ALGÈBRE LINÉAIRE ET POLYNÔMES (R)

1. Espaces vectoriels

1.1. **Espaces vectoriels.**

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit $g = \phi(f) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$.
Montrer que ϕ est un endomorphisme de E ; ϕ est-elle injective, surjective ?

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$
On prend $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit f l'endomorphisme de E qui à $y \in E$ associe $z \in E$ tel que : $z = y' - xy = f(y)$.
Soit E_1 le sous-espace vectoriel de E défini par : $y \in E_1 \Leftrightarrow y(0) = 0$.
Montrer que f est un isomorphisme de E_1 sur E.

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{F C}}$
Soient L, M et N des sous-espace vectoriel de E ; a-t-on :

(1) $$L \cap (M + N) = L \cap M + L \cap N$$

(2)] $$[L \cap (M + L \cap N) = L \cap M + L \cap N \ ?$$

Exercice 1.1.4. $\boxed{\textbf{F}}$
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E.
Chercher une C.N.S. pour que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel

---

Exercice 1.1.5. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient S, T, T' 3 sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E.
Montrer que, si $S \cap T = S \cap T'$ et $S + T = S + T'$ et $T \subset T'$ alors $T = T'$.

Exercice 1.1.6. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on définit une autre loi externe sur E par $\lambda * x = \mathrm{Re}(\lambda).x$.
L'ensemble $(E, +, *)$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

1.2. **Translations, sous-espaces affines.**

EXERCICE 1.2.1. **D**

Soit $z = h_i(x, y)$ n équations de plans en dimension 3. On considère $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall i \in [1, n], z \geqslant h_i(x, y)\}$ et on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x, y, z) \in E$, $z \geqslant a$.
Prouver qu'il existe $(x_0, y_0, z_0) \in E$ tel que $\forall (x, y, z) \in E$, $z \geqslant z_0$.

EXERCICE 1.2.2. **I**

Dans un espace affine de dimension 3, on considère un point O et 3 points A, B, C non alignés tels que O n'appartienne pas au plan (A, B, C).
Soit (P) un plan parallèle au plan (A, B, C). On pose A' (resp. B', C') le milieu de BC (resp. AC, AB) et A'' (resp. B'', C'') l'intersection de la droite OA' (resp. OB', OC') avec (P).
Que peut-on dire des droites AA'', BB'' et CC'' ?

EXERCICE 1.2.3. **F**

Soient A, B, C 3 points non alignés ; 3 points A', B', C' tels que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ soient parallèles.
Montrer que : les plans $(A'BC), (AB'C), (ABC')$ sont parallèles à une même droite ssi :

$$\frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{BB'}} + \frac{1}{\overline{CC'}} = 0.$$

EXERCICE 1.2.4. **F**

Soient D, D', D'' 3 droites non parallèles à un même plan et 2 à 2 non coplanaires.
Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ il existe un unique point P_λ de D tel que

$$P_\lambda = (1 - \lambda)M' + \lambda M''$$

où M' et M'' sont les 2 points d'intersection de la droite passant par P_λ et s'appuyant en M' et M'' sur les droites D' et D''.
Trouver $\lim\limits_{\lambda \to 0} P_\lambda$.

EXERCICE 1.2.5. **F**

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ 2 sous-espaces affines de direction respectives F et G, contenant respectivement les points A et B.
Montrer que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \Leftrightarrow F \subset G$ et $\overrightarrow{AB} \in G$.

EXERCICE 1.2.6. **I C**

On appelle enveloppe convexe d'une partie non vide A de E la plus petite partie convexe contenant A (notée $\operatorname{Conv}(A)$).

(1) Montrer que $\operatorname{Conv}(A)$ existe et est égale à l'intersection de toutes les parties convexes contenant A.
(2) Soient $A_1, \ldots, A_n$ des points de E distincts, $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$.
Montrer que $\operatorname{Conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points A_i.

1.3. Applications linéaires.

Exercice 1.3.1. **F**

Soient p un projecteur de E espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que :

$$(p \circ f = f \circ p) \Leftrightarrow (\operatorname{Im} p \text{ et } \operatorname{Ker} p \text{ sont stables par } f).$$

(Dire qu'un espace F est stable par un endomorphisme f signifie que $f(F) \subset F$).

Exercice 1.3.2. **I C**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel vérifiant : $f \circ f \circ f = f^3 = \mathrm{Id}$. On pose :

$$h_1 = \mathrm{Id} + f + f^2,\ h_2 = \mathrm{Id} + jf + j^2 f^2,\ h_3 = \mathrm{Id} + j^2 f + j f^2 \text{ et } E_i = h_i(E).$$

Montrer que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.

Exercice 1.3.3. **F C**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer les équivalences :

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$$
$$f^2(E) = f(E) \Leftrightarrow E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f.$$

Exercice 1.3.4. **I C**

4.2.1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $(f - a\,\mathrm{Id}_E)(f - b\,\mathrm{Id}_E) = 0$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, a et b étant distincts dans $\mathbb{K}$.

(1) Montrer que l'on peut trouver λ et μ dans $\mathbb{K}$ tels que
$$p = \lambda(f - a\,\mathrm{Id}_E) \text{ et } q = \mu(f - b\,\mathrm{Id}_E)$$
soient des projecteurs ($p^2 = p$, $q^2 = q$).
Quelle relation existe-t-il entre p et q ?

(2) Exprimer f à l'aide de p et q. Calculer ensuite f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

(3) Si $ab \neq 0$ alors montrer que f est inversible. Qu'en penser ?

Exercice 1.3.5. **I**

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que : $u^n = \mathrm{Id}$, E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par u (i.e. $u(E) \subset E$) et p une projection de $\mathbb{C}^n$ sur E. On pose :

$$q = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}.$$

Montrer que q est un projecteur et que $\operatorname{Ker} q$ est supplémentaire de E

Exercice 1.3.6. **F**

Soit $E = \mathbb{R}_2[X], (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose

$$\forall P \in E,\ \forall x \in \mathbb{R}\ : u(P)(x) = \int_0^{\infty} (at^2 + bxt + cx^2) e^{-t} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que u est linéaire.

(2) Montrer que l'ensemble L des applications u (quand (a, b, c) décrit $\mathbb{R}^3$) est un espace vectoriel ; en donner une base.
(3) Déterminer l'ensemble U des points (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels u est bijective.

EXERCICE 1.3.7. **I**
Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.
Soit $F = \bigcap_{i\in I} F_i$, montrer qu'il existe une partie finie $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ extraite de I telle que

$$\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = F.$$

EXERCICE 1.3.8. **I**
Soient f et g 2 formes linéaires sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E vérifiant

$$\forall x \in E,\ f(x)g(x) = 0.$$

Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

EXERCICE 1.3.9. **F**
Soit $u \in \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x) = x \wedge u$.
(1) f est-elle injective ?
(2) Exprimer f^3 en fonction de f.

---

2. Dimension des espaces vectoriels

2.1. **Familles de vecteurs.**

EXERCICE 2.1.1. **I**
(1) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels tous distincts et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels non tous nuls.
Montrer par récurrence sur n, en utilisant le théorème de Rolle, que l'équation :

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_n x^{\alpha_n} = 0$$

n'a qu'un nombre fini de solutions > 0.
(2) X désigne un ensemble, $E = \mathbb{R}^X$ ensemble des applications de X dans E. Soit $f : X \to \mathbb{R}_+^*$ une application telle que $f(X)$ soit une partie infinie de $\mathbb{R}_+^*$.
Soit n un entier naturel > 0 et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ une famille de n réels distincts.
Montrer que la famille $(f^{\alpha_i})_{i\in[1,n]}$ est libre dans E.
(3) Pour $x > -1$, on pose : $g(x) = \sin(\ln(1 + x))$. Les fonctions $g, g^2, \ldots, g^n$ sont elles linéairement indépendantes ?

Exercice 2.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $u \in E \setminus \{0\}$: $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 3$.
Trouver toutes les $f \in \mathcal{L}(E)$ telles que : $\forall x \in E$, la famille $(u, f(x), x)$ est liée.

Exercice 2.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$
Soient F et G 2 sous-espaces vectoriels de E tels que $F + G = E$. Si F' est un supplémentaire de $F \cap G$ dans F alors montrer que $F' \oplus G = E$.

Exercice 2.1.4. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient u, v, w 3 vecteurs de E $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(1) Montrer l'équivalence
$$\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u, w) \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3, \beta\gamma \neq 0, \ | \ \alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$
(2) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer l'équivalence
$$F + \mathbb{K}v = F + \mathbb{K}w \Leftrightarrow \exists u \in F, \ \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \ \alpha\beta \neq 0 \mid u + \alpha v + \beta w = 0.$$

2.2. Dimension d'un espace vectoriel.

Exercice 2.2.1. $\boxed{\textbf{D}}$
Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré n de $\mathbb{C}[X, Y]$ ensemble des polynômes à 2 indéterminées sur $\mathbb{C}$. $\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}(X^i Y^{n-i})_{i \in [0,n]}$.
On appelle $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{H}$ les polynômes de $\mathcal{P}_n$ vérifiant respectivement :
$$P \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow X^2 + Y^2 \text{ divise } P \text{ et } P \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = 0.$$
Montrer que $\mathcal{P}_n = \mathcal{Q} \oplus \mathcal{H}$.

Exercice 2.2.2. $\boxed{\textbf{I}}$
$E = \mathbb{R}_n[X]$, soit $P \in E$ tel que : $\deg P = n$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n + 1$ réels distincts.
Montrer que les polynômes $P(x + a_0), P(x + a_1), \ldots, P(x + a_n)$ constituent une base de E (utiliser la formule de Taylor, le fait que les polynômes $P, P', \ldots, P^{(n)}$ forment une base de E et les déterminants de Vandermonde.

Exercice 2.2.3. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit E l'ensemble des vecteurs (x, y, z) qui vérifient le système $\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ 2x - y + z & = 0 \end{cases}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Donner une base de cet espace vectoriel.

Exercice 2.2.4. $\boxed{\textbf{F}}$
Soient f_1, f_2, f_3 les 3 formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ définies par
$$f_1(x, y, z) = -x + y + z, \ \ f_2(x, y, z) = 2x - y - z, \ \ f_3(x, y, z) = x + 2y + z.$$
La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ?

2.3. **Rang d'une application linéaire.**

Exercice 2.3.1. **I C**

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

(1) Montrer que : $\exists k \in \mathbb{N}$, $\forall p \geqslant k$: $\operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^k$ et si $k \geqslant 1$: $\operatorname{Ker} u^{k-1} \neq \operatorname{Ker} u^k$.

(2) Montrer que k vérifie aussi : $\forall p \geqslant k$: $\operatorname{Im} u^p = \operatorname{Im} u^k$.
Que penser de $\operatorname{Im} u^{k-1}$ et $\operatorname{Im} u^k$ si $k \geqslant 1$?

(3) Montrer enfin que : $\forall p \geqslant k$: $\operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im} u^p = E$.

Exercice 2.3.2. **D**

Soient p et q 2 projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tels que $p+q$ soit également un projecteur. Montrer que

$$p \circ q = q \circ p = 0,\ \operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q),\ \operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q).$$

Exercice 2.3.3. **I**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On suppose que f est de rang $p \leqslant n$.

Montrer que f peut s'écrire comme la somme de p endomorphismes de rang 1.

Exercice 2.3.4. **I**

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ où E, F, G sont 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

En considérant la restriction de f à $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ montrer que

$$\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} g) + \dim(\operatorname{Ker} f).$$

Exercice 2.3.5. **I C**

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(1) Montrer que $|\operatorname{Rg}(f) - \operatorname{Rg}(g)| \leqslant \operatorname{Rg}(f+g) \leqslant \operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g)$.

(2) On suppose de plus que $f+g$ est inversible et que $f \circ g = 0$. Montrer que

$$\operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) = \dim E.$$

Exercice 2.3.6. **F**

Soient $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que $\operatorname{Rg}(\mathcal{F}) = s \leqslant n$ et qu'il existe $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ comportant $r < n$ éléments de rang s'.

Montrer que $s' \geqslant r + s - n$.

Exercice 2.3.7. **F**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $2p$.

Montrer l'équivalence

$$(f^2 = 0 \text{ et } \operatorname{Rg} f = p) \Leftrightarrow (\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f).$$

EXERCICE 2.3.8. **F**
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}u$ où $u \in E \setminus \{0\}$. On écrit $f(x) = g(x)u$.
Montrer que $g \in E^*$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

---

3. Polynômes

3.1. Polynômes à une indéterminée.

EXERCICE 3.1.1. **F T** Chercher le coefficient de X^8 dans le polynôme $P = (1+2X-4X^2+8X^3)^5$

EXERCICE 3.1.2. **F** Montrer que les polynômes suivants sont des carrés :
$P = X^6 - 12X^5 + 60X^4 - 160X^3 + 240X^2 - 192X + 64$, $Q = X(X+a)(X+2a)(X+3a) + a^4$.

EXERCICE 3.1.3. **I** Montrer que : $P(X) - X \mid P(P(X)) - X$ où P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

EXERCICE 3.1.4. **F**
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \overline{z}$.

3.2. Fonctions polynomiales et rationnelles.

EXERCICE 3.2.1. **I C**
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :
$$P_0 = 1, P_1 = -X, P_{n+2} + XP_{n+1} + P_n = 0,\ (n \in \mathbb{N}).$$
Expliciter P_n et donner ses racines.

EXERCICE 3.2.2. **I**
On considère les 2 suites de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définies par :
$$a_0 = 0,\ b_0 = 1 \text{ et } \begin{cases} a_n(X) &= a_{n-1}(X) + Xb_{n-1}(X) \\ b_n(X) &= b_{n-1}(X) - Xa_{n-1}(X) \end{cases}$$

(1) Chercher les degrés de a_n et de b_n.
(2) En considérant la fraction rationnelle $y_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ et en substituant $\tan\alpha$ à X, chercher les racines de a_n et de b_n.
(3) On pose $z_n = a_n + ib_n$, calculer z_n en fonction de n, en déduire l'expression de a_n et de b_n.

Exercice 3.2.3. **I**
Restes des divisions euclidiennes de $P = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par :
a) $(X-3)(X-2)$ b)$(X-3)^2(X-2)^2$.

Exercice 3.2.4. **F C**
Chercher m pour que : $X^2 + X + 1 \mid (X+1)^m - X^m - 1$ (sur $\mathbb{C}$).

Exercice 3.2.5. **F**
Pour $i \in [1, p]$, on suppose que : $n_i \equiv i - 1[p]$; montrer alors que :

$$(1 + X + \cdots + X^{p-1}) \mid (X^{n_1} + X^{n_2} + \cdots + X^{n_p}).$$

Exercice 3.2.6. **F C**
Chercher n pour que $b|a$ avec $a = 1 - X^n + X^{2n} - X^{3n} + X^{4n}$ et $b = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4$.

Exercice 3.2.7. **F**
Sur $\mathbb{C}$, trouver tous les polynômes P tels que : $P' \mid P$.

Exercice 3.2.8. **F**
Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P - P' = X^n$.

Exercice 3.2.9. **F**
Décomposer en facteurs du premier degré les polynômes :
$P = (1+X)^m - e^{2ip\alpha}(1-X)^m$, $\dfrac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et
$Q = X^n - \binom{2n}{2}X^{n-1} + \cdots + (-1)^k\binom{2n}{2k}X^{n-k} + \cdots + (-1)^n\binom{2n}{2n}$ (penser à la trigonométrie).

Exercice 3.2.10. **F**
Racines du polynôme :

$$1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{X(X-1)(\cdots)(X-n+1)}{n!}.$$

Exercice 3.2.11. **I**
Chercher les coordonnées du polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ dans la base $((X-a)^m, m \in \mathbb{N})$ sachant que

(i) $\deg P = n$,
(ii) $nP = (X-a)P' + bP''$
(iii) $P^{(n)}(a) = 1$.

Exercice 3.2.12. $\boxed{\textbf{I}}$

(1) Établir les relations : $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(X-k)^n = n!$ (par récurrence sur n).

(2) En déduire que, pour $p<n$, on a : $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(X-k)^p = 0$.

(3) Si $\deg(P)\leqslant n$, donner une valeur pour : $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P(k)$.

Exercice 3.2.13. $\boxed{\textbf{F T}}$

(1) En développant $(1-X)^n$ et en le dérivant, montrer que 1 est racine d'ordre $n-k$ des polynômes : $P_k(X)=\sum\limits_{p=0}^{n}(-1)^p p^k\binom{n}{p}X^p$ ($k\in[\![0,n]\!]$) et que $P_k(X)=XP'_{k-1}(X)$.

(2) En déduire des expressions simples pour les sommes : $A_{n,k}=\sum\limits_{p=0}^{n}(-1)^p p^k\binom{n}{p}$.

Exercice 3.2.14. $\boxed{\textbf{I}}$

(1) Montrer que, si $\deg P\leqslant n-1$ alors $P(X)+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P(X+k)=0$.

(2) Prouver que $(1-x)^n$ divise $\Delta(x)=\begin{vmatrix}1 & x & \dots & x^n\\ 1 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & (n+1)^{n-1}\end{vmatrix}$ et calculer le quotient.

3.3. **Polynômes scindés.**

Exercice 3.3.1. $\boxed{\textbf{I C}}$

(1) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}, P(x)\geqslant 0$. Montrer qu'il existe 2 polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $P=A^2+B^2$.
(2) En déduire par récurrence sur $\deg P$ que si $P\in\mathbb{R}[X]$ et si, pour tout $x\geqslant 0$, $P(x)\geqslant 0$ alors il existe A, B, C, D 4 polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P=A^2+B^2+X(C^2+D^2)$.

Exercice 3.3.2. $\boxed{\textbf{F C}}$

Factoriser $(X+i)^n-(X-i)^n$ en déduire une expression de :

$$\Pi=\prod_{k=1}^{n}\left(4+\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Exercice 3.3.3. $\boxed{\textbf{I}}$

(1) Soit $P(x)=nx^n-x^{n-1}-\dots-x-1=0$ une équation algébrique sur $\mathbb{C}$. Montrer, en étudiant $(1-X)P$ que toutes les racines de P sont simples.
(2) Montrer que toutes ces racines, sauf 1, ont un module <1.

Exercice 3.3.4. $\boxed{\textbf{I C}}$

Soit $a_nx^n + \cdots + a_0 = 0$ une équation algébrique où les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$.

(1) Montrer que si $\dfrac{p}{q}$ est racine de cette équation et si $p \wedge q = 1$ alors $p|a_0$ et $q|a_n$.
(2) Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z}$, $p - mq|P(m)$.
(3) Décomposer en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{Q}[X]$ les polynômes suivants :
 a) $X^3 - X - 1$,
 b) $3X^3 - 2X^2 - 2X - 5$,
 c) $6X^4 + 19X^3 - 7X^2 - 26X + 12$.
(4) On suppose qu'il existe 2 entiers relatifs $m_1 \neq m_2$ tels que $|P(m_1)| = |P(m_2)| = 1$.
 a) Montrer que si $|m_1 - m_2| > 2$ alors P n'a pas de racine rationnelle.
 b) Montrer que si $|m_1 - m_2| \leqslant 2$ et si P a une racine rationnelle alors cette racine est nécessairement $\dfrac{m_1 + m_2}{2}$.

