text{ est associatif} \\ &= x(yb') = xyb' \end{aligned}$$
  en utilisant la fait que $\forall b \in A$, $\exists b' \in A$ tel que $by = yb'$ ($y \in P(a)$). On fait de même avec xya.
- Passage à l'inverse : $x^{-1}a = bx^{-1}$ et $ax^{-1} = x^{-1}c$ donc on remplace le couple (b, c) par le couple (c, b) (attention à ne pas passer aux inverses dans les relations $ax = xb$ et $xa = cx$ car les inverses des éléments de A ne sont pas nécessairement dans A).

Solution 3.1.3 La démonstration se fait en plusieurs étapes.

- Soit $x \in E$ alors $\gamma_x : y \mapsto x * y$ et $\delta_x : y \mapsto y * x$ sont injectives donc bijectives car E est fini. Il existe alors e_x et e'_x uniques tels que $x * e_x = x$ et $e'_x * x = x$. Or $x * x = x * e_x * x$ donc, en simplifiant par x à gauche, on trouve $e_x * x = x$ soit $e_x = e'_x$.
- Pour x et y dans E alors $x * y = x * e_x * y = x * e_y * y$ donc, en simplifiant par x à gauche et par y à droite on obtient $e_x = e_y$ que l'on note e.
- On utilise à nouveau les applications γ_x et δ_x du premier point, il existe x' et x'' tels que $x * x' = e$ et $x'' * x = e$ alors
  $$x'' * x * x' = \underbrace{(x'' * x)}_{=e} * x' = x'' * \underbrace{(x * x')}_{=e}$$
  donc $x' = x''$ et en conclusion $(E, *)$ est un groupe.

Solution 3.1.4 Les vérifications des deux premières égalités sont immédiates, il peut être intéressant de les retenir pour des applications ultérieures.

Pour la troisième égalité, on procède par récurrence sur n, les calculs sont immédiats. Cette relation permet de transformer une somme de carrés en produit de deux carrés.

Solution 3.1.5 On procède par récurrence en utilisant l'identité :

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2}).$$

La propriété est vraie pour $n = 1$, $n = 2$.

On montre d'abord que

$$(n-1)\frac{(n-k-2)!}{k!(n-2k-1)!} + (n-2)\frac{(n-k-2)!}{(k-1)!(n-2k)!} = \frac{(n-k-2)!}{k!(n-2k)!}[\underbrace{(n-1)(n-2k) + (n-2)k}_{=n^2-nk-n}]$$

d'où

$$(n-1)\frac{(n-k-2)!}{k!(n-2k-1)!} + (n-2)\frac{(n-k-2)!}{(k-1)!(n-2k)!} = n\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}$$

pour $n \geqslant 2$. En utilisant la convention $\dfrac{1}{p!} = 0$ si p est un entier négatif, on écrit les deux sommes pour k variant de 0 à $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ et le résultat devient évident.

On obtient alors la relation

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k n \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}\left(x + \frac{1}{x}\right)^{n-2k}.$$

Solution 3.1.6 On écrit

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1} = 2[\binom{2n+1}{1}3^n + \cdots + \binom{2n+1}{2k+1}3^{(n-k)} + \cdots + 1] + (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$$

et comme $\sqrt{3} - 1 \in]0,1[$ alors

$$2[\binom{2n+1}{1}3^n + \cdots + \binom{2n+1}{2k+1}3^{(n-k)} + \cdots + 1] < (1+\sqrt{3})^{2n+1}$$
$$< 2[\binom{2n+1}{1}3^n + \cdots + \binom{2n+1}{2k+1}3^{(n-k)} + \cdots + 1] + 1$$

et donc $E\left[(1+\sqrt{3})^{2n+1}\right] = 2[\binom{2n+1}{1}3^n + \cdots + \binom{2n+1}{2k+1}3^{(n-k)} + \cdots + 1]$.

Relation intéressante car elle peut servir plus tard.

Solution 3.1.7 Il existe $b \in A$ tel que $ba = 1$, on pose $c_n = b + a^n(1-ab)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (on pose $a^0 = 1$).

- c_n est bien un inverse à gauche de a : en effet $c_n a = ba + a^{n+1} - a^{n+1}ba = 1$.
- Montrons que les c_n sont deux à deux distincts : par l'absurde, soit $n < p$ tel que $c_n = c_p$. On a $a^n(1-ab) = a^p(1-ab)$ et, en multipliant par b^p on obtient $b^p a^n(1-ab) = b^p a^p(1-ab)$.
  Or $ba = 1$ donc $b^2a^2 = b(ba)a = 1$ et par une récurrence immédiate, $b^p a^p = 1$ d'où $1 - ab = b^{p-n}(1-ab) = b^{p-n} - b^{p-n}ab = 0$ i.e. $ab = 1$ ce qui est contradictoire.

Solution 3.2.1

(1) On a : $8(n^3+n)-(2n+1)(4n^2-2n+5)=-5$ (division euclidienne). Donc, si $d|n(n^2+1)$ et $d|2n+1$ alors $d|5$ i.e. $\dfrac{n^3+n}{2n+1}$ est réductible ssi $5|n(n^2+1)$ et $5|2n+1$:

$5|2n+1 \Leftrightarrow 5|n-2 \Leftrightarrow n\equiv 2[5]$.

Conclusion : $\dfrac{n^3+n}{2n+1}$ est irréductible ssi $n\not\equiv 2[5]$.