Exercice 3.3.5. $\boxed{\textbf{F C}}$

On suppose ici que $n = 2p + 1$.

(1) Montrer que les racines de l'équation $\binom{n}{1}x^p - \binom{n}{3}x^{p-1} + \cdots + (-1)^p = 0$ sont données par $x_k = \operatorname{cotan}^2 \dfrac{k\pi}{n}$, $k \in [1, p]$, en déduire $\sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{n}}$.
(2) À l'aide de l'inégalité $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$ pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, montrer que :
$$\frac{(n-1)(n-2)}{6} < \left(\frac{n}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{n}{2\pi}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{p\pi}\right)^2 < \frac{(n-1)(n+1)}{6}$$
En déduire $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k^2}$.

Exercice 3.3.6. $\boxed{\textbf{F C}}$

Soit l'équation $P(z) = z^4 - az^3 + bz^2 - cz + d = 0$, montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) les racines z_1, z_2, z_3, z_4 sont les sommets d'un parallélogramme,
(ii) il existe α complexe tel que $P(z + \alpha)$ soit bicarré,
(iii) P' et P''' ont une racine commune.

Exercice 3.3.7. $\boxed{\textbf{F C}}$

Déterminer α pour que les racines de $(1 + x)^n = \alpha(1 - x)^n$ soient : $i\operatorname{cotan}(\theta + \frac{k\pi}{n})$ où $\dfrac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

En déduire la valeur de $P = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \operatorname{cotan}(\theta + \frac{k\pi}{n})$.

Exercice 3.3.8. $\boxed{\textbf{I C}}$

En remarquant que : $\prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n}) = X^n - 1$, calculer :
$$\Pi_s = \prod_{k=0}^{n-1} \sin(x + k\pi/n) \text{ et } \Pi_c = \prod_{k=0}^{n-1} \cos(x + k\pi/n).$$

Exercice 3.3.9. **F C**
Trouver λ pour que l'équation : $x^4 - 2x^2 + \lambda x + 3 = 0$ ait 2 racines dont le produit soit 1. Résoudre alors l'équation.

Exercice 3.3.10. **F**
Simplifier l'expression

$$\Pi_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\exp\left(\frac{4ik\pi}{n}\right) - 2\cos\theta \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) + 1 \right).$$

3.4. **Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$.**

Exercice 3.4.1. **F T**
Chercher :

$$(X^7 - 2X^5 - 5X^4 + 3X^3 + 2X - 5) \wedge (X^5 + X^4 + 3X^3 - 3X^2 - 3X - 5)$$

Exercice 3.4.2. **F**
Montrer que les polynômes P et Q sont premiers entre eux ssi $P+Q$ et PQ le sont.

Exercice 3.4.3. **I**
Soient P et Q 2 polynômes, trouver tous les polynômes R tels que chacun des 3 polynômes P, Q, R divise le produit des 2 autres.

Exercice 3.4.4. **I C**

(1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. Montrer que si P a exactement k racines distinctes alors $P \wedge P'$ est de degré $n-k$.
(2) Le résultat précédent est-il vrai dans $\mathbb{R}[X]$?
(3) Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n tels que $P'|P$ avec $P(1) = 0$ et $P(0) = 1$.

Exercice 3.4.5. **I T**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer qu'il existe un unique couple de polynômes (P, Q) de degré $< n$ tel que $(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1$.
(2) Montrer que $P(X) = Q(1-X)$ et $Q(X) = P(1-X)$.
(3) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $(1-X)P'(X) - nP(X) = kX^{n-1}$.
(4) Donner les coefficients de P.

3.5. **Étude locale d'une fraction rationnelle.**

EXERCICE 3.5.1. **F T**
Décomposer sur $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles :

$$\text{a) } \frac{X^2}{X^4 - 2X^2\cos\alpha + 1} \quad \text{b) } \frac{X^{2m}}{X^{2n}+1}(m < n).$$

EXERCICE 3.5.2. **F**
Si on pose $\alpha_k = e^{2ik\pi/n}$, vérifier que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \alpha_k} = \frac{nX^{n-1}}{X^n - 1}, \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - \alpha_k} = \frac{n}{X^n - 1}.$$

EXERCICE 3.5.3. **F**
Soit $S = X + 3X^2 + 5X^3 + \cdots + (2n-1)X^n$. En comparant S et XS, mettre S sous forme d'une fraction rationnelle. Calculer $S\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)$ et en déduire une identité remarquable.

EXERCICE 3.5.4. **I**
Si $p = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ et $q = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ décomposer sur $\mathbb{R}$:

$$F = \frac{\sum\limits_{k=0}^{q} (-1)^k \binom{n}{2k+1} X^{2k+1}}{\sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{2k}}.$$

(Penser aux formules donnant $\cos n\alpha$ et $\sin n\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.)

EXERCICE 3.5.5. **I TC**
On suppose que α, β, γ et a, b, c sont des complexes tous distincts.
Déterminer (x, y, z) tels que :

$$\begin{aligned} \frac{x}{a-\alpha} + \frac{y}{a-\beta} + \frac{z}{a-\gamma} &= 1 - a^2 \\ \frac{x}{b-\alpha} + \frac{y}{b-\beta} + \frac{z}{b-\gamma} &= 1 - b^2 \\ \frac{x}{c-\alpha} + \frac{y}{c-\beta} + \frac{z}{c-\gamma} &= 1 - c^2 \end{aligned}$$

(Utiliser $F(X) = X^2 - 1 + \dfrac{x}{X-\alpha} + \dfrac{y}{X-\beta} + \dfrac{z}{X-\gamma}$).

EXERCICE 3.5.6. **F TC**
Calculer $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$

EXERCICE 3.5.7. **F C**

Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{n!}{X(X+1)(\dots)(X+n)}$ et en déduire la formule

$$\sum_{p=1}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}\frac{1}{p}=-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}.$$

EXERCICE 3.5.8. **F C**

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$. En considérant la fraction $\left(\dfrac{P'(X)}{P(X)}\right)'$, montrer que si les racines de P sont réelles et simples alors le polynôme $Q=P'^2-PP''$ n'a pas de racine réelle.

EXERCICE 3.5.9. **D T**

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré n et $a_1<a_2<\ldots<a_n$ les racines simples de P, $n\geqslant 3$.

(1) Montrer que les racines de P' sont toutes simples, on les écrit $b_1<b_2<\ldots<b_{n-1}$.

(2) On pose $\delta_i=a_{i+1}-a_i$, montrer, en décomposant la fraction $\dfrac{P'}{P}$ en éléments simples, que $a_i+\dfrac{\delta_i}{n}<b_i<a_{i+1}-\dfrac{\delta_i}{n}$.

EXERCICE 3.5.10. **D**

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, $a<c<b$, on suppose que $P-a$ et $P-b$ sont scindés.

Montrer que $P-c$ est scindé. On pourra pour cela étudier la fraction rationnelle $\dfrac{P'.(P-c)}{(P-a)(P-b)}$, écrire $c=ta+(1-t)b$ et utiliser l'exercice 3.4.4.

---

4. Calcul matriciel

4.1. Opérations sur les matrices.

EXERCICE 4.1.1. **F**

Calculer les inverses de :

$$A=\begin{pmatrix}1&a&\cdots&a^n\\0&1&\cdots&a^{n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\0&1&\cdots&n-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\ C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{pmatrix}$$

(pour A et B, on fera intervenir $J=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$).

EXERCICE 4.1.2. **F**

Soit : $M_{(x,y,z,t)} = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix}$

Calculer :

$$M_{(x,y,z,t)} M^{\mathrm{T}}_{(x,y,z,t)},$$

en déduire que : M est inversible ssi $(x,y,z,t) \neq (0,0,0,0)$.
Mettre M sous la forme : $xI_4 + N$, calculer les puissances de N.
En déduire : M^n pour $n \in \mathbb{Z}$ (en prenant la convention $M^0 = I_4$).

EXERCICE 4.1.3. **I C**

Si $A = (a_{ij})$ matrice d'ordre n à coefficient dans un corps $\mathbb{K}$ sous corps de $\mathbb{C}$. On pose : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (appelé trace de A).

(1) Montrer que : $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; : \; \mathrm{Tr}((AB)^n) = \mathrm{Tr}((BA)^n)$.
(2) Montrer que, si : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$ alors $A = B$.
(3) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ et si φ vérifie $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ alors il existe un scalaire λ tel que $\varphi = \lambda\,\mathrm{Tr}$.

EXERCICE 4.1.4. **I**

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+4y \end{pmatrix}$.
Montrer que $\{M(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \simeq \mathbb{C}$ (morphisme de corps).

EXERCICE 4.1.5. **F C**

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est magique ssi les 8 sommes

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}, \; \sum_{i=1}^{3} a_{ij}, \; \sum_{i=1}^{3} a_{ii}, \; \sum_{i=1}^{3} a_{i4-i}$$

sont égales. Leur valeur commune est notée s.

(1) Trouver toutes les matrices magiques antisymétriques puis toutes les matrices magiques symétriques (on commencera par celles correspondant à $s = 0$).
(2) En déduire la forme de toutes les matrices magiques.

EXERCICE 4.1.6. **F T** Matrices permutant avec une matrice donnée.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, A non scalaire. Montrer que toutes les matrices permutant avec A sont de la forme $\lambda I_2 + \mu A$.

4.2. **Matrices et applications linéaires.**

EXERCICE 4.2.1. **I**

En vous inspirant du , résoudre l'équation matricielle $X^2 = I_n$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Application à la résolution de l'équation :

$$X^2 - 3X + 2I_n = 0$$

sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comment alors résoudre $aX^2 + bX + cI_n = 0$ d'une manière plus générale (en supposant $b^2 - 4ac > 0$) ?

EXERCICE 4.2.2. **I**

Calculer l'inverse de la matrice triangulaire inférieure $T = (t_{ij})$ où $t_{ij} = \binom{i-1}{j-1}$ pour $i \geqslant j$.

EXERCICE 4.2.3. **F C** <u>Endomorphismes nilpotents.</u>

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n$, on dit que u est nilpotent ssi il existe p supérieur à 2 tel que $u^p = 0$; la matrice associée sera dite elle aussi nilpotente.

(1) Soit p le plus petit entier vérifiant $u^p = 0$, montrer que $p \leqslant n$. Si $p = n$, montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \end{pmatrix}$.

(2) Montrer que si A est nilpotente alors $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

EXERCICE 4.2.4. **F**

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de la composée de l'homothétie de rapport 5 et de la projection sur le plan d'équation $x + y + 2z = 0$ parallèlement à la droite dirigée par le vecteur (1,2,1).

EXERCICE 4.2.5. **F**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ et trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un terme non nul.
Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 4.2.6. **F C**

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|.$$

Montrer que A est inversible.

4.3. **Rang d'une matrice.**

Exercice 4.3.1. $\boxed{\textbf{I C}}$
Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, telles que : $AB=0$ et $A+B$ inversible.
Montrer que :
$$\mathrm{Rg}(A)+\mathrm{Rg}(B)=n.$$

Exercice 4.3.2. $\boxed{\textbf{F}}$
On pose : $A=\begin{pmatrix}0 & p_1 & \cdots & p_n\\ p_1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$ où les p_i sont des nombres complexes.
Quel est le rang de A^2 ?

Exercice 4.3.3. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer que A peut s'écrire comme la somme de r matrices de rang 1.

Exercice 4.3.4. $\boxed{\textbf{I C}}$
Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^{n+1}=0$, montrer que $M^n=0$.

4.4. **Systèmes d'équations linéaires.**

Exercice 4.4.1. $\boxed{\textbf{I T}}$
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, étudier le système d'inconnues : x,y,z
$$\begin{cases}(b+c)x+(bc-1)y+(1+b^2)(1+c^2)z=a\\(c+a)x+(ca-1)y+(1+c^2)(1+a^2)z=b\\(a+b)x+(ab-1)y+(1+a^2)(1+b^2)z=c.\end{cases}$$

Exercice 4.4.2. $\boxed{\textbf{F T}}$
En considérant (a,b,c) comme un point de $\mathbb{R}^3$, résoudre :
$$\begin{cases}ay+bz+ct &=a+b+c\\ax+cz+bt &=a\\bx+cy+at &=b\\cx+by+az &=c\end{cases}$$

Exercice 4.4.3. $\boxed{\textbf{I T}}$
Résoudre les systèmes
$$\begin{cases}ax+by+t &=a+b\\bx+ay+\quad+z &=a-b\\\qquad y+bt+az &=a+1\\x+\qquad at+bz &=a-1\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y+z &=a+b+c\\\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} &=1\\\dfrac{x}{a^2}+\dfrac{y}{b^2}+\dfrac{z}{c^2} &=\dfrac{1}{a+b+c}\end{cases}$$

---

5. Déterminants

5.1. Groupe symétrique.

Exercice 5.1.1. $\boxed{\textbf{I C}}$
Soit $c = [a_1, a_2, \ldots, a_p]$ le cycle de $\mathfrak{S}_n$ défini par : $c(a_i) = a_{i+1}, c(a_p) = a_1$.

(1) Montrer que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a : $\sigma[a_1, a_2, \ldots, a_p]\sigma^{-1} = [\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_p)]$.
(2) Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les 2 permutations : $(1, 2)$, $(1, 2, \ldots, n)$.
(3) Montrer que le produit de 2 transpositions peut s'écrire comme un produit de cycle(s) d'ordre 3. En déduire que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les cycles d'ordre 3.

Exercice 5.1.2. $\boxed{\textbf{I C T}}$
On appelle *birapport* de $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$ le nombre :

$$B(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} : \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \lambda$$

(1) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, donner les différentes valeurs prises par $B(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, x_{\sigma_3}, x_{\sigma_4})$ en fonction de λ selon les différentes valeurs de σ.
(2) On fait apparaître ci-dessus des fonctions du paramètre λ ; montrer que, dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, elles forment un groupe pour la loi de composition des applications ; à quoi est-il isomorphe?

Exercice 5.1.3. $\boxed{\textbf{I}}$
Étudier la parité de : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ n & n+1 & n-1 & n+2 & n-2 & \ldots & 2n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.1.4. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient $n \geqslant 5$, (a, b, c), (a', b', c') 2 cycles d'ordre 3 dans $\mathfrak{S}_n$. Montrer qu'il existe une permutation σ paire telle que : $\sigma(a, b, c)\sigma^{-1} = (a', b', c')$.

Exercice 5.1.5. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $n \geqslant 3$, chercher l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ commutant avec tous les éléments de $\mathfrak{S}_n$.

5.2. Déterminants.

Exercice 5.2.1. $\boxed{\textbf{F T C}}$
Calculer les déterminants :

$$A_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix}, \quad B_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & 2\cos\theta \end{vmatrix}, \quad C_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots \\ 0 & \ddots & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

Exercice 5.2.2. **I T**

Calculer : $\Pi = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + 2e^{2ik\pi/n} + \cdots + ne^{2i(n-1)k\pi/n}\right)$, en déduire :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 5.2.3. **D C**

Soit $D = \begin{vmatrix} r_1 & & b \\ & \ddots & \\ a & & r_n \end{vmatrix}$ où a, b, r_i sont des réels. On appelle $D(x)$ le déterminant obtenu à partir de D en ajoutant x à chacun de ses éléments.

(1) Montrer que $D'(x)$ est constant.
(2) Si $a \neq b$ en déduire l'expression développée de D (utiliser $\omega(x) = (r_1 - x)(\ldots)(r_n - x)$).
(3) Étudier le cas où $a = b$.

Exercice 5.2.4. **D T**

Soit Δ le déterminant $\det(1 + (x_i)^j)$.
Si $(i, j) \in [0, n]^2$, calculer Δ.
Si $(i, j) \in [1, n]^2$, montrer que $\Delta = \left[2\prod_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n}(x_k - 1)\right] D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le déterminant de Vandermonde de x_1, x_2,... x_n.

Exercice 5.2.5. **I C**

Calculer le déterminant dont la $(k+1)^{\text{ième}}$ ligne s'écrit :

$$1 \quad \cos a_k \quad \ldots \quad \cos(na_k)$$

on utilisera les déterminants de Vandermonde.

Exercice 5.2.6. **I T**

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 5.2.7. **I C**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré k. On suppose que $n \geqslant k+2$. En étudiant l'application $\Delta : P \in \mathbb{C}[X] \mapsto Q$ où $Q(X) = P(X+1) - P(X)$, déterminer la valeur de l'expression

$$D = \begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \ldots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \ldots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \ldots & P(2n-1) \end{vmatrix}$$

Exercice 5.2.8. **F**
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec $n > p$.
Calculer $\det(AB)$.

Exercice 5.2.9. **I**
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ définie par $\varphi(M) = M^{\mathrm{T}}$.
Calculer $\det(\varphi)$.

1. Indications :

Indication 1.1.1 ϕ n'est ni injective ni surjective.

Indication 1.1.2 Résoudre l'équation différentielle.

Indication 1.1.3 La première égalité est fausse (prendre 3 droites dans le plan), la deuxième est vraie.

Indication 1.1.4 L'un est inclus dans l'autre (cf. exo sur les groupes).

Indication 1.1.5 Écrire la décomposition de $x \in T'$ sur $S+T$ et sur $S+T'$.

Indication 1.1.6 E n'est pas un espace vectoriel.

Indication 1.2.1 Soit H_i les plans d'équation $z = h_i(x,y)$, R_i les demi-espaces fermés de frontière H_i définis par $z \geqslant h_i(x,y)$. E est le polyèdre intersection des R_i. On note $F_i = E \cap H_i$ face associée à H_i, $I = [1,n]$ et on définit $\Phi\ : M \in \mathcal{E}_3 \mapsto z$. On veut prouver que Φ atteint son minimum sur E.
(i) Montrer que $\inf \Phi(E) = \min_{i\in I}(\inf \Phi(F_i))$.
(ii) Montrer que $\inf \Phi(F_i) = \min_j \inf \Phi(C_{ij})$ où C_{ij} est une arête de la face F_i définie comme suit : $C_{ij} = F_i \cap \Delta_{ij}$ où Δ_{ij} est la frontière d'un demi-plan de H_i obtenu comme l'intersection de R_j et de H_i.
(iii) Recommencer la même chose avec les sommets pour obtenir $\inf \Phi(E) = \min \Phi(S_{ijk})$ où les S_{ijk} sont les sommets de E.

Indication 1.2.2 Prendre h l'homothétie de centre I (isobarycentre de ABC) et de rapport -1/2 h' l'homothétie de centre O qui transforme en (P) le plan (ABC). Les droites AA'', BB'' et CC'' sont parallèles ou concourantes.

Indication 1.2.3 Choisir un repère affine tel que $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$, $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$ et poser $\overrightarrow{AA'} = \alpha\,\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BB'} = \beta\,\overrightarrow{u}, \overrightarrow{CC'} = \gamma\,\overrightarrow{u}$.

Indication 1.2.4 On choisit un repère tq $D(y=b, z=0)$, $D'(z=c, x=0), D''(x=a, y=0)$, on trouve $P_\lambda(\lambda a, b, 0)$ et $M'(0, b/(1-\lambda), c)$, $M''(a, 0, (1-1/\lambda)c)$ d'où $\lim\limits_{\lambda\to 0} P_\lambda = (0,b,0)$.

Indication 1.2.5 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} \in G$ et bien sûr $F \subset G$, $\Leftarrow$ $\mathcal{F} = A + F$ donc $A + F \subset A + G = B + \overrightarrow{BA} + G = B + G$ donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Indication 1.2.6

(1) L'intersection d'une famille de parties convexes est une partie convexe.
(2) On note $B(A)$ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de A.
Montrer que $B(A) \supset \operatorname{Conv}(A)$ en prouvant que $B(A)$ est une partie convexe. Pour l'inclusion inverse, soit C un ensemble convexe contenant A, montrer qu'il contient $B(A)$ en prouvant par récurrence sur k qu'il contient tous les barycentres positifs des $(A_1, \dots, A_k)$.

Indication 1.3.1 $(\Rightarrow)$ Écrire $f(p(E)) \subset p(f(E)) \subset p(E)$ et $p(x) = 0 \Rightarrow p(f(x)) = 0$.
$(\Leftarrow)$ Écrire $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.

Indication 1.3.2 Prouver que $E = E_1 + E_2 + E_3$ et utiliser les relations $h_i \circ h_j = 3\delta_{ij} h_i$.

Indication 1.3.3 Utiliser les inclusions $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ et $f^2(E) \subset f(E)$.

Indication 1.3.4

(1) Il suffit de prendre $\lambda = (b-a)^{-1}$, $\mu = -\lambda$.
(2) Par récurrence, on obtient $f^n = b^n p + a^n q$.
(3) La relation du 2. est valable même si n est négatif.

Indication 1.3.5 Montrer que $p \circ u^{n-k+h} \circ p = u^{n-k+h} \circ p$ et en conclure que $q^2 = q$ puis, avec $\operatorname{Im} q \subset E$ et $\forall x \in E\ : q(x) = x$, que $\operatorname{Ker} q$ est supplémentaire de E.

Indication 1.3.6 (1) immédiat, (2) prendre $u_1(P)(x) = \int_0^\infty t^2 e^{-t} P(t)\,\mathrm{d}t$, $u_2(P)(x) = x\int_0^\infty te^{-t}P(t)\,\mathrm{d}t$, $u_3(P)(x) = x^2\int_0^\infty e^{-t}P(t)\,\mathrm{d}t$, (3) $U = \{(a,b,c)/abc \neq 0\}$.

Indication 1.3.7 Distinguer les 2 cas : il existe i_1 tel que $F_{i_1} = F$, $F_{i_1} \neq F$, dans le deuxième cas, prendre l'intersection $F_{i_1} \cap F_i$ avec les autres F_i et raisonner sur les dimensions.

Indication 1.3.8 Par l'absurde, $f(x)g(y) \neq 0$ et calculer $f(x+y)g(x+y)$.

Indication 1.3.9
(1) Distinguer les cas $u = 0$ et $u \neq 0$, (2) utiliser la formule du double produit vectoriel.

Indication 2.1.1

(1) Par récurrence et par l'absurde, on montre que l'équation $a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n x'^{\alpha_n-\alpha_1} = 0$ a une infinité de solutions.
(2) Se ramener au (1) avec $x = f(y)$.
(3) $g(]-1,+\infty[) = [-1,1]$ on utilise alors le (2).

Indication 2.1.2
On a $f = \lambda\,\mathrm{Id} + \mu p_u$ où p_u désigne une projection sur la droite engendrée par u.

Indication 2.1.3 Utiliser $F' \cap G \subset F' \cap (F \cap G)$ et si $x = y + z \in E = F + G$, écrire $y = y_1 + y_2$ où $y_1 \in F'$ et $y_2 \in F \cap G$.

Indication 2.1.4

(1) $\Rightarrow$ Écrire $w = \lambda u + \mu v$, $v \in \mathrm{Vect}(u,w)$ et distinguer les cas $(\mu,\mu') \neq (0,0)$ et $\mu = \mu' = 0$.
$\Leftarrow$ $\gamma \neq 0 \Rightarrow w \in \mathrm{Vect}(u,v)$, $\beta \neq 0 \Rightarrow v \in \mathrm{Vect}(u,w)$.
(2) Écrire que $F + \mathrm{Vect}(u,v) = F + \mathrm{Vect}(u,w)$.

Indication 2.2.1 Établir l'isomorphisme de $\mathcal{P}_{n-2}$ sur $\mathcal{Q}$ qui à $P \in \mathcal{P}_{n-2}$ fait correspondre $(X^2+Y^2)P \in \mathcal{Q}$ et vérifier ensuite que les polynômes $P_1 = (X+iY)^n$ et $P_2 = (X-iY)^n$ sont dans $\mathcal{H}$ et qu'ils forment une famille libre. Prouver ensuite que $\dim \mathcal{H} = 2$.

Indication 2.2.2 $P(x+a_k) = \sum_{h=0}^n \frac{a_k^h}{h!} P^{(h)}(x)$, si $\lambda_0 P(x+a_0) + \cdots + \lambda_n P(x+a_n) = 0$ alors remplacer les $P(x+a_k)$ et utiliser Vandermonde.

Indication 2.2.3 $\Big((2,1,-3)\Big)$ est une base.

Indication 2.2.4 $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ et écrire le système, la famille est libre.

Indication 2.3.1

(1) Utiliser le fait que la suite $k_p = \dim \mathrm{Ker}\, u^p$ est croissante et majorée.
(2) Remarquer que $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, u^p + \dim \mathrm{Im}\, u^p$.
(3) Si $x \in \mathrm{Ker}\, u^k \cap \mathrm{Im}\, u^k$ alors $\exists y \in E\ : x = u^k(y)$ et $u^{2k}(y) = 0$.

Indication 2.3.2 Montrer que $p \circ q = -q \circ p$, puis écrire $p \circ q = p^2 \circ q = -p \circ q \circ p$.
$\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$ et, si $z = p(x) + q(y) \in \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$, alors $(p+q)(z) = p^2(x) + q^2(y) = z$.
Utiliser la première question pour montrer que $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q = \{0\}$.
$\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}(p+q)$ et si $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$ alors $p(x) = (p^2 + p \circ q)(x) = 0$.

Indication 2.3.3 Prendre $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\, f$ que l'on complète en une base de E.

Indication 2.3.4 Appliquer la formule du rang à $f_1 = f_{|\,\mathrm{Ker}(g\circ f)}$.

Indication 2.3.5

(1) Montrer que $\mathrm{Rg}(f+g) \leqslant \mathrm{Rg}\, f + \mathrm{Rg}\, g$ et l'appliquer à $f+g$ et $-g$, puis à $f+g$ et $-f$.
(2) Avec $f \circ g = 0$ montrer que $\mathrm{Rg}(f) + \mathrm{Rg}(g) \leqslant n$ puis conclure grâce à $(f+g)(E) \subset f(E) + g(E)$.

Indication 2.3.6 Prendre $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et $F' = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}')$ et rajouter à la famille $\mathcal{F}'$ les $n-r$ vecteurs restant de la famille $\mathcal{F}$.

Indication 2.3.7 $\Rightarrow$ montrer que $\dim \mathrm{Ker}\, f = p$, $\Leftarrow$ immédiat.

Indication 2.3.8 $g \in E^*$ immédiat, on trouve ensuite $\lambda = g(u)$.

Indication 3.1.1 On trouve 8960.

Indication 3.1.2 On trouve $P = (X^3 - 6X^2 + 12X - 8)^2$ et $Q = (X^2 + 3aX + a^2)^2$.

Indication 3.1.3 Montrer que $P(X)^k - X^k$ est divisible par $P(X) - X$ puis additionner.

Indication 3.1.4 Montrer que $P = X$ puis trouver une contradiction.

Indication 3.2.1 Étudier la suite récurrente double (p_n) : $p_{n+2} = -xp_{n+1} - p_n$ et prouver que $p_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}\delta}\left[(x+\delta)^{n+1} - (x-\delta)^{n+1}\right]$ où $\delta^2 = x^2 - 4$.
Poser $x = 2\cos\theta$ pour trouver les racines qui sont les $x_k = 2\cos\theta_k$, pour $k \in [1, n]$, $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$.

Indication 3.2.2

(1) On trouve $\deg a_n = 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1$ et $\deg b_n = 2\left[\frac{n}{2}\right]$.
(2) On a $y_n(\tan\alpha) = \tan(n\alpha)$ par récurrence sur n. Les racines de a_n sont $x_k = \tan\frac{k\pi}{n}$, celles de b_n sont $x'_k = \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}$.
(3) On a $z_n = i(1 - iX)^n$.

Indication 3.2.3 (a) Le reste R est égal à -1, (b) $R = \frac{n}{5}(-X^3 + 13X^2 - 46X + 48)$.

Indication 3.2.4 Faire intervenir j, on trouve $X^2 + X + 1 \mid P \Leftrightarrow m \equiv \pm 1[6]$.

Indication 3.2.5 Utiliser la relation $(1 + X + \cdots + X^{p-1})(1 - X) = 1 - X^p$.

Indication 3.2.6 Faire intervenir les racines cinquièmes de l'unité, $n \not\equiv 0\ [5] \Leftrightarrow b \mid a$.

Indication 3.2.7 On trouve $P = \lambda(X + a)^n$.

Indication 3.2.8 Dériver la relation plusieurs fois et ajouter.

Indication 3.2.9
Pour P on résout $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m = e^{2ip\alpha}$ d'où $P = [1 + (-1)^{m+1}e^{2ip\alpha}]\prod_{k=0}^{m-1}(X - i\tan\theta_k)$.
Pour Q, on écrit que $\cos(2n\theta) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}\cos^{2n-2k}\theta\sin^{2k}\theta = \sin^{2n}\theta\, Q(\operatorname{cotan}^2\theta)$ d'où $Q = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \operatorname{cotan}^2\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)$.

Indication 3.2.10 Par récurrence on a : $P_n(X) = (1 - X)(1 - \frac{X}{2})(\ldots)(1 - \dfrac{X}{n})$.

Indication 3.2.11 Dériver plusieurs fois (ii) pour obtenir $P^{(n-2k)}(a) = \frac{b^k}{2^k k!}$, $P^{(n-2k+1)}(a) = 0$ et utiliser la formule de Taylor. On obtient $P = \frac{(X-a)^n}{n!} + \frac{b(X-a)^{n-2}}{2(n-2)!} + \cdots + \frac{b^k(X-a)^{n-2k}}{2^k k!(n-2k)!} + \cdots$.

Indication 3.2.12

(1) & 2. Procéder par récurrence sur n avec $F(p) = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}(X - k)^{p+1}$, on trouve $F_{n+1}(p) = (n + 1)F_n(p)$.
3 Faire $X = 0$ dans la relation du 2.

Indication 3.2.13

(1) Procéder par récurrence sur k.
(2) $A_{n,k} = P_k(1) = 0$ si $k < n$, si $k = n$ alors on trouve $(-1)^n n!$.

Indication 3.2.14

(1) Poser $\Delta(P)(X) = P(X) - P(X + 1)$ et calculer $\Delta^n(P)(X)$.
(2) Multiplier la $(k + 1)^{\text{ième}}$ colonne par $(-1)^k\binom{n}{k}$ et additionner tout dans la première colonne, le quotient vaut $\prod_{k=1}^{n-1} k^{n-k}$.

Indication 3.3.1

(1) Écrire $P(X) = \lambda\prod_{i=1}^{k}(X - x_i)^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{m}[(X - u_j)^2 + v_j^2]$ puis montrer que $\lambda > 0$, les α_i sont pairs et écrire le deuxième terme du produit en faisant intervenir $R(X) = \prod_{j=1}^{m}[(X - u_j) + iv_j]$.
(2) Distinguer les cas P toujours positif (et utiliser le (1)), P admet une racine d'ordre impair négative et utiliser la récurrence.

Indication 3.3.2
On a $(X+i)^{n+1}-(X-i)^{n+1}=2(n+1)i\prod_{k=1}^{n}(X-\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n+1})$ et avec $X=2i$, $\Pi=\frac{(3^n-1)^2}{4(n+1)^2}$.

Indication 3.3.3
(1) $(1-x)P(x)=Q=-nx^{n+1}+(n+1)x^n-1$ et $Q'=-n(n+1)x^n(x-1)$.
(2) Si x est racine de P alors $n|x|^n\leqslant 1+|x|+\cdots+|x|^{n-1}$ et montrer que si $x\neq 1$ alors on ne peut avoir égalité.

Indication 3.3.4
(1) On a : $a_np^n+\cdots+a_1pq^{n-1}=-a_0q^n$.
(2) $q^nP(m)=a_1q^{n-1}(mq-p)+\cdots+a_n[(mq)^n-p^n]$ et chaque terme de la somme est divisible par $mq-p$.
(3) (a) X^3-X-1 n'a pas de racine rationnelle.
(b) $\frac{5}{3}$ est la seule racine rationnelle.
(c) $\frac{1}{2}$ et -3 sont les seules racines rationnelles.
(4) (a) $p-m_1q|P(m_1)$ et $p-m_2q|P(m_2)$ donc $p-m_1q=-1$ et $p-m_2q=1$, si $|m_1-m_2|>2$ alors obtenir une contradiction.
(b) $p-m_1q=-1$ et $p-m_2q=1$ et faire la somme.

Indication 3.3.5
(1) Écrire que $\sin n\alpha=\sin^n\alpha\left[\binom{n}{1}\operatorname{cotan}^{n-1}\alpha-\binom{n}{3}\operatorname{cotan}^{n-3}\alpha+\cdots+(-1)^p\binom{n}{n}\right]$ et poser $x=\operatorname{cotan}^2\alpha$, utiliser ensuite les relations entre coefficients et racines.
(2) Élever au carré les inégalités et prendre les inverses avec $\alpha=\frac{k\pi}{n}$.

Indication 3.3.6
$(i)\Leftrightarrow(ii)$: poser α le centre du parallélogramme et $Z=z-\alpha$, réciproque est immédiate.
$(ii)\Rightarrow(iii)$: $P(z+\alpha)=z^4-\beta z^2+\gamma$, alors $P'(z+\alpha)$ et $P'''(z+\alpha)$ ont 0 comme racine commune.
$(iii)\Rightarrow(ii)$ si α est la racine commune, alors $P'''(z)=24(z-\alpha)$ et on intègre.

Indication 3.3.7 On trouve $\alpha=(-1)^ne^{-2in\theta}$. Le produit des racines vaut $(-1)^p$ si $n=2p$, $(-1)^p\operatorname{cotan}((2p+1)\theta)$ si $n=2p+1$.

Indication 3.3.8 Les deux polynômes ont les mêmes racines toutes simples et ils ont même coefficient dominant.
Écrire $\sin(x+k\pi/n)=\frac{e^{2ik\pi/n}-e^{-2ix}}{2ie^{-ix}e^{ik\pi/n}}$ et remplacer X par e^{-2ix} dans la relation polynomiale. On obtient $\Pi_s=\frac{\sin nx}{2^{n-1}}$. De même, $\Pi_c=\frac{\sin(nx+n\pi/2)}{2^{n-1}}$.

Indication 3.3.9 Écrire les relations entre coefficients et racines, avec $p_1=1$, on a $p_2=3$, $s_1^2=6$ et $\lambda=\pm2\sqrt{6}$. Les racines sont $\varepsilon\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$, $\varepsilon\frac{\sqrt{6}}{2}(1\pm i)$ où $\varepsilon=\mp1$.

Indication 3.3.10 Utiliser $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right)=x^n-1$, on obtient $\Pi_n=2(1-\cos n\theta)$.

Indication 3.4.1 $(X^7-2X^5-5X^4+3X^3+2X-5)\wedge(X^5+X^4+3X^3-3X^2-3X-5)=X^2+X+1$.

Indication 3.4.2
$(\Rightarrow)$ $P\wedge P+Q=1$, $Q\wedge P+Q=1$, $(\Leftarrow)$ si $D=P\wedge Q$ alors D divise $P+Q$ et PQ.

Indication 3.4.3 Soit $D=P\wedge Q$, écrire $P=P'D$, $Q=Q'D$ pour obtenir $R=KP'Q'$ puis montrer que $K|D^2$.

Indication 3.4.4
(1) Écrire $P=\lambda\prod_{j=1}^{k}(X-a_j)^{\alpha_j}$ et $P'=\lambda'\prod_{j=1}^{k}(X-a_j)^{\alpha_j-1}R$.
(2) Le résultat est faux sur $\mathbb{R}$.
(3) $P=(1-X)^n$.

Indication 3.4.5
(1) C'est la relation de Bézout améliorée.
(2) Conséquence immédiate de l'unicité de P et Q.

(3) Dériver la relation du (2), montrer que X^{n-1} divise le polynôme $-nP(X)+(1-X)P'(X)$ et raisonner sur les degrés.

(4) $P(X)=\sum\limits_{j=0}^{n-1}\binom{j-1+n}{n-1}X^j$.

Indication 3.5.1 $\frac{X^2}{X^4-2X^2\cos\alpha+1}=\frac{1}{4i\sin\alpha/2}\left[\frac{1}{X-e^{i\alpha/2}}-\frac{1}{X+e^{i\alpha/2}}-\frac{1}{X-e^{-i\alpha/2}}+\frac{1}{X+e^{-i\alpha/2}}\right]$,
$\frac{X^{2m}}{X^{2n}+1}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{x_k^{2m+1}}{X-x_k}$ avec $x_k=e^{i(2k+1)}\frac{\pi}{2n}$.

Indication 3.5.2 Décomposer les fractions rationnelles.

Indication 3.5.3 $XS-S=\frac{X}{X-1}[2(n-1)X^{n+1}-2nX^n+X+1]$,
$S\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)=\frac{2(2n+1)}{(2n-1)^{n+3}}(2n(2n-1)^n-2n+1)^n)$.

Indication 3.5.4 Écrire $F(\tan\theta)=\tan n\theta$ les pôles sont donnés par $x_k=\tan\theta_k$ où $\theta_k=(2k+1)\frac{\pi}{2n}$, $k\in[-p,p-1]$. On obtient la décomposition $F=E-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\frac{1}{X-\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$ où $E=0$ si $n=2p$ et $E=\dfrac{X}{n}$ si $n=2p+1$.

Indication 3.5.5 Écrire $F(X)=\frac{(X-a)(X-b)(X-c)(X^2+\lambda X+\mu)}{(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)}$ et exprimer que $F(a)=F(b)=F(c)=0$. Poser $P(X)=(X-a)(X-b)(X-c)(X^2+\lambda X+\mu)$, $Q(X)=(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ on a alors $x=\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$, $y=\frac{P(\beta)}{Q'(\beta)}$, $z=\frac{P(\gamma)}{Q'(\gamma)}$.

Indication 3.5.6 Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+1)(X+2)(X+3)}$, on trouve $S_n=\frac{1}{18}-\frac{1}{6(n+1)}+\frac{1}{3(n+2)}-\frac{1}{6(n+3)}$.

Indication 3.5.7 $\frac{n!}{X(X+1)(\dots)(X+n)}=\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p\binom{n}{p}}{X+p}$, puis faire passer $\dfrac{1}{X}$ dans l'autre membre.