(2) On a

$$(6n+3)((15n^2+8n+6)-(3n+1)(30n^2+21n+13)=5$$
$$(6n+3)\wedge(3n+1)=1$$

donc $5|(30n^2+21n+13)-2(15n^2+8n+6)=5n+1$: ce qui est impossible.

Solution 3.2.2 En écrivant les égalités :

$$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2} \text{ et } (1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$$

on a $(a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2})=(-1)^n$. Cette dernière relation s'écrit encore

$$a_n^2-2b_n^2=(-1)^n$$

ce qui signifie que a_n et b_n sont premiers entre eux (ils vérifient la relation de Bézout $ua_n+vb_n=1$ avec $u=(-1)^na_n$, $v=-2(-1)^nb_n$).

Solution 3.2.3 $1764=2^2.3^2.7^2$ et $85113=3^2.7^2.193$ donc 3 et 7 divisent a ou b mais ils divisent forcément a et b (sinon 3 et 7 ne diviseraient pas a^2+b^2).

On pose $a=21.\alpha$, $b=21.\beta$ ce qui se traduit par $\alpha\vee\beta=2^2\times3\times7$ et $\alpha^2+\beta^2=193$.

Si $2|\alpha$ alors $2\not|\beta$ donc les seuls couples possibles sont

$$(\alpha,\beta)=(4,21),\quad (\alpha,\beta)=(12,7),\quad (\alpha,\beta)=(28,3)$$

il ne reste alors que $a=21\times12$, $b=21\times7$.

Solution 3.2.4 On écrit $A_n=\dfrac{1}{4}[n^3+(n+2)^3]=\dfrac{1}{2}(n+1)(n^2-n(n+2)+(n+2)^2)=\dfrac{1}{2}ab$ où $a=n+1$ et $b=n^2-n(n+2)+(n+2)^2=n^2+2(n+2)$.

- Si n est impair, a est pair et on a bien le résultat $A_n=\dfrac{a}{2}b$.
- Si n est pair, b est pair et on écrit $A_n=a\dfrac{b}{2}$.

Dans chaque cas, les facteurs sont bien des entiers >1.

Solution 3.2.5 On écrit la décomposition en produit de facteurs premiers pour a, b, c :

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n},\ b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_n^{\beta_n},\ c=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\dots p_n^{\gamma_n}.$$

On a $b\vee c=\prod_{i=1}^n p_i^{\max(\beta_i,\gamma_i)}$ et $a\wedge(b\vee c)=\prod_{i=1}^n p_i^{\min(\alpha_i,\max(\beta_i,\gamma_i))}$.

De même $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=\prod_{i=1}^n p_i^{\max(\min(\alpha_i,\beta_i),\min(\alpha_i,\gamma_i))}$ d'où l'égalité en prouvant que $\min(\alpha_i,\max(\beta_i,\gamma_i))=\max(\min(\alpha_i,\beta_i),\min(\alpha_i,\gamma_i))$.

Solution 3.2.6

(1) On distingue 2 cas.
- $n = 2p$ alors $S_{2p} = p^2(2p+1)^2$, $S_{2p+1} = (2p+1)^2(p+1)^2$ or $p \wedge p+1 = 1$ donc $S_{2p} \wedge S_{2p+1} = (2p+1)^2$.
- $n = 2p+1$ alors $S_{2p+2} = (p+1)^2(2p+3)^2$ or $(2p+1) \wedge (2p+3) = 1$ (le seul diviseur possible est 2 et ces deux nombres sont impairs) donc $S_{2p+1} \wedge S_{2p+2} = (p+1)^2$.

(2) Là aussi, on distingue 2 cas.
- Si $n = 2p$ alors $S_{2p} \wedge S_{2p+1} \wedge S_{2p+2} = (2p+1)^2 \wedge (p+1)^2$ or $(2p+1) \wedge (p+1) = 1$ donc $S_{2p} \wedge S_{2p+1} \wedge S_{2p+2} = 1$.
- Si $n = 2p+1$ alors $S_{2p+1} \wedge S_{2p+2} \wedge S_{2p+3} = (p+1)^2 \wedge (2p+3)^2 = 1$.

Solution 3.2.7 On partage la somme en 2 :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n)!}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{(2n)!}{2n+1-j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (2n)! \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1-k} \right) \\ &= (2n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k(2n+1-k)}. \end{aligned}$$

Or, pour $k \in [\![1, n]\!]$ alors $k < 2n+1-k$ donc $\dfrac{(2n)!}{k(2n+1-k)} \in \mathbb{N}$ et en conclusion, $2n+1 | S_n$.

Solution 3.2.8 On écrit $x_i = 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i}$, soit $m = \max(\alpha_i, \beta_j)$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} &\leqslant \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2^i} \times \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{3^j} \\ &\leqslant \left(\frac{1 - 1/2^{m+1}}{1 - 1/2} \right) \times \left(\frac{1 - 1/3^{m+1}}{1 - 1/3} \right) \\ &< 3 \end{aligned}$$

Solution 3.2.9 En fait on va montrer que la suite (u_n) contient tous les nombres impairs $\geqslant 5$.
$u_0 = 5$, $u_1 = 7$, $u_2 = 8$, $u_3 = 9$, $u_4 = 11$ ce qui donne l'idée de montrer que, pour $a^2 \leqslant n < (a+1)^2$, alors u_n prend toutes les valeurs entre $5 + a^2 + a$ et $5 + (a+1)^2 + a - 1$ (et $a^2 + a = a(a+1)$ est pair).
Soit $n = a^2 + k$ alors $E(n + \sqrt{n} + 5) = a^2 + k + a + 5$ ce qui prouve l'assertion.