Indication 3.5.8 $\left(\frac{P'}{P}\right)'=\frac{Q}{P^2}$ et montrer que $(\frac{P'(x)}{P(x)})'>0$.

Indication 3.5.9

(1) Appliquer le théorème de Rolle.

(2) Supposer P unitaire et écrire la décomposition de $\frac{P'}{P}$ de 2 façons pour obtenir la relation $1=\frac{n\prod_{i=1}^{n-1}(a_k-b_i)}{\prod_{i\neq k}(a_k-a_i)}$, en déduire que $\frac{a_k-b_i}{a_k-a_{i+1}}<1$, pour obtenir la deuxième inégalité, remplacer k par $k+1$ dans la relation.

Indication 3.5.10 Soit $f(x)=\dfrac{P'(x).(P(x)-c)}{(P(x)-a).(P(x)-b)}$, montrer que $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{h+k}\dfrac{\gamma_i}{x-\delta_i}$ où $\gamma_i>0$, étudier alors f et utiliser l'exercice 3.4.4.

Indication 4.1.1 Écrire $A=I_n+aJ+\cdots+a^nJ^n$, $A^{-1}=(I_n-aJ)$.
Écrire $B=I_n+2J+\cdots+nJ^{n-1}$, $B^{-1}=(I-J)^2=I-2J+J^2$.
Résoudre le système $CX=Y$, $C^{-1}=\frac{1}{4}\overline{C}$.

Indication 4.1.2 $M_{(x,y,z,t)}M_{(x,y,z,t)}^{\mathrm{T}}=(x^2+y^2+z^2+t^2)I_4$, $M_{(x,y,z,t)}^{-1}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2+t^2}M_{(x,y,z,t)}^{\mathrm{T}}$.
$N^2=-(y^2+z^2+t^2)I_4$,
$M^n=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}x^{n-2k}(y^2+z^2+t^2)^kI_4+\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}(y^2+z^2+t^2)^kN$,
$M^{-n}=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}x^{n-2k}(y^2+z^2+t^2)^kI_4+\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^{k+1}\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}(y^2+z^2+t^2)^kN$.

Indication 4.1.3

(1) Utiliser la relation $(AB)^n=A(BA)^{n-1}B$.

(2) Prendre $X=E_{hk}$, $\mathrm{Tr}(AX)=a_{kh}$.

(3) Utiliser $E_{ij}E_{jj}=E_{ij}$ et $E_{jj}E_{ij}=\delta_{ij}E_{ij}$ pour montrer que $\varphi(E_{ij})=0$ si $i\neq j$ et $\varphi(E_{ii})=\varphi(E_{jj})$.

Indication 4.1.4 Écrire $M(x,y)=xI+yN$ où $N^2=4N-5I$ et, avec $z=2+i$, définir $\phi(x+zy)=M(x,y)$.

Indication 4.1.5

(1) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est une base de l'ensemble des matrices magiques antisymétriques, $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $S_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une base de l'ensemble des matrices magiques symétriques.

(2) Toute matrice se décompose en la somme d'une matrice antisymétrique et d'une matrice symétrique.

Indication 4.1.6 Faire le calcul.

Indication 4.2.1 X est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$. Écrire ensuite $X^2 - 3X + 2I_n = \left(X - \frac{3}{2}I_n\right)^2 - \frac{1}{4}I_n$, l'équation générale s'écrit $\left(X + \frac{b}{2a}I_n\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}I_n$.

Indication 4.2.2 Écrire que la transposée est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $e_0 = 1$, $e_1 = 1 + X$,... $e_n = (1 + X)^n$, on trouve $T^{-1} = \left((-1)^{j-1}\binom{i-1}{j-1}\right)$.

Indication 4.2.3

(1) Si x est un vecteur de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$, alors la famille $(u^{p-k}(x))_{k\in[1,p]}$ est libre.

(2) On a $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}) = I_n$.

Indication 4.2.4 On trouve $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Indication 4.2.5 $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1 - 3e_2 - 2e_3)$, $\mathcal{B} = (e_1 - 3e_2 - 2e_3, e_2 + e_3, e_1)$ est une base dans laquelle f admet pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $M^n = 0$.

Indication 4.2.6 Raisonner par l'absurde, si $X \neq 0$ est tel que $AX = 0$ prendre $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \max |x_i|$.

Indication 4.3.1 Si f et g sont les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ de matrices A et B alors $f \circ g = 0$ donc $\operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) \leqslant n$, et $(f + g)(E) \subset f(E) + g(E)$ donc $\operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) \geqslant n$.

Indication 4.3.2 Si $\sum p_i^2 \neq 0$: $\operatorname{Rg}(A^2) = 2$, si $\sum p_i^2 = 0$ et $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$: $\operatorname{Rg}(A^2) = 1$, enfin $(p_1, p_2, \ldots, p_n) = (0, 0, \ldots, 0)$: $\operatorname{Rg}(A^2) = 0$.

Indication 4.3.3 Cf. exercice 2.3.3.

Indication 4.3.4 Par l'absurde prendre X matrice unicolonne telle que $M^n X \neq 0$.

Indication 4.4.1 D'une part, le déterminant du système est nul, d'autre part, la condition de compatibilité s'écrit $a(a^2 + 1)(b - c) + b(b^2 + 1)(c - a) + c(c^2 + 1)(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c) = 0$.

Indication 4.4.2 Le déterminant Δ du système vaut $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(a-b-c)$, d'où, si $\Delta \neq 0$, $y = \dfrac{-a(b^2 + c^2 - a^2)}{(a + b - c)(a + c - b)(a - b - c)}$. Prendre alors P le plan d'équation $P = a + b + c = 0$, Q_1 celui d'équation $Q_1 = a + b - c = 0$ et de même $Q_2, Q_3 (\Delta = PQ_1Q_2Q_3)$.

Indication 4.4.3 Poser $X = x + y$, $T = t + z$, d'où $X = T = \frac{2a}{a+b+1}$ à condition que $a + b \neq \pm 1$, puis $Y = x - y$, $Z = t - z$, d'où $Y = \frac{2(ab-b^2-1)}{(a-b)^2-1}$ et $Z = \frac{2(a-2b)}{(a-b)^2-1}$ à condition que $a - b \neq \pm 1$.
Pour le deuxième système, on utilise les déterminants de Vandermonde on trouve $x = \frac{(a+c)(a+b)a^2}{(b-a)(c-a)(a+b+c)}$.

Indication 5.1.1

(1) Avec $\tau = \sigma c \sigma^{-1}$, si $x \notin \{\sigma(a_1), \sigma(a_2), \dots, \sigma(a_p)\}$ alors $\tau_x = x$, si $x = \sigma(a_i)$, alors $\tau_x = \sigma c(a_i) = \sigma(a_{i+1})$(si $i \neq p$).

(2) On prend $c = (1,2)$ et $\sigma = (1,2,\dots,n)$s, alors $\sigma c \sigma^{-1} = (2,3)$, et on continue pour avoir $(k+1, k+2)$

(3) Si $t_1 = (i,j), t_2 = (k,l)$, distinguer les cas $\{i,j\} = \{k,l\}$, $\mathrm{Card}\{i,j\} \cap \{k,l\} = 1$, $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$.

Indication 5.1.2

(1) On trouve les valeurs : $1-\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}$ et $\frac{-\lambda}{1-\lambda}$.

(2) On pose $f_0(\lambda) = \lambda,\ f_1(\lambda) = 1-\lambda,\ f_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda},\ f_3(\lambda) = 1-\frac{1}{\lambda},\ f_4(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda},\ f_5(\lambda) = \frac{-\lambda}{1-\lambda}$ et $G = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ muni de la loi de composition.

Indication 5.1.3 p est paire en comptant le nombre d'inversions.

Indication 5.1.4 Prendre $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma(a) = a'$, $\sigma(b) = b'$ et $\sigma(c) = c'$ et distinguer les cas σ est paire, σ impaire.

Indication 5.1.5 Utiliser $\sigma(i,j)\sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j))$, on trouve l'identité.

Indication 5.2.1 On a $A_{2n} = (a^2-b^2)^n$, B_n et C_n vérifient la relation : $u_n = 2\cos\theta u_{n-1} - u_{n-2}$ d'où $B_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ si $\sin\theta \neq 0$ et $C_n = \cos n\theta$.

Indication 5.2.2 Utiliser $P(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = -\frac{(n+1)x^n}{1-x} + \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$, $\Pi = (-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$. Prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$ et $\Omega = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{(i,j)\in[1,n]^2} = (C_1, \dots, C_n)$ et calculer $A\Omega$. $\Delta_n = \Pi$.

Indication 5.2.3

(1) Dériver $D(x)$ colonne par colonne.

(2) $D(x)$ est une fonction affine de x, on trouve $D = D(0) = \frac{b\omega(a) - a\omega(b)}{b-a}$.

(3) D est une fonction de b, continue, on trouve $D = \omega(a) - a\omega'(a)$.

Indication 5.2.4 Si $(i,j) \in [0,n]^2$ alors $\Delta = 2D(x_0, x_1, \dots, x_n)$.
Si $(i,j) \in [1,n]^2$, écrire la première colonne sous la forme $2 + (x_k - 1)$ et obtenir $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ où $\Delta_1 = (2, 1+x_k^2, \dots, 1+x_k^n)$ et $\Delta_2 = (x_k - 1, 1+x_k^2, \dots, 1+x_k^n)$. Pour calculer Δ_1, retrancher la moitié de la première colonne à toutes les autres, pour Δ_2, retrancher la $(n-1)^{\text{ième}}$ colonne à la $n^{\text{ième}}$, ..., la $(n-k-1)^{\text{ième}}$ à la $(n-k)^{\text{ième}}$.

Indication 5.2.5 Utiliser la propriété $\cos(na_k) = 2^{n-1}\cos^n a_k + P_{n-1}(\cos a_k)$ où P_{n-1} désigne un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.
Le déterminant vaut $2^{n(n-1)/2} V(\cos a_0, \cos a_1, \dots, \cos a_n)$.

Indication 5.2.6 $\Delta_1 = 2abc(a+b+c)^3$, $\Delta_2 = 2abc(a-b)(b-c)(c-a)$, $\Delta_3 = (a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a+b+c)$.

Indication 5.2.7 On fait $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, \dots,\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ d'où
$$D = \begin{vmatrix} P(1) & \Delta P(1) & \dots & \Delta P(n-1) \\ P(2) & \Delta P(2) & \dots & \Delta P(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & \Delta P(n) & \dots & \Delta P(2n-2) \end{vmatrix}$$ et on recommence, on trouve $D = 0$.

Indication 5.2.8 $\det(AB) = 0$.

Indication 5.2.9 Se placer dans la base (S_{ij}, A_{kl}) où $S_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$, $i \leqslant j$ et $A_{kl} = E_{kl} - E_{lk}$, $k < l$ et on obtient $\det\varphi = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

1. Solutions

Solution 1.1.1 $\phi \in \mathcal{L}(E)$ grâce à la linéarité de l'intégrale.
Si $f(x) = \sin \pi x$, $\phi(f) = 0$ donc ϕ n'est pas injective.
Comme $\phi(f)$ est dérivable, ϕ n'est pas surjective car il existe des fonctions continues non dérivables.

Solution 1.1.2 f est linéaire par linéarité de la dérivation. f est bijective car, en résolvant l'équation différentielle, on obtient :

$$f^{-1}(z) = e^{x^2/2} \int_0^x z(t)e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

(On a utilisé la formule de la proposition 5.8.1 page 133.)

Solution 1.1.3 On n'a pas le (1), il suffit de prendre 3 droites vectorielles distinctes dans le plan. $M + N = E$, $L \cap (M + N) = L$ et $L \cap M = L \cap N = \{0\}$.
Pour le (2) : $L \cap (M + L \cap N) \subset L \cap M + L \cap N$ est immédiat.

- Si $x \in L \cap (M + L \cap N)$ alors $x = y + z$ où $y \in M$ et $z \in L \cap N$. $y \in L$ car $y = x - z$ donc on a bien l'inclusion annoncée.
- Si $x = y + z$ où $y \in L \cap M$ et $z \in L \cap N$ alors $x \in L$ et $x \in M + L \cap N$ d'où l'inclusion dans l'autre sens.

Conclusion : cet exercice banal est cependant très important car il est tentant d'écrire la relation $L \cap (M \oplus N) = L \cap M \oplus L \cap N$...

Solution 1.1.4 La C.N.S. cherchée est $F \subset G$ où $G \subset F$. Le raisonnement est le même que pour les sous-groupes, il se fait par l'absurde (en fait on peut ne se servir que de la structure de groupe des espaces vectoriels considérés).

Solution 1.1.5 En dimension finie, un raisonnement sur les dimensions fournit immédiatement le résultat en utilisant le théorème 2.16 page 41 qui dit que

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2.$$

Sinon, soit $x \in T'$, écrivons sa décomposition sur $S + T$ et sur $S + T'$:

$$x = x_S + x_T = x'_S + x_{T'}.$$

$x'_S = x - x_{T'} \in S \cap T' = S \cap T$, $x_{T'} = x_S - x'_S + x_T \in T$ donc $x \in T$ i.e. $T' \subset T$, $T = T'$.

Solution 1.1.6 Si E n'est pas réduit à $\{0\}$ alors E n'est pas un espace vectoriel car pour $x \neq 0$, $i * (i * x) \neq i^2 * x$.

Solution 1.2.1 Soit H_i les plans d'équation $z = h_i(x, y)$, R_i les demi-espaces fermés de frontière H_i définis par $z \geqslant h_i(x, y)$. E est donc le polyèdre intersection des R_i.
On note $F_i = E \cap H_i$ face associée à H_i, $I = [1, n]$ et on définit $\Phi\ : M \in \mathcal{E}_3 \mapsto z$. On veut prouver que Φ atteint son minimum sur E.
(i) Montrons que $\inf \Phi(E) = \min\limits_{i\in I}(\inf \Phi(F_i))$, i.e. $\forall M \in E, \exists N \in \bigcup\limits_{i\in I} F_i\ \Phi(M) \geqslant \Phi(N)$.

Soit $M \in E$, considérons $(N_i)_{i\in I}$ tel que $N_i \in (M, \overrightarrow{k}) \cap H_i$. Si j est tel que $\Phi(N_j) = \max\limits_{i\in I} \Phi(N_i)$ alors N_j répond à la question (j existe bien).

(ii) Montrons que $\inf \Phi(F_i) = \min_j \inf \Phi(C_{ij})$ où C_{ij} est une arête de la face F_i définie comme suit : $C_{ij} = F_i \cap \Delta_{ij}$ où Δ_{ij} est la frontière d'un demi-plan de H_i obtenu comme l'intersection de R_j et de H_i.
On a alors deux cas :
• soit H_i est parallèle à xOy, le résultat est alors évident car les points de H_i ont la même côte.
• H_i n'est pas parallèle à xOy, on prend la ligne de plus grande pente de H_i qui rencontre nécessairement une arête (sinon, Φ ne serait minorée sur E).
(iii) On recommence la même chose avec les sommets, on aura alors $\inf \Phi(E) = \min \Phi(S_{ijk})$ où les S_{ijk} sont les sommets de E. Comme ils sont en nombre fini, on peut conclure.

Solution 1.2.2 Soit I l'*isobarycentre* de ABC (i.e. le barycentre des points A, B, C affecté du même coefficient), .
h l'homothétie de centre I et de rapport -1/2 qui transforme A, B, C en A', B', C',
h' l'homothétie de centre O qui transforme en (P) le plan (ABC) et λ son rapport :

- si $\lambda \neq -2$, $h' \circ h$ est une homothétie de centre J : $A'A'' \cap B'B'' \cap C'C'' = \{J\}$;
- si $\lambda = -2$, $h' \circ h$ est une translation, les 3 droites sont parallèles à $\overrightarrow{OI}$.

Solution 1.2.3 On choisit un repère affine tel que :
$A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ et $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$ tel que : $\overrightarrow{AA'} = \alpha\,\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BB'} = \beta\,\overrightarrow{u}, \overrightarrow{CC'} = \gamma\,\overrightarrow{u}$;
équation du plan $(A'BC)$: $(1-2\alpha)x + (1+\alpha)(y+z-1) = 0$ et on fait une permutation circulaire pour les équations de $AB'C, ABC'$;
ces 3 plans sont parallèles à une même droite ssi le système associé est de rang 2 i.e. $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma} = 0$.

Solution 1.2.4 On choisit un repère tel que :

$$D(y=b, z=0),\ D'(z=c, x=0), D''(x=a, y=0).$$

On trouve $P_\lambda(\lambda a, b, 0)$ et $M'(0, b/(1-\lambda), c)$, $M''(a, 0, (1-1/\lambda)c)$ d'où $\lim_{\lambda\to 0} P_\lambda = (0,b,0)$.

Solution 1.2.5 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} \in G$ et bien sûr $F \subset G$.
$\Leftarrow$ $\mathcal{F} = A + F$ donc $A + F \subset A + G = B + \overrightarrow{BA} + G = B + G$ donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Solution 1.2.6

(1) L'intersection d'une famille de parties convexes est une partie convexe.
(2) On note $B(A)$ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de A.

- Montrons que $B(A) \subset \operatorname{Conv}(A)$: si $M = \sum_{i=1}^{n} \mu_i A_i$ et $N = \sum_{i=1}^{n} \nu_i A_i$ où les μ_i et les ν_i sont positifs et de somme 1 alors, pour tout $t \in [0,1]$, $tM + (1-t)N \in B(A)$ ce qui prouve que $B(A)$ est une partie convexe contenant de manière évidente A d'où l'inclusion $\operatorname{Conv}(A) \subset B(A)$.
- Montrons maintenant l'inclusion inverse. Soit C un ensemble convexe contenant A, montrons qu'il contient $B(A)$ en prouvant par récurrence sur k qu'il contient tous les barycentres positifs des $(A_1, \ldots, A_k)$.
  C'est évident pour $k = 2$.
  On suppose la propriété vraie à l'ordre k. Soit $M = \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i A_i$, alors $M = tM' + (1-$

$t)A_{k+1}$ où $t = \sum_{i=1}^{k} \mu_i$, $M' = \dfrac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} \mu_i A_i$ et $1 - t = \mu_{k+1}$. Donc $M \in C$.

On a bien $B(A) \subset \mathrm{Conv}\,(A)$.

Conclusion : $\mathrm{Conv}\,(A)$ est bien l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de A.

Solution 1.3.1

($\Rightarrow$) on écrit : $f(p(E)) \subset p(f(E)) \subset p(E)$ donc $p(E) = \mathrm{Im}\, p$ est stable par f et si $p(x) = 0$ alors $p(f(x)) = 0$ d'où la stabilité de $\mathrm{Ker}\, p$.

($\Leftarrow$) On sait que, si p est un projecteur, $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ donc si $x = x_1 + x_2$ et $f(x) = f(x_1) + f(x_2)$ alors $p(f(x)) = f(x_1) = f(p(x))$ soit $p \circ f = f \circ p$.

Solution 1.3.2 On a : $\frac{1}{3}(h_1 + h_2 + h_3) = \mathrm{Id}$ donc $E \subset E_1 + E_2 + E_3$ et comme l'inclusion dans l'autre sens est immédiate, on a égalité.

Comme $h_i \circ h_j = 3\delta_{ij} h_i$, le résultat est immédiat. En effet, si $0 = x_1 + x_2 + x_3$ où $x_i \in h_i(E)$ alors $-x_1 = x_2 + x_3$ d'où $h_1(-x_1) = 0$. Or $h_1^2 = 3h_1$ donc $h_1(x_1) = 3x_1 = 0$ (car $x_1 = h_1(x)$ par définition). On prouve de même que $x_2 = x_3 = 0$.

Solution 1.3.3 On a les inclusions suivantes : $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$ et $f^2(E) \subset f(E)$.

Première équivalence :

($\Rightarrow$) $f^2(x) = 0 \Rightarrow f(x) \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\} \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\, f$ donc $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$.

($\Leftarrow$) Si $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$ alors $f(x) = 0$ et $x = f(y)$ donc $y \in \mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$ donc $f(y) = x = 0$.

Deuxième équivalence :

($\Rightarrow$) Soit $x \in E$ il existe $z \in E$ tel que $f(x) = f^2(z)$ donc $x - f(z) \in \mathrm{Ker}\, f$ d'où $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f$.

($\Leftarrow$) On a : $x = f(x_1) + x_2 \Rightarrow f(x) = f^2(x_1) \Rightarrow f(E) \subset f^2(E)$.

Remarque : en combinant ces deux équivalences, on obtient

$$E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow (\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f) \text{ et } (\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f).$$

Solution 1.3.4

(1) Il suffit de prendre $\lambda = (b - a)^{-1}$, $\mu = -\lambda$. On a alors $p + q = \mathrm{Id}_E$, $pq = qp = 0$.
Remarque : ceci est une version du lemme des noyaux.

(2) On trouve $f = bp + aq$. Par une récurrence immédiate, on obtient $f^n = b^n p + a^n q$.

(3) En développant la première relation, on a : $f^2 - (a + b)f = -ab\,\mathrm{Id}_E$ donc, si $ab \neq 0$, $f^{-1} = \dfrac{-1}{ab} f + \dfrac{a+b}{ab}\mathrm{Id}_E$. En fait, la relation du 2. reste valable même si n est négatif (ce qui est souvent le cas dans ce genre de situation).

Solution 1.3.5 Comme $u(E) \subset E$, on a : $p \circ u^{n-k+h} \circ p = u^{n-k+h} \circ p$ car la restriction de p à E est l'identité, donc, d'une part :

$$q^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{h,k} u^k \circ p \circ u^{n-k} u^h \circ p \circ u^{n-h} = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{h,k} u^h \circ p \circ u^{n-h} = q.$$

D'autre part, $p(\mathbb{C}^n) \subset E \Rightarrow \mathrm{Im}\, q \subset E$ et comme $\forall x \in E\ : q(x) = x$ on a : $\mathrm{Im}\, q \supset E$ et donc $\mathrm{Ker}\, q$ est supplémentaire de E.

Solution 1.3.6

(1) u est bien définie grâce aux critères de convergence des intégrales. La linéarité est une conséquence de la linéarité de l'intégrale.

(2) On prend : $u_1(P)(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^2 e^{-t} P(t)dt$, $u_2(P)(x) = x \displaystyle\int_0^{\infty} te^{-t} P(t)\,\mathrm{d}t$,

$u_3(P)(x) = x^2 \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t} P(t)\,\mathrm{d}t$: u_1, u_2, u_3 forment une base.

(3) $U = \{(a, b, c)/abc \neq 0\}$.

Solution 1.3.7 On prend l'algorithme suivant : soit F_{i_1} un sous-espace vectoriel de la famille, deux cas se présentent : $\begin{cases} F_{i_1} = F \\ F_{i_1} \neq F \end{cases}$.

Dans le premier cas, c'est fini, dans le deuxième, on considère l'intersection $F_{i_1} \cap F_i$. F_{i_1} ne peut être contenu dans tous les F_i donc, il existe i_2 tel que $F_{i_1} \cap F_{i_2}$ soit strictement inclus dans F_{i_1} ; en raisonnant sur les dimensions, on aura donc $\dim F_{i_1} \cap F_{i_2} \leqslant \dim F_{i_1} - 1$.

C'est cet algorithme qui nous permet alors de conclure.

Solution 1.3.8 On suppose $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Il existe donc x et y dans E tels que $f(x) \neq 0$ et $g(y) \neq 0$. Comme $f(x)g(x) = f(y)g(y) = 0$ on sait que $g(x) = 0$ et $f(y) = 0$. On calcule alors $f(x + y)g(x + y) = f(x)g(y) = 0$ ce qui est impossible.

Solution 1.3.9

(1) Si $u = 0$ alors $f = 0$ qui n'est pas injective.
Si $u \neq 0$ alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u)$ donc là aussi f n'est pas injective.

(2) Avec la formule du double produit vectoriel on trouve $f^3 = -\|u\|^2 f$.

Solution 2.1.1

(1) $n = 1$: immédiat.
Hypothèse de récurrence : on suppose le résultat vrai à l'ordre $n - 1$:
si $f_n(x) = 0$ avait un nombre infini de solutions, comme : $f_n(x_1) = f_n(x_2) = 0$ alors $\exists x'_1 \in]x_1, x_2[$: $f'_n(x'_1) = 0$ on aurait :

$$x'^{\alpha_1 - 1}[a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n x'^{\alpha_n - \alpha_1}] = 0$$

donc l'équation $[a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n x'^{\alpha_n - \alpha_1}] = 0$ aurait une infinité de solutions possibles ce qui est contradictoire et achève la récurrence.

(2) Si on a : $a_0 + a_1 f^{\alpha_1} + \cdots + a_n f^{\alpha_n} = 0$ alors, en posant $x = f(y)$ où $y \in X$, on est ramené au 1. Comme on a une infinité de valeurs qui annulent l'expression, c'est que les (a_i) sont tous nuls et que la famille est libre.

(3) $g(]-1, +\infty[) = [-1, 1]$ on utilise alors le 2.

Solution 2.1.2 On a $f = \lambda \operatorname{Id} + \mu p_u$ où p_u désigne une projection sur la droite engendrée par u.

Solution 2.1.3

- Montrons que $F' \cap G = \{0\}$. Soit $x \in F' \cap G$ alors $x \in F' \cap (F \cap G)$ donc $x = 0$.
- Montrons que $F' + G = E$. Soit $x = y + z \in E = F + G$, on écrit $y = y_1 + y_2$ où $y_1 \in F'$ et $y_2 \in F \cap G$. Ainsi $x = y_1 + (y_2 + z)$ où $y_2 + z \in G$.

Solution 2.1.4

(1) $\Rightarrow$ $w \in \mathrm{Vect}(u, v)$ donc $w = \lambda u + \mu v$, $v \in \mathrm{Vect}(u, w)$ donc $v = \lambda' u + \mu' w$. Si $(\mu, \mu') \neq (0, 0)$ alors on a la condition cherchée. Si $\mu = \mu' = 0$ alors $v + w = (\lambda + \lambda')u$ et ça marche là encore.
$\Leftarrow$ $\gamma \neq 0 \Rightarrow w \in \mathrm{Vect}(u, v)$. $\beta \neq 0 \Rightarrow v \in \mathrm{Vect}(u, w)$, on a ainsi l'égalité $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u, w)$ par double inclusion.

(2) Supposons $u + \alpha v + \beta w = 0$. Si $x \in F + \mathbb{K}v$ alors $x = y + \lambda v$ où $y \in F$ d'où $x = \underbrace{y - u}_{\in F} + u + \lambda v$ soit $x \in F + \mathrm{Vect}(u, v)$. Or, vu la première question, on sait que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u, w)$ donc $x \in F + \mathrm{Vect}(u, w) = F + \mathbb{K}w$. Vu la symétrie on a bien $F + \mathbb{K}v = F + \mathbb{K}w$.
Réciproque : si $v \in F$ alors w aussi, on prend alors $u = -v - w$, sinon $v \notin F$, $w \notin F$. $v = u + \lambda w$ car $v \in F + \mathbb{K}v = F + \mathbb{K}w$ et $\lambda \neq 0$ car $v \notin F$. Il suffit alors de prendre $\alpha = -1$ et $\beta = \lambda$.

Solution 2.2.1 On a : $P \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow P = (X^2 + Y^2)H$ donc, on peut établir un isomorphisme de $\mathcal{P}_{n-2}$ sur $\mathcal{Q}$ qui à $P \in \mathcal{P}_{n-2}$ fait correspondre $(X^2 + Y^2)P \in \mathcal{Q}$.
On vérifie ensuite que les polynômes $P_1 = (X + iY)^n$ et $P_2 = (X - iY)^n$ sont dans $\mathcal{H}$ et qu'ils forment une famille libre.
En résolvant l'équation $\dfrac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = 0$ avec $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k Y^{n-k}$ on trouve $a_{2p} = (-1)^p \binom{n}{2p} a_0$ et $a_{2p+1} = (-1)^p \binom{n}{2p+1} \dfrac{a_1}{n}$ donc $\mathcal{H}$ est de dimension 2, i.e. $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$.
D'où si $P \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$, $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ alors en faisant $X = iY$ on aura : $\lambda_1 (2X)^n = 0$ d'ou $\lambda_1 = 0$, de même, $\lambda_2 = 0$. Comme $\dim \mathcal{Q} = n - 1$, $\dim \mathcal{H} \geqslant 2$ et $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$, on a forcément $\dim \mathcal{H} = 2$ et $\mathcal{P}_n = \mathcal{Q} \oplus \mathcal{H}$.

Solution 2.2.2 On a : $P(x + a_k) = \sum\limits_{h=0}^{n} \dfrac{a_k^h}{h!} P^{(h)}(x)$ et si $\lambda_0 P(x + a_0) + \cdots + \lambda_n P(x + a_n) = 0$ alors :

$$\sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h!} \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k^h \right) P^{(h)}(x) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k^h = 0$$

et donc : $\lambda_k = 0$ car on a un système de Vandermonde.

Solution 2.2.3 $\Big((2, 1, -3)\Big)$ est une base.

Solution 2.2.4 Soit $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$ alors en examinant les coefficients de x, y, z on trouve le système $\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases}$ ce qui est équivalent à $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, la famille est libre.

Solution 2.3.1

(1) On a : $\operatorname{Ker} u^{p+1} \supset \operatorname{Ker} u^p$, donc, comme la suite $k_p = \dim \operatorname{Ker} u^p$ est croissante et majorée par $\dim E$ alors $\exists k \in \mathbb{N}$: $\operatorname{Ker} u^{k+1} = \operatorname{Ker} u^k$ et $\operatorname{Ker} u^{k-1} \neq \operatorname{Ker} u^k$; on montre alors par récurrence sur m que $\operatorname{Ker} u^{k+m} = \operatorname{Ker} u^k$.

(2) Comme $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u^p + \dim \operatorname{Im} u^p$ et que $\operatorname{Im} u^{p+1} \subset \operatorname{Im} u^p$, on obtient les mêmes résultats.

(3) Si $x \in \operatorname{Ker} u^k \cap \operatorname{Im} u^k$: alors $\exists y \in E$: $x = u^k(y)$ et $u^{2k}(y) = 0$ donc $y \in \operatorname{Ker} u^{2k}$ or $\operatorname{Ker} u^{2k} = \operatorname{Ker} u^k$ d'où $u^k(y) = x = 0$. On a bien alors $\forall p \geqslant k$: $\operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im} u^p = E$.

Remarque : on pouvait directement dire que la suite k_p était convergente dans $\mathbb{Z}$ de limite l et prendre pour k le plus petit entier tel que $\operatorname{Ker} u^k = l$, la suite est alors immédiate.

Solution 2.3.2

- $p \circ q = q \circ p = 0$: $(p+q) \circ (p+q) = p + q \Rightarrow p \circ q = -q \circ p$. Puis
$$p \circ q = p^2 \circ q = -p \circ q \circ p$$
$$q \circ p = q \circ p^2 = -p \circ q \circ p$$
d'où $p \circ q = q \circ p$ et avec la première égalité on obtient $p \circ q = q \circ p = 0$.
- $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$: $\operatorname{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.
Montrons l'inclusion inverse : si $z = p(x) + q(y) \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ alors $(p+q)(z) = p^2(x) + q^2(y) = z$ donc $z \in \operatorname{Im}(p+q)$.
Montrons enfin que $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$: si $x = p(y) = q(z)$ alors $p(x) = p \circ q(z) = 0$ et $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$ donc $x = 0$.
- $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$: $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p+q)$.
Montrons l'inclusion inverse : $x \in \operatorname{Ker}(p+q)$ alors $p(x) = (p^2 + p \circ q)(x) = 0$, de même $q(x) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Solution 2.3.3 Soit $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} f$ que l'on complète en une base de E. On définit $f_1 \in \mathcal{L}(E)$ par $f_1(e_1) = f(e_1)$, $f(e_i) = 0$ pour $i \geqslant 2$. On définit de même $f_i(e_j) = \delta_{ij} f(e_j)$ pour $i \in [\![1, p]\!]$. Les f_i sont bien de rang 1 et leur somme vaut f.

Solution 2.3.4 On applique la formule du rang à $f_1 = f_{|\operatorname{Ker}(g \circ f)}$:
$$\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) = \dim \operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} \operatorname{Ker} f_1.$$
Or $\operatorname{Ker} f_1 \subset \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f_1 \subset \operatorname{Ker} g$ d'où l'inégalité.

Solution 2.3.5

(1) $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et $\dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \leqslant \operatorname{Rg} f + \operatorname{Rg} g$ donc $\operatorname{Rg}(f+g) \leqslant \operatorname{Rg} f + \operatorname{Rg} g$.
On applique maintenant cette relation à $f + g$ et $-g$:
$$\operatorname{Rg}(f + g - g) \leqslant \operatorname{Rg}(f+g) + \operatorname{Rg}(-g) = \operatorname{Rg}(f+g) + \operatorname{Rg} g$$
et on fait de même avec $f + g$ et $-f$ d'où les inégalités demandées.

(2) Comme $f \circ g = 0$ alors $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ ce qui donne d'une part $\operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) \leqslant n$
D'autre part : $(f+g)(E) \subset f(E) + g(E)$ donc $\operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) \geqslant n$ (car $(f+g)(E) = E$).
Conclusion : on a bien $\operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) = n$.

Solution 2.3.6 Soit $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ et $F' = \text{Vect}(\mathcal{F}')$, $\dim F = s$, $\dim F' = s'$. En rajoutant à la famille $\mathcal{F}'$ les $n-r$ vecteurs restant de la famille $\mathcal{F}$ le rang de la famille obtenue est au plus $s'+n-r$ et on sait qu'il est égal à s d'où l'inégalité demandée.

Solution 2.3.7 $\Rightarrow$ $f^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = 2p$ donne $\dim \operatorname{Ker} f = p$ donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.
$\Leftarrow$ immédiat.

Solution 2.3.8 g est linéaire (immédiat) donc $g \in E^*$.
$f^2(x) = f(g(x)u) = g(x)f(u) = g(x)g(u)u = g(u)f(x)$ donc $\lambda = g(u)$.

Solution 3.1.1 On trouve 8960. L'idée ici est de ne calculer que les termes nécessaires et d'éliminer les termes de degré > 8. On utilise une technique apparentée aux développements limités.

Solution 3.1.2
On trouve $P = (X^3 - 6X^2 + 12X - 8)^2$ et $Q = (X^2 + 3aX + a^2)^2$.

Solution 3.1.3 $P(X)^k - X^k$ est divisible par $P(X) - X$ en utilisant la relation

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + b^{k-1}.$$

En écrivant $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ alors

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i (P(X)^i - X^i)$$

est divisible par $P(X) - X$ donc

$$P(P(X)) - X = [P(P(X)) - P(X)] + [P(X) - X]$$

est aussi divisible par $P(X) - X$.
On pouvait aussi utiliser les congruences : $[P(X)]^k \equiv X^k \mod (P(X) - X)$ et avec $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ alors

$$\begin{aligned} P(P(X)) &= \sum_{i=0}^{n} a_i P(X)^i \\ &\equiv \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mod (P(X) - X) \\ &\equiv P(X) \mod (P(X) - X) \equiv X \mod (P(X) - X) \end{aligned}$$

on peut conclure.
On a utilisé ici les propriétés de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$ déduites de celle de $\mathbb{Z}$.

Solution 3.1.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $P(x) = x$ donc si un tel polynôme existe alors $P = X$ mais $P(i) = -i$ ce qui est contradictoire.

Solution 3.2.1 En étudiant la suite récurrente double (p_n) définie par : $p_{n+2} = -xp_{n+1} - p_n$ on trouve :

$$p_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}\delta}\left[(x+\delta)^{n+1} - (x-\delta)^{n+1}\right]$$

(pour $x \neq \pm 2$) où $\delta \in \mathbb{C}$ est tel que $\delta^2 = x^2 - 4$. On développe alors par la formule du binôme de Newton, il ne reste dans le crochet que les puissances impaires de δ qui se simplifie avec le dénominateur. δ n'intervient plus qu'a une puissance paire d'où finalement

$$p_n = \frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n+1}{2k+1}x^{n-2k}(x^2-4)^k$$

qui est une fonction polynôme. Comme sur $\mathbb{R}$ l'égalité des fonctions polynôme entraîne l'égalité des polynômes on a

$$P_n = \frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n+1}{2k+1}X^{n-2k}(X^2-4)^k$$

polynôme de degré n.

En posant $x = 2\cos\theta$, on a : $P_n(2\cos\theta) = (-1)^n\dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

En posant $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ alors les $x_k = 2\cos\theta_k$, pour $k \in [1, n]$ sont racines de P_n. On a bien toutes les racines de P_n car on sait qu'un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes et les x_k sont des réels distincts.

Solution 3.2.2

(1) On trouve $\deg a_n = 2\left[\dfrac{n-1}{2}\right] + 1$ et $\deg b_n = 2\left[\dfrac{n}{2}\right]$ (ici, il faut faire attention au fait que les termes de plus haut degré peuvent s'annuler et donc on s'intéressera à leur signe, de toutes façon, la dernière question permet de tout régler).

(2) On a $y_n(\tan\alpha) = \tan(n\alpha)$ par récurrence sur n. Les racines de a_n seront donc $x_k = \tan\dfrac{k\pi}{n}$, $-\dfrac{n}{2} < k < \dfrac{n}{2}$, celles de b_n seront $x'_k = \tan\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, $-n < 2k+1 < n$.

(3) On a $z_n = i(1-iX)^n$ d'où les expressions de a_n et b_n : avec $p = [\frac{n}{2}]$ et $q = [\frac{n-1}{2}]$:

$$a_n = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k\binom{n}{2k+1}X^{2k+1},\ b_n = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{2k}X^{2k}.$$

Solution 3.2.3

a) Le reste R est égal à -1.

b) On écrit $P + 1 = (X-2)^2(X-3)^2Q + R$ où $\deg R \leqslant 3$ et on a :

$$R(3) = R(2) = 0,\ R'(3) = P'(3) = n,\ R'(2) = P'(2) = -2n$$

d'où $R = \frac{n}{5}(-X^3 + 13X^2 - 46X + 48)$.

Solution 3.2.4 On pose $P = (X+1)^m - X^m - 1$ alors X^2+X+1 divise P ssi $P(j) = P(j^2) = 0$. Or $P(j) = j^{2m} - j^m - 1$. En étudiant les congruences de m modulo 6 ($+P(j^2) = \overline{P}(j)$), on a :

$$X^2 + X + 1 \mid P \Leftrightarrow m \equiv \pm 1[6].$$

On a utilisé ici le fait que $(X-j)(X-j^2)$ divise P ssi $P(j) = P(j^2) = 0$.

Solution 3.2.5 Grâce à la relation

$$(1 + X + \cdots + X^{p-1})(1 - X) = 1 - X^p$$

on sait que les racines de $(1+X+\cdots+X^{p-1})$ sont les racines $p^{ième}$ de l'unité sauf 1, le résultat est alors immédiat.

Solution 3.2.6 On peut écrire $a = \dfrac{1 - X^{5n}}{1 - X^n}$ et $b = \dfrac{1 - X^5}{1 - X}$; $b(x) = 0 \Leftrightarrow x^5 = 1$, $x \neq 1$ i.e. les racines de b sont les racines cinquièmes de l'unité sauf 1 et celles de a sont les racines $5n$-ièmes de l'unité privée des racines n-ièmes.

- Si $n \equiv 0$ [5] alors b ne divise pas a.
- Si $n \not\equiv 0$ [5] alors b divise a.

Solution 3.2.7 On trouve $P = \lambda(X+a)^n$. En effet, on a $P = QP'$ et comme $\deg P' = \deg P - 1$ (on suppose que P est un polynôme de degré $n \geqslant 1$) alors Q est un polynôme de degré 1. On peut alors réécrire la relation sous la forme $\lambda P = (X + a)P'$ et, en tenant compte des termes de plus haut degré $nP = (X + a)P'$.
Si l'on résout l'équation différentielle $ny = (x + a)y'$, on trouve $y = \lambda(x + a)^n$ donc la fonction polynôme $\tilde{P}$ s'écrit de la même façon donc $P = \lambda(X + a)^n$.

Solution 3.2.8 On sait que $\deg P = n$, on écrit alors que

$$P' - P'' = nX^{n-1}, \ldots P^{(n)} - P^{(n+1)} = n!$$

or $P^{(n+1)} = 0$, alors, en additionnant toutes ces égalités, on trouve $P = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$.

Solution 3.2.9

- $P(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^m = e^{2ip\alpha}$ ce qui s'écrit encore $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{1+x}{1-x} = e^{i2\theta_k}$ où $\theta_k = \dfrac{p\alpha + k\pi}{m}$. Soit $x_k = i \tan \theta_k$ qui est bien défini pour tout k car $\theta_k \neq \dfrac{\pi}{2} [\pi]$ pour tout k vu que $\dfrac{\alpha}{\pi}$ n'est pas rationnel.
  $P(x_k) = 0$ et en prenant k entier dans $[0, m - 1]$ on trouve m racines distinctes pour P polynôme de degré m donc

$$P = [1 + (-1)^{m+1} e^{2ip\alpha}] \prod_{k=0}^{m-1} (X - i \tan \theta_k)$$

- On sait que

$$\cos(2n\theta) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} \cos^{2n-2k} \theta \sin^{2k} \theta = \sin^{2n} \theta \, Q(\operatorname{cotan}^2 \theta),$$

  d'où les n racines de Q : $x_k = \operatorname{cotan}^2 \theta_k$ où $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{4n}$, $k \in [0, n-1]$. On en déduit enfin l'écriture de Q :

$$Q = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \operatorname{cotan}^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right).$$

Solution 3.2.10 Par récurrence on a : $P_n(X) = (1-X)(1-\dfrac{X}{2})(\ldots)(1-\dfrac{X}{n})$.

Solution 3.2.11 En dérivant la propriété (ii), on trouve les relations :

$$(n-k)P^{(k)} = (X-a)P^{(k+1)} + bP^{(k+2)}.$$

Avec $k = n-1$, on obtient $P^{(n-1)}(a) = 0$ et, par une récurrence immédiate,

$$P^{(n-2k)}(a) = \frac{b^k}{2^k k!},\ P^{(n-2k+1)}(a) = 0.$$

En utilisant alors la formule de Taylor, on obtient bien les coordonnées demandées et l'écriture de P :

$$P = \frac{(X-a)^n}{n!} + \frac{b(X-a)^{n-2}}{2(n-2)!} + \cdots + \frac{b^k(X-a)^{n-2k}}{2^k k!(n-2k)!} + \cdots$$

Solution 3.2.12

(1) & 2. On procède par récurrence sur n. Soit

$$\begin{aligned} F(p) &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (X-k)^{p+1} \\ &= X \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right](X-k)^p - \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k k \binom{n+1}{k} (X-k)^p. \end{aligned}$$

On développe, on change les indices et on trouve $F_{n+1}(p) = (n+1)F_n(p)$ ($k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1}$) d'où $F_n(p) = n!F_0(p)$. On obtient alors 1. et 2.

3 On fait $X = 0$ dans la relation du 2 et on trouve que : $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(k) = (-1)^n P^{(n)}(0)$.

Solution 3.2.13

(1) Pour $k = 0$, c'est immédiat. On procède alors par récurrence sur k.
Si c'est vrai à l'ordre k, alors, comme $P_{k+1}(X) = XP'_k(X)$, 1 est racine d'ordre $n-k-1$ de P_{k+1}.

(2) $A_{n,k} = P_k(1) = 0$ si $k < n$.
Si $k = n$ alors on trouve $(-1)^n n!$. En effet $A_{n,n} = -nA_{n-1,n-1}$ en utilisant la relation $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$:

$$\begin{aligned} A_{n,n} &= \sum_{p=1}^{n} (-1)^p p^n \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} n(-1)^p p^{n-1} \binom{n-1}{p-1} \\ &= -n \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q (q+1)^{n-1} \binom{n-1}{q} \text{ en posant } q = p-1 \\ &= -n \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} q^k \right) \binom{n-1}{q} \\ &= -n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A_{n-1,k} = -nA_{n-1,n-1} \end{aligned}$$

Solution 3.2.14

(1) Considérons l'application $\Delta\ : P(X) \in \mathbb{C}[X] \mapsto P(X) - P(X+1)$ alors $\Delta^n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$. Comme d'autre part $\deg \Delta(P)(X) \leqslant \deg P(x) - 1$, $\Delta^n(P)$ a un degré négatif, i.e. $\Delta^n(P)$ est nul.

(2) On multiplie la $(k+1)^{\text{ième}}$ colonne par $(-1)^k \binom{n}{k}$ et on additionne tout dans la première colonne, on pourra alors effectivement mettre $(1-X)^n$ en facteur.

Vu que $\Delta_n(x)$ est un polynôme de degré n, le quotient sera une constante, $\Delta(0) = \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n+1} (j-i) = \prod_{k=1}^{n-1} k! = \prod_{k=1}^{n-1} k^{n-k}$.

Solution 3.3.1

(1) On peut écrire : $P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{m} [(X-u_j)^2 + v_j^2]$ qui donne la décomposition d'un polynôme sur $\mathbb{R}$.

Si on pose $R(X) = \prod_{j=1}^{m} [(X-u_j) + iv_j]$ alors le deuxième terme du produit s'écrit $R(X)\overline{R}(X) = A'^2(X) + B'^2(X)$ si l'on écrit $R(X) = A'(X) + iB'(X)$. On montre ensuite que $\lambda > 0$ (en prenant l'équivalent quand $x \to +\infty$). α_i pair est alors immédiat.

(2) Si $\deg P = 0$, c'est évident !

Supposons la propriété vérifiée à l'ordre n ;

à l'ordre $n+1$: si P est toujours positif, on utilise le résultat du 1., sinon, soit $-a$ une racine négative d'ordre impair de P : $P = (X+a)Q$, Q vérifie la même propriété que P à l'ordre n, donc

$$Q = A^2 + B^2 + X(C^2 + D^2)$$

$$P = a(A^2 + B^2) + X^2(C^2 + D^2) + X(A^2 + B^2 + a(C^2 + D^2)) = P_1 + XP_2$$

où P_1 et P_2 sont toujours positifs ; on en déduit donc le résultat grâce au 1.

Solution 3.3.2 Les racines sont : $x = \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n}, k \in [1, n-1]$. Donc

$$(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1} = 2(n+1)i \prod_{k=1}^{n} (X - \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n+1}).$$

Comme $\operatorname{cotan} \frac{(n+1-k)\pi}{n+1} = -\operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n+1}$ on aura :

$$[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}]^2 = -4(n+1)^2 \prod_{k=1}^{n} (X^2 - \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{n+1})$$

et avec $X = 2i$, $\Pi = \dfrac{(3^n - 1)^2}{4(n+1)^2}$.

Solution 3.3.3

(1) $(1-x)P(x) = Q = -nx^{n+1} + (n+1)x^n - 1$ et $Q' = -n(n+1)x^n(x-1)$ donc 1 est seule racine double de Q car c'est la seule racine commune de Q et Q' P n'a donc que des racines simples.

(2) Si x est racine de P alors $nx^n = 1 + x + \cdots x^{n-1}$ en passant aux modules, on a :

$n|x|^n \leqslant 1 + |x| + \cdots + |x|^{n-1}$ ce qui n'est possible que si $|x| \leqslant 1$. En effet, si $|x| > 1$ alors $|x|^n > |x|^k$ pour $k < n$ et donc $n|x|^n > 1 + |x| + \cdots + |x|^{n-1}$.

Si $n|x|^n = 1 + |x| + \cdots + |x|^{n-1}$ alors on a égalité dans l'inégalité
$$|1 + x + \cdots + x^{n-1}| \leqslant 1 + |x| + \cdots + |x|^{n-1}.$$
Or on sait que, dans ce cas, les points d'affixe $1, x, \ldots, x^{n-1}$ sont situés sur une même demi-droite partant de l'origine ce qui signifie que x est un réel positif. Or, la seule racine réelle positive de Q est 1.

Conclusion : les racines de P sauf 1 ont un module < 1.

Solution 3.3.4

(1) En multipliant par q^n on a : $a_n p^n + \cdots + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n$. Donc $p|a_0$ de même pour $q|a_n$.
Ce résultat très simple est cependant très important, si l'on veut chercher les racines rationnelles d'une équation algébrique, on peut passer en revue tous les cas sous la forme $\dfrac{p}{q}$ sachant que $p|a_0$ et $q|a_n$.

(2) On a $q^n P(m) = q^n P(m) - q^n P(\frac{p}{q}) = a_1 q^{n-1}(mq - p) + \cdots + a_n[(mq)^n - p^n]$ et comme chaque terme de la somme est divisible par $mq-p$ alors $mq-p|q^n P(m)$. $(mq-p)\wedge q = 1$ (soit avec Bézout ou bien en cherchant les diviseurs communs à $mq - p$ et q) et en conclusion $mq - p|P(m)$.

(3) a) $p|1$ et $q|1$ mais comme 1 et -1 ne sont pas racines, on peut affirmer que $X^3 - X - 1$ n'a pas de racine rationnelle.

b) $p|5$ et $q|3$, on vérifie alors que $\frac{5}{3}$ est racine, puis, comme $3X^3 - 2X^2 62X - 5 = (3X - 5)(X^2 + X + 1)$, on peut conclure que $\frac{5}{3}$ est la seule racine rationnelle.

c) $p|12$ et $q|6$ (et aussi $p \wedge q = 1$ ce qui limite considérablement les choix), on vérifie que $\frac{1}{2}$ et -3 sont racines puis comme
$$6X^4 + 19X^3 - 7X^2 - 26X + 12 = (2X - 1)(X + 3)(\underbrace{3X^2 + 2X - 4}_{\text{pas de racine rationnelle}})$$
alors ce sont les seules.

(4) a) On a $\begin{cases} p - m_1 q | P(m_1) \\ p - m_2 q | P(m_2) \end{cases}$ donc $p - m_1 q = -1$ et $p - m_2 q = 1$ (car $m_1 \neq m_2$ et donc les 2 quantités ne peuvent être égales).
Si $|m_1 - m_2| > 2$ alors, en faisant la différence entre les 2 équations ci-dessus, on a $(m_1 - m_2)q = 2$ ce qui est impossible avec q entier.

b) On reprend les équations $p - m_1 q = -1$ et $p - m_2 q = 1$ et on fait la somme cette fois-ci d'où $2p = (m_1 + m_2)q$ i.e. la seule racine rationnelle est $\dfrac{m_1 + m_2}{2}$.

Solution 3.3.5

(1) On sait que $\sin n\alpha = \sin^n \alpha \left[\binom{n}{1} \operatorname{cotan}^{n-1} \alpha - \binom{n}{3} \operatorname{cotan}^{n-3} \alpha + \cdots + (-1)^p \binom{n}{n}\right]$, donc en posant $x = \operatorname{cotan}^2 \alpha$, on a $\binom{n}{1} x^p - \binom{n}{3} x^{p-1} + \cdots + (-1)^p = \dfrac{\sin n\alpha}{\sin^n \alpha}$. Les racines sont $x_k = \operatorname{cotan}^2 \dfrac{k\pi}{n}$ pour $k \in [1, p]$.

Ensuite, on utilise les relations entre coefficients et racines) pour en déduire dans un premier temps $\sum\limits_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2 \dfrac{k\pi}{n} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{6}$. Grâce à l'égalité $\dfrac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{cotan}^2 \alpha$,

on peut conclure
$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{n}} = \frac{(n-1)(n+1)}{6}.$$

(2) L'inégalité fournie est classique, elle peut se démontrer par une simple étude de fonctions.

On élève au carré et on prend les inverses avec $\alpha = \dfrac{k\pi}{n}$; en faisant la somme de chaque inégalité, on trouve effectivement
$$\frac{(n-1)(n-2)}{6} < \left(\frac{n}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{n}{2\pi}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{p\pi}\right)^2 < \frac{(n-1)(n+1)}{6}.$$
On divise alors ces deux inégalités par n^2, le passage à la limite ne pose pas de problème. On trouve finalement
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
relation très classique et que l'on retrouvera avec les séries de Fourier.

Solution 3.3.6

- $(i) \Leftrightarrow (ii)$: soit α le centre du parallélogramme, si on pose $Z = z - \alpha$ alors les nombres complexes $Z_i = z_i - \alpha$ sont opposés deux à deux et l'équation $P(Z+\alpha) = 0$ est bicarrée ; la réciproque est immédiate.
- $(ii) \Rightarrow (iii)$: $P(z+\alpha) = z^4 - \beta z^2 + \gamma$, alors $P'(z+\alpha)$ et $P'''(z+\alpha)$ ont 0 comme racine commune.
- $(iii) \Rightarrow (ii)$: soit α la racine commune, on pourra écrire $P'''(z) = 24(z-\alpha)$, par intégration, $P''(z) = 12(z-\alpha)^2 - 2\beta$, $P'(z) = 4(z-\alpha)^3 - 2\beta(z-\alpha)$ (c'est là que l'on utilise l'hypothèse) et $P(z) = (z-\alpha)^4 - \beta(z-\alpha)^2 + \gamma$.

On peut aussi écrire la formule de Taylor pour P :
$$P(z+\alpha) = P(\alpha) + zP'(\alpha) + z^2\frac{P''(\alpha)}{2} + z^3\frac{P'''(\alpha)}{6} + z^4$$
et l'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ devient immédiate.

Solution 3.3.7 On trouve $\alpha = (-1)^n e^{-2in\theta}$.

Le produit des racines vaut :

- $(-1)^p$ si $n = 2p$,
- $(-1)^p \operatorname{cotan}((2p+1)\theta)$ si $n = 2p+1$.

Solution 3.3.8 L'égalité proposée tient au fait que les deux polynômes ont les mêmes racines, que ces racines sont toutes simples et qu'ils ont même coefficient dominant.

On écrit : $\sin(x + k\pi/n) = \dfrac{e^{2ik\pi/n} - e^{-2ix}}{2ie^{-ix}e^{ik\pi/n}}$ d'où, en utilisant les relations

- $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} [e^{-2ix} - 1] = e^{-2inx} - 1$ obtenue en remplaçant X par e^{-2ix} dans la relation polynomiale et
- $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/n} = \exp\left[\frac{i\pi}{n}.\frac{n(n-1)}{2}\right] = i^{n-1}$ car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$,

on obtient :

$$\begin{aligned}
\Pi_s &= \frac{1}{(2i)^n e^{-inx}} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e^{-2ix} - e^{2ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n}} \right) \\
&= \frac{(-1)^n}{(2i)^n e^{-inx}} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{2ik\pi/n} - e^{-2ix} \right)}{\prod_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/n}} \\
&= \frac{(-1)^n}{(2i)^n e^{-inx}} \frac{e^{-2inx} - 1}{i^{n-1}} \text{ en utilisant les deux relations citées} \\
&= \frac{(-1)^n (-2i \sin nx)}{2^n i^{2n-1}} = \frac{\sin nx}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

De même, $\Pi_c = \dfrac{\sin(nx + n\pi/2)}{2^{n-1}}$ car $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.

Solution 3.3.9 On obtient les relations

$$\begin{aligned}
s_1 + s_2 &= 0 \\
s_1 s_2 + p_1 + p_2 &= -2 \\
s_1 p_2 + s_2 p_1 &= -\lambda \\
p_1 p_2 &= -3
\end{aligned}$$

soit, avec $p_1 = 1$, on aura $s_1 = -s_2$, $p_2 = 3$, $s_1^2 = 6$ et enfin $\lambda = -2s_1$ d'où $\lambda = \pm 2\sqrt{6}$. Les racines seront alors :

$$\varepsilon \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2}, \varepsilon \frac{\sqrt{6}}{2}(1 \pm i)$$

où $\varepsilon = \mp 1$ selon le signe de λ.

Solution 3.3.10 On sait que $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(x - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n} \right) \right) = x^n - 1$ alors, en écrivant que

$$\left(\exp\left(\frac{4ik\pi}{n} \right) - 2\cos\theta \exp\left(\frac{2ik\pi}{n} \right) + 1 \right) = \left(e^{i\theta} - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n} \right) \right) . \left(e^{-i\theta} - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n} \right) \right)$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\Pi_n &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\theta} - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n} \right) \right) . \left(e^{-i\theta} - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n} \right) \right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\theta} - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n} \right) \right) . \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{-i\theta} - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n} \right) \right) \\
&= \left(e^{in\theta} - 1 \right) . \left(e^{-in\theta} - 1 \right) = 2(1 - \cos n\theta).
\end{aligned}$$

Solution 3.4.1 On a :

$$(X^7 - 2X^5 - 5X^4 + 3X^3 + 2X - 5) \wedge (X^5 + X^4 + 3X^3 - 3X^2 - 3X - 5) = X^2 + X + 1$$

Solution 3.4.2 $\Rightarrow P \wedge Q = 1 \Rightarrow P \wedge P + Q = 1,\ Q \wedge P + Q = 1 \Rightarrow PQ \wedge P + Q = 1.$
$\Leftarrow$ Soit $D = P \wedge Q$ alors D divise $P + Q$ et PQ donc $D = 1$.

Solution 3.4.3 Pour tout polynôme R satisfaisant la relation on a $PP_1 = QR$, $QQ_1 = PR$ et $RR_1 = PQ$. Soit $D = P \wedge Q$, on écrit $P = P'D$, $Q = Q'D$, les relations s'écrivent $P'P_1 = Q'R$, $Q'Q_1 = P'R$ et $RR_1 = D^2P'Q'$. Grâce au théorème de Gauss, $Q'|P_1$ et $P'|Q_1$ d'où $Q'Q_2 = P_1$ et $P'P_2 = Q_1$ soit $R = P'Q_2 = Q'P_2$.
Première conclusion : $R = KP'Q'$.
$RR_1 = R_1KP'Q' = D^2P'Q'$ soit $KR_1 = D^2$ donc, deuxième conclusion, $K|D^2$.
Réciproquement on montre que tout polynôme $R = KP'Q'$ où $K|D^2$ convient.

Solution 3.4.4

(1) On écrit $P = \lambda \prod_{j=1}^{k}(X - a_j)^{\alpha_j}$ alors $P' = \lambda' \prod_{j=1}^{k}(X - a_j)^{\alpha_j - 1}R$ où $R \wedge \prod_{j=1}^{k}(X - a_j) = 1$ (en effet, chaque racine a_j de P est d'ordre exactement α_j). On a ainsi $P \wedge P' = \prod_{j=1}^{k}(X - a_j)^{\alpha_j - 1}$ qui est de degré $n - k$.

(2) Le résultat est faux sur $\mathbb{R}$, prendre par exemple $P = X^2 + 1$, $P' = 2X$. $P \wedge P' = 1$, $n = 2$, $k = 0$.

(3) On a $P = n(X - a)P'$ (on raisonne sur les degrés). $P \wedge P' = \lambda P'$ donc $k = 1$ et a est la seule racine de P d'ordre n. On a ainsi $P = \lambda(X - a)^n$ et, avec les conditions de l'énoncé, on obtient $P = (1 - X)^n$.

Solution 3.4.5

(1) C'est la relation de Bézout améliorée (cf. question (i) page 144).

(2) C'est une conséquence immédiate de l'unicité de P et Q (on remplace X par $1 - X$).

(3) On dérive la relation ce qui donne

$$(1 - X)^{n-1}\left[-nP(X) + (1 - X)P'(X)\right] = -X^{n-1}\left[nQ(X) + XQ'(X)\right]$$

donc X^{n-1} divise le polynôme $-nP(X) + (1 - X)P'(X)$ ($X^{n-1} \wedge (1 - X)^{n-1} = 1$ et on utilise le théorème de Gauss). En raisonnant sur les degrés, on en déduit que $-nP(X) + (1 - X)P'(X) = kX^{n-1}$ où $k \in \mathbb{R}$.

(4) On a $P(0) = 1$ et, si on écrit $P(X) = \sum_{j=0}^{n-1} a_jX^j$, alors on trouve $a_j = \binom{j - 1 + n}{n - 1}$.

Solution 3.5.1

a) Par le calcul on obtient

$$\frac{X^2}{X^4 - 2X^2\cos\alpha + 1} = \frac{1}{4i\sin\alpha/2}\left[\frac{1}{X - e^{i\alpha/2}} - \frac{1}{X + e^{i\alpha/2}} - \frac{1}{X - e^{-i\alpha/2}} + \frac{1}{X + e^{-i\alpha/2}}\right].$$

b) Si x_k désigne $e^{i(2k+1)\frac{\pi}{2n}}$, on a : $\dfrac{X^{2m}}{X^{2n} + 1} = -\dfrac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\dfrac{x_k^{2m+1}}{X - x_k}$.

Solution 3.5.2 On décompose les fractions rationnelles en utilisant le fait que le coefficient de $\dfrac{1}{X - \alpha_k}$ dans la décomposition de $\dfrac{P}{X^n - 1}$ vaut $\dfrac{P(\alpha_k)}{n\alpha_k^{n-1}}$.

Solution 3.5.3 On a : $XS - S = \dfrac{X}{X-1}[2(n-1)X^{n+1} - 2nX^n + X + 1]$ d'où :
$S\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right) = \dfrac{2(2n+1)}{(2n-1)^{n+3}}(2n(2n-1)^n - 2n + 1)^n)$.

Solution 3.5.4 On a $F(\tan\theta) = \tan n\theta$ et en choisissant $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ les pôles seront donnés par :

$$x_k = \tan\theta_k \text{ où } \theta_k = (2k+1)\frac{\pi}{2n},\ k \in [-p, p-1].$$

Avec $F = \dfrac{P}{Q}$ où $P(\tan\theta) = \dfrac{\sin n\theta}{\cos^n\theta}$ et $Q(\tan\theta) = \dfrac{\cos n\theta}{\cos^n\theta}$, on aura $F = E + \sum \dfrac{A_k}{X - x_k}$ et $A_k = \dfrac{P(\tan\theta_k)}{Q'(\tan\theta_k)} = -\dfrac{1}{n\cos^2\theta_k}$, E désignant la partie entière.
Si $n = 2p$ alors $q = p - 1$, $E = 0$.
Si $n = 2q + 1$ alors $p = q$, $E = \dfrac{X}{n}$.
Conclusion : on a finalement la décomposition

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{q}(-1)^k\binom{n}{2k+1}X^{2k+1}}{\sum\limits_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{2k}X^{2k}} = E - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\frac{1}{X - \tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}}.$$

Solution 3.5.5 On a donc $F(a) = F(b) = F(c) = 0$ et F s'écrit

$$F(X) = \frac{(X-a)(X-b)(X-c)(X^2+\lambda X+\mu)}{(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)}.$$

En réduisant au même dénominateur de part et d'autre, on arrive à

$$(X^2-1)(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) + Q_2(X) = (X-a)(X-b)(X-c)(X^2+\lambda X+\mu)$$

où Q_2 est un polynôme de degré $\leqslant 2$. On pose alors $\begin{matrix} \sigma_1 = \alpha+\beta+\gamma & \sigma_2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \\ \sigma_1' = a+b+c & \sigma_2' = ab+bc+ca \end{matrix}$. En examinant les termes de degré
4 : $-\sigma_1 = -\sigma_1' + \lambda$ soit $\lambda = \sigma_1' - \sigma_1$,
3 : $\sigma_2 - 1 = \sigma_2' + \lambda(-\sigma_1') + \mu$ soit $\mu = \sigma_2 - \sigma_2' + \sigma_1'(\sigma_1' - \sigma_1) - 1$.
En posant

$$P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)(X^2+\lambda X+\mu) \text{ et } Q(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$$

on a alors $x = \dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$, $y = \dfrac{P(\beta)}{Q'(\beta)}$, $z = \dfrac{P(\gamma)}{Q'(\gamma)}$ soit, par exemple

$$x = \frac{(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)[\beta\gamma - \sigma_1(\beta+\gamma) + \sigma_1^2 - \sigma_2 - 1]}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}.$$

Solution 3.5.6 On a

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)(X+3)} = \frac{1}{6X} - \frac{1}{2(X+1)} + \frac{1}{2(X+2)} - \frac{1}{6(X+3)}$$

d'où

$$6S_n = s_n - 3\left[s_n - 1 + \frac{1}{n+1}\right] + 3\left[s_n - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right] \\ - \left[s_n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right]$$

i.e.

$$S_n = \frac{1}{18} - \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{3(n+2)} - \frac{1}{6(n+3)}.$$

Remarque : à la limite, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{18}$.

Solution 3.5.7 On a $\dfrac{n!}{X(X+1)(\ldots)(X+n)} = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{(-1)^p\binom{n}{p}}{X+p}$.

Pour avoir l'égalité demandée, on fait passer $\dfrac{1}{X}$ dans l'autre membre et on passe à la limite quand X tend vers 0.

Solution 3.5.8 On a $\left(\dfrac{P'}{P}\right)' = \dfrac{Q}{P^2}$ or, si les racines de P sont simples et réelles, $\dfrac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{X-a_k}$ soit, en dérivant $\left(\dfrac{P'}{P}\right)' = -\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(X-a_k)^2}$. $Q(x) > 0$ pour tout x réel donc Q n'a pas de racine réelle.

Solution 3.5.9

(1) Une simple application du théorème de Rolle entre les valeurs a_k et a_{k+1} nous donne les racines $b_k \in]a_k, a_{k+1}[$. On obtient bien toutes les racines de P' car $\deg P' = n-1$ et on a $n-1$ racines distinctes.

(2) On peut supposer que P est unitaire alors $P' = n\prod_{k=1}^{n-1}(X-b_k)$. On écrit $\dfrac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{X-a_k}$ et on remarque que le coefficient de $\dfrac{1}{X-a_k}$ dans la décomposition de $\dfrac{P'}{P}$ vaut $\dfrac{P'(a_k)}{Q_k(a_k)}$ où $Q_k = \dfrac{P}{X-a_k}$. On obtient alors les relations

$$1 = \frac{n\prod_{i=1}^{n-1}(a_k-b_i)}{\prod_{i\neq k}(a_k-a_i)} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{a_k-b_k}{a_k-a_{k+1}}\prod_{i<k}\frac{a_k-b_i}{a_k-a_i}\prod_{i\geqslant k+1}\frac{a_k-b_i}{a_k-a_{i+1}}.$$

Comme $a_i < b_i < a_{k+1}$ on a $\dfrac{a_k-b_i}{a_k-a_i} < 1$ pour $i \leqslant k-1$ et $a_k < a_{k+1} \leqslant a_i < b_i < a_{i+1}$ pour $i \geqslant i+1$ entraîne que $\dfrac{a_k-b_i}{a_k-a_{i+1}} < 1$.

On obtient ainsi $\dfrac{a_k-b_k}{a_k-a_{k+1}} > \dfrac{1}{n}$ ce qui donne la première inégalité.

Pour obtenir la deuxième, on remplace k par $k+1$ dans la première relation.

Solution 3.5.10 Soit $f(x) = \dfrac{P'(x).(P(x)-c)}{(P(x)-a).(P(x)-b)}$. On écrit que $P - a = \lambda \prod_{i=1}^{k}(X-\alpha_i)^{\omega_i}$ et que $P - b = \lambda \prod_{j=1}^{h}(X-\beta_j)^{\varpi_i}$ et on utilise la dérivée logarithmique de $P-a$ et $P-b$.

- $P(x) - c = t(P(x)-a) + (1-t)(P(x)-b)$ d'où
$$\begin{aligned} f(x) &= t\sum_{i=1}^{k}\frac{\omega_i}{x-\alpha_i} + (1-t)\sum_{j=1}^{h}\frac{\varpi}{x-\beta_j} \\ &= \sum_{i=1}^{k+h}\frac{\gamma_i}{x-\delta_i} \end{aligned}$$
en regroupant les deux sommes et en rangeant les δ_i dans l'ordre croissant.
- $f'(x) = -\sum_{i=1}^{k+h}\dfrac{\gamma_i}{(x-\delta_i)^2} < 0$ donc sur chaque intervalle $]\delta_i, \delta_{i+1}[$, f décroît de $+\infty$ à $-\infty$ donc f s'annule au moins une fois ce qui fait en tout $k+h-1$ zéros de f.
- On sait (exercice 3.4.4) que $D_a = (P-a)\wedge P'$ est de degré $n-k$, de même $D_b = (P-b)\wedge P'$ est de degré $n-h$ d'où $P' = D_aQ_a = D_bQ_b$. Or $P-a$ et $P-b$ n'ont aucune racine en commun (immédiat par l'absurde) donc D_a et D_b n'ont aussi aucune racine commune, ils sont donc premiers entre eux. On en déduit que $D_a|Q_b$ et, par conséquent que $P' = D_aD_bQ$ où Q est un polynôme de degré $n-1-(n-k)-(n-h) = k+h-1-n$.
- On a alors $\dfrac{P'(P-c)}{(P-a)(P-b)} = \dfrac{Q(P-c)}{\lambda^2\prod(X-\alpha_i)\prod(X-\beta_j)}$. $Q(P-c)$ a au moins $k+h-1$ racines mais $\deg(Q(P-c)) = k+h-1-n+n = k+h-1$ donc on en déduit que $P-c$ est scindé.
On a même mieux, $P-c$ a toutes ses racines simples !

Solution 4.1.1 On écrit $A = I_n + aJ + \cdots + a^nJ^n$ et il est naturel de penser à poser $A^{-1} = I_n - aJ$.
On vérifie par un calcul simple que $A(I_n - aJ) = I_n$.
On a $B = I_n + 2J + \cdots + nJ^{n-1}$, on pense à la dérivée par rapport à a dans la relation précédente d'où $B^{-1} = (I-J)^2 = I - 2J + J^2$.
En résolvant le système $CX = Y$, on a $X = C^{-1}Y$ et, par un calcul simple, on arrive à $C^{-1} = \dfrac{1}{4}\overline{C}$ ($\overline{C}$ désigne la matrice formée des conjugués des éléments de C).

Solution 4.1.2 $M_{(x,y,z,t)}M^{\mathrm{T}}_{(x,y,z,t)} = (x^2+y^2+z^2+t^2)I_4$. On déduit de cette relation que le déterminant de $M_{(x,y,z,t)}$ est égal à $\pm(x^2+y^2+z^2+t^2)^2$ donc que M est inversible ssi $(x,y,z,t) \neq (0,0,0,0)$ puis que son inverse est $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+t^2}M^{\mathrm{T}}_{(x,y,z,t)}$.
Puis $N^2 = -(y^2+z^2+t^2)I_4$ d'où :
$$\begin{aligned} M^n &= (xI_4+N)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^{n-p}N^p \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}x^{n-2k}(y^2+z^2+t^2)^kI_4 + \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}(y^2+z^2+t^2)^kN. \end{aligned}$$
On peut avoir une expression de M^n en fonction de I_4 et M en remplaçant N par $M - xI_4$.
Remarque : on a $M^2 - 2xM + (x^2+y^2+z^2+t^2)I_4 = 0$ et donc le polynôme $P(X) = X^2 - 2xX + (x^2+y^2+z^2+t^2)$ est un polynôme annulateur de M.

Comme $M^{-1}=(x^2+y^2+z^2+t^2)^{-1}M^{\mathrm{T}}$, on en déduit la valeur de M^{-n} si $n>0$:

$$M^{-n}=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}x^{n-2k}(y^2+z^2+t^2)^kI_4+\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^{k+1}\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}(y^2+z^2+t^2)^kN$$

car $N^{\mathrm{T}}=-N$.

Solution 4.1.3

(1) $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$ est immédiat. On montre ensuite par récurrence sur n que $(AB)^n=A(BA)^{n-1}B$ d'où

$$\mathrm{Tr}[(AB)^n]=\mathrm{Tr}[A(BA)^{n-1}B]=\mathrm{Tr}[BA(BA)^{n-1}]=\mathrm{Tr}[(BA)^n].$$

(2) On prend $X=E_{hk}=(\delta_{ih}\delta_{jk})$ alors si on pose $AX=(c_{ij})$ on a

$$c_{ij}=\sum_{p=1}^n a_{ip}\delta_{ph}\delta_{jk}=\sum_{p=1}^n a_{ih}\delta_{jk}$$

et donc, si $i\neq k$, $c_{ii}=0$ et $c_{kk}=a_{kh}$ d'où $\mathrm{Tr}(AX)=a_{kh}$. On a donc, pour tout (h,k), $a_{kh}=b_{kh}$ soit $A=B$.

(3) On utilise les relations $E_{ij}E_{jj}=E_{ij}$ et $E_{jj}E_{ij}=\delta_{ij}E_{ij}$ donc, si $i\neq j$, $\varphi(E_{ij})=0$.

Puis $E_{ij}E_{ji}=E_{ii}$ et $E_{ji}E_{ij}=E_{jj}$ donc $\varphi(E_{ii})=\varphi(E_{jj})$. Comme les $(E_{ij})_{(i,j)\in[1,n]^2}$ forment une base, on peut conclure à l'existence de $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $\varphi=\lambda\,\mathrm{Tr}$.

Solution 4.1.4 On écrit : $M(x,y)=xI+yN$ où $N^2=4N-5I$. Soit $z=2+i$ solution de $z^2=4z-5$, on définit alors $\phi(x+zy)=M(x,y)$.

On vérifie alors facilement que ϕ est un isomorphisme de corps.

Solution 4.1.5 L'ensemble des matrices magiques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(1) $A_1=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ est une base de l'ensemble des matrices magiques anti-symétriques.

En effet, si $A=\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}$ est une matrice magique antisymétrique alors $a+b=0$ et $b+c=0$ donc $A=aA_1$.

$S_1=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $S_2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ est une base de l'ensemble des matrices magiques symétriques.

En effet, si on cherche S matrice magique symétrique de somme nulle, $S=\begin{pmatrix}\gamma&a&b\\a&\beta&c\\b&c&\alpha\end{pmatrix}$ alors $\alpha+\beta+\gamma=0$ et si on fait la somme de toutes les lignes, on trouve $\alpha+\beta+\gamma+2(a+b+c)=0$ soit $a+b+c=0$ donc $\alpha=a$, $\beta=b$ et $\gamma=c$. Puis $3b=0$ sur l'antidiagonale et $a+c=0$ donc $S=aS_1$.

Enfin, si S est une matrice magique symétrique quelconque, $S-\frac{1}{3}S_2$ est une matrice magique symétrique de somme nulle.

(2) Comme toute matrice se décompose en la somme d'une matrice antisymétrique et d'une matrice symétrique, la réponse est immédiate.

Solution 4.1.6 On écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ puis on exprime que $AB = BA$ en utilisant le fait que si b ou c sont nuls, alors $a - d \neq 0$.
Le résultat est alors immédiat.
Remarque : on appelle *commutant* de A l'ensemble des matrices qui commutent avec A mais le résultat établi ci-dessus ne se généralise pas à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (sauf si, par exemple, A est diagonalisable et à toutes ses valeurs propres d'ordre 1).

Solution 4.2.1 $\frac{1}{2}(I_n + X)$ est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et $\frac{1}{2}(I_n - X)$ est le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.
En choisissant une base dans E_1 et une dans E_2, la matrice de l'endomorphisme associé à X s'écrira : $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$. X sera donc semblable à cette matrice où p et q désignent les dimensions respectives de E_1 et E_2.
On écrit ensuite que : $X^2 - 3X + 2I_n = \left(X - \frac{3}{2}I_n\right)^2 - \frac{1}{4}I_n$ donc X sera semblable à $\begin{pmatrix} 2I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$.
L'équation générale se mettra sous la forme : $\left(X + \frac{b}{2a}I_n\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}I_n$, comme $b^2 - 4ac$ est positif, on peut se ramener au cas précédent.
Conclusion : les solutions de l'équation $aX^2 + bX + cI_n = 0$ avec $b^2 - 4ac > 0$ sont données par les conditions

$$\exists A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \exists p \in [0, n] \mid X = A \begin{pmatrix} \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} I_p & 0 \\ 0 & \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{pmatrix} A^{-1}.$$

Solution 4.2.2 On prend la transposée, on écrit que c'est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $e_0 = 1$, $e_1 = 1 + X$,... $e_n = (1 + X)^n$.
On a alors $X^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} e_i$ ce qui donne l'inverse de la transposée.
En conclusion $T^{-1} = (t'_{ij})$ avec $t'_{ij} = (-1)^{j-1}\binom{i-1}{j-1}$.

Solution 4.2.3

(1) Le théorème de Cayley-Hamilton donne le résultat mais il n'est pas nécessaire de l'invoquer !
Soit x un vecteur de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$, posons $e_k = u^{p-k}(x)$ ($e_p = x$) alors la famille $(e_k)_{k \in [1,p]}$ est libre ;
si $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u^{p-k}(x) = 0$ alors, on compose par u^{p-1} et on trouve $\lambda_p u^{p-1}(x) = 0$ soit $\lambda_p = 0$. Puis, par une récurrence descendante, on prouve de même que $\lambda_k = 0$.
On a donc $p \leqslant n$ et si $p = n$, dans la base ainsi construite, la matrice de u sera celle demandée.

(2) On a $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}) = I_n$ donc $I_n - A$ est bien inversible, d'inverse $(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1})$ (en prenant l'algèbre engendrée par I_n et A).

Solution 4.2.4 On trouve $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution 4.2.5 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_1 + e_3, e_2 + e_3)$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1 - 3e_2 - 2e_3)$.

$\mathcal{B} = (e_1 - 3e_2 - 2e_3, e_2 + e_3, e_1)$ est une base dans laquelle f admet pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Il est évident que $A^2 = 0$ donc $f^2 = 0$ et par conséquent $f^n = 0$ pour $n \geqslant 2$ soit $M^n = 0$.

Solution 4.2.6 Par l'absurde, on suppose A non inversible, il existe donc $X \neq 0$ tel que $AX = 0$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \max |x_i|$. On a $a_{kk}x_k = -\sum_{j \neq k} a_{kj}x_j$ et, en prenant les modules

$$a_{kk}|x_k| \leqslant \sum_{j \neq k} |a_{kj}|.|x_j| \leqslant \sum_{j \neq k} |a_{kj}|.|x_k|$$

ce qui donne une contradiction en divisant par $|x_k|$.

Solution 4.3.1 Soient f et g les endomorphismes de $E = \mathbb{K}^n$ associés aux matrices A et B. On a : $f \circ g = 0$ donc $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ ce qui donne d'une part $\operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) \leqslant n$.
D'autre part : $(f + g)(E) \subset f(E) + g(E)$ donc $\operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) \geqslant n$ (car $(f + g)(E) = E$).
Conclusion : on a bien $\operatorname{Rg}(A) + \operatorname{Rg}(B) = n$.

Solution 4.3.2 $A^2 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_1^2 & \dots & p_1p_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & p_np_1 & \dots & p_n^2 \end{pmatrix}$

D'où :

- si $\sum p_i^2 \neq 0$: $\operatorname{Rg}(A^2) = 2$,
- si $\sum p_i^2 = 0$ et $(p_1, p_2, \dots, p_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$: $\operatorname{Rg}(A^2) = 1$
- enfin $(p_1, p_2, \dots, p_n) = (0, 0, \dots, 0)$: $\operatorname{Rg}(A^2) = 0$.

Solution 4.3.3 Cf. exercice 2.3.3.

Solution 4.3.4 Si $M^n \neq 0$ alors il existe X matrice unicolonne telle que $M^nX \neq 0$. On prouve alors que la famille $(X, MX, \dots, M^nX)$ est libre ce qui est impossible.

Solution 4.4.1 D'une part, le déterminant du système est nul, d'autre part, la condition de compatibilité (i.e. la condition pour que le système admette une solution) s'écrit :

$$a(a^2 + 1)(b - c) + b(b^2 + 1)(c - a) + c(c^2 + 1)(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c) = 0.$$

Calcul du déterminant : on multiplie la première ligne par -1 et on l'additionne aux deuxième et troisième lignes. On met $a - b$ en facteur dans la deuxième ligne, $a - c$ en facteur dans la troisième ligne ce qui donne (en notant Δ ce déterminant)

$$\Delta = (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} b+c & bc-1 & (1+b^2)(1+c^2) \\ 1 & c & (a+b)(1+c^2) \\ 1 & b & (a+c)(1+b^2) \end{vmatrix}$$

on multiplie ensuite la deuxième ligne par -1, on l'additionne à la troisième, on la multiplie par $-(b+c)$ et on l'additionne à la première, ce qui donne, en mettant $(b-c)$ en facteur dans la dernière ligne et $(1+c^2)$ dans la première ligne

$$\Delta = (a-b)(a-c)(b-c)(1+c^2)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1-ab-ac-bc \\ 1 & c & (a+b)(1+c^2) \\ 0 & 1 & -1+ab+ac+bc \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque : en reprenant les calculs que l'on vient de faire on trouve la relation suivante sur les lignes du déterminant

$$(b-c)(1+a^2)L_1 + (c-a)(1+b^2)L_2 + (a-b)(1+c^2)L_3 = 0$$

ce qui correspond bien à la condition de compatibilité.

Solution 4.4.2 Le déterminant Δ du système vaut :

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(a-b-c).$$

D'où, dans le cas où Δ est non nul : $y = \dfrac{-a(b^2+c^2-a^2)}{(a+b-c)(a+c-b)(a-b-c)}$ et on fait une permutation circulaire pour z et t. Pour x, on utilise la relation : $x+y+z+t=2$.
Soit P le plan d'équation $P = a+b+c = 0$, Q_1 celui d'équation $Q_1 = a+b-c = 0$ et de même $Q_2, Q_3 (\Delta = PQ_1Q_2Q_3)$.

- Si $P = 0$ et $Q_i \neq 0$ alors le système est possible, indétermination d'ordre 1.
- Si $Q_1 = 0$ uniquement, alors le système est impossible (de même $Q_i = 0$).
- Si $P = 0, Q_1 = 0, (a,b,c) \neq (0,0,0)$ alors : $y = z, x-t = 1$, indétermination d'ordre 2.
- Si on a 3 valeurs nulles, alors $a = b = c = 0$.

Solution 4.4.3

- Premier système : on additionne les deux premières équations, puis les deux dernières, en posant $X = x+y$, $T = t+z$, on obtient le système de 2 équations à 2 inconnues suivant ;

  $$\begin{cases} (a+b)X + T &= 2a \\ X + (a+b)T &= 2a \end{cases}$$

  qui donne $X = T = \dfrac{2a}{a+b+1}$ à condition que $a+b \neq \pm 1$.

  On recommence, mais cette fois on soustrait les équations, on pose $Y = x-y$, $Z = t-z$, d'où

  $$\begin{cases} (a-b)Y + Z &= 2b \\ Y + (a-b)Z &= 2 \end{cases}$$

  et $Y = \dfrac{2(ab-b^2-1)}{(a-b)^2-1}$ et $Z = \dfrac{2(a-2b)}{(a-b)^2-1}$ à condition que $a-b \neq \pm 1$. On peut alors en déduire x, y, z, t.

- Pour le deuxième système, on utilise les déterminants, on a des déterminants de Vandermonde un peu partout : on trouve

$$\Delta = -\frac{(b-a)(a-c)(b-c)}{a^2b^2c^2},\ x = \frac{(a+c)(a+b)a^2}{(b-a)(c-a)(a+b+c)}.$$

Solution 5.1.1

(1) On pose $\tau = \sigma c \sigma^{-1}$. Si $x \notin \{\sigma(a_1), \sigma(a_2), \dots, \sigma(a_p)\}$ alors $\tau_x = x$, si $x = \sigma(a_i)$, alors $\tau_x = \sigma c(a_i) = \sigma(a_{i+1})$(si $i \neq p$). D'où le résultat.

(2) On prend $c = (1,2)$ et $\sigma = (1,2,\dots,n)$s, alors $\sigma c \sigma^{-1} = (2,3)$,
de même, $\sigma^k c \sigma^{-k} = (k+1, k+2)$ et $\sigma^{n-1} c \sigma^{1-n} = (n,1)$.
Puis on montre que $(i, i+2) = (i+1, i+2)(i, i+1)(i+1, i+2)$ et par récurrence que (i,j) s'écrit en fonction de $(1,p)$ où $p \in [2,n]$. On peut alors conclure car les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$.

(3) Soit $t_1 = (i,j), t_2 = (k,l)$: si $\{i,j\} = \{k,l\}$ alors $t_1t_2 = id$.
si $\text{Card}\{i,j\} \cap \{k,l\} = 1 t_1t_2$ est un cycle d'ordre trois.
si $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$ alors, on a $(i,k,l)(i,j,l) = (i,j)(k,l)$.
Comme tout élément de $\mathcal{A}_n$ s'écrit comme un produit pair de transpositions, on en déduit le résultat.

Solution 5.1.2

(1) On trouve les valeurs : $1-\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}$ et $\frac{-\lambda}{1-\lambda}$.
On sait en effet que $(1,2)$ et $(1,2,3,4)$ engendrent $\mathfrak{S}_4$ or, si $B(x_1,x_2,x_3,x_4) = \lambda$ alors $B(x_2,x_1,x_3,x_4) = \dfrac{1}{\lambda}$.
Soit $A = B(x_2,x_3,x_4,x_1) = \dfrac{x_1-x_2}{x_1-x_3}\dfrac{x_4-x_3}{x_4-x_2}$ alors

$$\frac{x_1-x_2}{x_1-x_3} = \frac{(x_1-x_3)+(x_3-x_2)}{x_1-x_3} \text{ et } \frac{x_4-x_3}{x_4-x_2} = \frac{(x_4-x_1)+(x_1-x_3)}{x_4-x_2}$$

d'où

$$A = \left(1 - \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)\left(\frac{(x_4-x_1)+(x_1-x_3)}{x_4-x_2}\right) = \frac{x_4-x_3}{x_4-x_2} - \lambda - \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\frac{x_1-x_3}{x_4-x_2}$$
$$= 1-\lambda$$

ce qui donne effectivement les valeurs prises par B en examinant les différents cas (ce qui peut prendre un certain temps).

(2) On pose :

$$f_0(\lambda) = \lambda,\ f_1(\lambda) = 1-\lambda,\ f_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda},\ f_3(\lambda) = 1-\frac{1}{\lambda},\ f_4(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda},\ f_5(\lambda) = \frac{-\lambda}{1-\lambda},$$

Soit $G = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ muni de la loi de composition. On a $f_3 = f_1 \circ f_2$, $f_4 = f_2 \circ f_1$, $f_5 = f_1 \circ f_2 \circ f_1$. On définit alors l'application φ par

$$\varphi(\text{Id}) = f_0,\ \varphi((1,2)) = f_1,\ \varphi((2,3)) = f_2,$$

$$\varphi((1,2,3)) = f_3,\ \varphi((1,3,2)) = f_4,\ \varphi((1,3)) = f_5$$

alors φ est une bijection compatible avec les lois $\circ$ dans $\mathfrak{S}_3$ et dans G ce qui permet de dire que G est un groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ (le seul groupe d'ordre 6 non commutatif).

Solution 5.1.3 Si p désigne la permutation en question, on étudie les couples (i,j) tels que : $i<j$ et $p_i>p_j$:
i,j impairs ou i pair, j impair : pas d'inversion.
i,j pairs, on a inversion : $i=2i',j=2j',0\leqslant i'<j'\leqslant n$: $\binom{n+1}{2}$ couples.
i impair, j pair, inversion : $i=2i'+1,j=2j',0\leqslant i'<j'\leqslant n$: $\binom{n+1}{2}$ couples.
Conclusion : p est paire.

Solution 5.1.4 On remarque tout d'abord que $\sigma(a,b,c)\sigma^{-1}=(\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c))$.
Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma(a)=a'$, $\sigma(b)=b'$ et $\sigma(c)=c'$.
Si σ est paire alors c'est la permutation cherchée.
Si σ est impaire, comme $n\geqslant 5$, il existe une transposition laissant a', b', c' invariants, la permutation paire $\tau\sigma$ convient.

Solution 5.1.5 On utilise la relation $\sigma(i,j)\sigma^{-1}=(\sigma(i),\sigma(j))$ pour toute transposition (i,j). Comme σ commute avec toutes les permutations on a $(i,j)=(\sigma(i),\sigma(j))$ donc $\{i,j\}=\{\sigma(i),\sigma(j)\}$. Pour $k\neq j$ on a aussi $\{i,j\}=\{\sigma(i),\sigma(k)\}$ donc $\sigma(i)=i$, σ est l'identité.

Solution 5.2.1 On a : $A_{2n}=(a^2-b^2)^n$ en développant par rapport à la première ligne.
B_n et C_n vérifient la relation : $u_n=2\cos\theta u_{n-1}-u_{n-2}$ (toujours en développant par rapport à la première ligne), d'où :

- $B_n=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ si $\sin\theta\neq 0$,
- $B_n=\varepsilon(n+1)$ où ε est du signe de $\cos\theta$ si $\sin\theta=0$
- et $C_n=\cos n\theta$.

Solution 5.2.2 On a :

$$P(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}=\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)'=-\frac{(n+1)x^n}{1-x}+\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

On pose $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ alors

$$P(\omega^k)=1+2\omega^k+\cdots+n\omega^{k^{n-1}}=\begin{cases}\dfrac{-n}{1-\omega^k} & \text{si } k\neq 0\\ \dfrac{n(n+1)}{2} & \text{si } k=0.\end{cases}$$

D'où $\Pi=\dfrac{n(n+1)}{2}\dfrac{(-n)^{n-1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k)}=(-1)^{n-1}\dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$ car $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k)=Q(1)$ où $Q(X)=\dfrac{X^n-1}{X-1}$ et $Q(1)=n$.

Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ n&1&\cdots&n-1\\ \vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\ 2&\cdots&n&1\end{pmatrix}$ et $\Omega=(\omega^{(i-1)(j-1)})_{(i,j)\in[1,n]^2}=(C_1,\ldots,C_n)$ (les C_i désignent les colonnes de Ω). On a alors

$$A\Omega=(P(1)C_1,\ldots,P(\omega^{n-1}C_n))$$

d'où $\det(A\Omega) = \Pi \det \Omega$. Comme Ω est inversible (matrice de Vandermonde) on peut conclure

$$\Delta_n = \Pi = (-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

Solution 5.2.3

(1) On dérive $D(x)$ colonne par colonne, à chaque fois, on aura une colonne de 1 que l'on retranchera aux autres colonnes, on aura ainsi une somme de déterminants ne dépendant pas de x.

Remarque : le calcul de la dérivée d'un déterminant (application multilinéaire) peut se faire effectivement colonne par colonne (comme le calcul de la dérivée d'un produit).

(2) Comme $D'(x)$ est constant, $D(x)$ est une fonction affine de x. $D(-a) = \omega(a)$, $D(-b) = \omega(b)$, d'où $D(x) = \dfrac{b+x}{b-a}\omega(a) + \dfrac{a+x}{a-b}\omega(b)$ et $D = D(0) = \dfrac{b\omega(a) - a\omega(b)}{b-a}$.

(3) Le cas où $b = a$ se traite en considérant que D est une fonction de b, continue (c'est un polynôme) et en passant à la limite dans l'expression ci-dessus on trouve $D = \omega(a) - a\omega'(a)$.

Solution 5.2.4 Si $(i,j) \in [0,n]^2$ alors $\Delta = 2D(x_0, x_1, \dots, x_n)$.
Si $(i,j) \in [1,n]^2$, on écrit la première colonne sous la forme $2 + (x_k - 1)$ et on utilise la linéarité $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ où $\Delta_1 = (2, 1 + x_k^2, \dots, 1 + x_k^n)$ et $\Delta_2 = (x_k - 1, 1 + x_k^2, \dots, 1 + x_k^n)$.
Pour calculer Δ_1, on retranche la moitié de la première colonne à toutes les autres, on obtient

$$\Delta_1 = 2\prod_{k=1}^{n} x_k D(x_1, \dots, x_n).$$

Quant à Δ_2, on retranche la $(n-1)^{\text{ième}}$ colonne à la $n^{\text{ième}}$, ..., la $(n-k-1)^{\text{ième}}$ à la $(n-k)^{\text{ième}}$ et on trouve :

$$\Delta_2 = (x_k - 1, x_k^2 - x_k, \dots, x_k^n - x_k^{n-1}) = \prod_{k=1}^{n}(x_k - 1)D(x_1, \dots, x_n).$$

Le résultat final est alors immédiat.

Solution 5.2.5 On utilise ici la propriété suivante : $\cos(na_k) = 2^{n-1}\cos^n a_k + P_{n-1}(\cos a_k)$ où P_{n-1} désigne un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Le déterminant sera alors égal à

$$2^{n(n-1)/2}V(\cos a_0, \cos a_1, \dots, \cos a_n)$$

(déterminant de Vandermonde).

Solution 5.2.6

- On fait $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ d'où

$$\Delta_1 = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & b-c-a & 0 \\ 0 & c+a-bc-a-b & \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

puis on développe et on trouve $\Delta_1 = 2abc(a+b+c)^3$.

- On fait $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ d'où

$$\Delta_2 = 2\begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2 \\ a^3 & a^3+b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

- On fait apparaître des 0 sur la première colonne en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$ et on développe par rapport à la première colonne puis on fait $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ ce qui donne

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ 0 & a^2-b^2 & -c^2 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -b^2 & a^2-c^2 & b^2 \\ a^2-b^2 & -c^2 & c^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2b^2 & a^2-c^2-b^2 & b^2 \\ a^2-b^2-c^2 & -2c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

puis on développe par rapport à la première ligne et on trouve $\Delta_3 = (a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a+b+c)$.

Solution 5.2.7 On fait successivement $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, \ldots,\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ d'où

$$D = \begin{vmatrix} P(1) & \Delta P(1) & \ldots & \Delta P(n-1) \\ P(2) & \Delta P(2) & \ldots & \Delta P(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & \Delta P(n) & \ldots & \Delta P(2n-2) \end{vmatrix}$$

puis on recommence le processus avec les colonnes $3, \ldots, n$, les colonnes $4, \ldots, n$,..., les colonnes $n-1, n$ d'où

$$D = \begin{vmatrix} P(1) & \Delta P(1) & \ldots & \Delta^{n-1} P(1) \\ P(2) & \Delta P(2) & \ldots & \Delta^{n-1} P(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & \Delta P(n) & \ldots & \Delta^{n-1} P(n) \end{vmatrix}$$

Or $\Delta^{n-1} P = 0$ car $\deg \Delta P \leqslant \deg P - 1$ donc $D = 0$.

Solution 5.2.8 On considère les applications linéaires f et g associées aux matrices A et B dans $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. g n'est pas injective donc $f \circ g$ n'est pas bijective, la matrice AB de $f \circ g$ n'est pas inversible, son déterminant est nul.

Solution 5.2.9 On se place dans la base (S_{ij}, A_{kl}) où $S_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$, $i \leqslant j$ et $A_{kl} = E_{kl} - E_{lk}$, $k < l$ ((S_{ij}) est une base de l'ensemble des matrices symétriques et (A_{kl}) est une base de l'ensemble des matrices antisymétriques). Dans cette base, la matrice de φ est diagonale, $M(\varphi) = \mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ où la nombre de -1 est égal à la dimension de l'ensemble des matrices antisymétriques donc $\det \varphi = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
