ALGÈBRE LINÉAIRE ET POLYNÔMES (R)

1. Espaces vectoriels

1.1. **Espaces vectoriels.**

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$

On prend $E = \mathbb{R}_2[X]$ (polynôme de degré inférieur ou égal à 2 sur $\mathbb{R}$).

(1) Montrer que $(1, X+1, X^2 - X + 1)$ est une base de E.
(2) À chaque $P \in E$, on fait correspondre l'ensemble $E(P)$ obtenu en multipliant P par un polynôme arbitraire M de $\mathbb{R}[X]$ et en prenant le reste modulo $(X^3 + 1)$ de tous les polynômes PM. Montrer qu'on obtient ainsi pour $E(P)$ un sous-espace vectoriel de E.
(3) On pose $S = X + 1$ et $T = X^2 - X + 1$, montrer que $E = E(S) \oplus E(T)$. Quelles sont leurs dimensions ?

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{I C}}$

Soit $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ n réels. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[x_1, x_n]$ telles que $f_{|[x_i,x_{i+1}]}$ soit polynomiale de degré 2.

(1) Montrer que E est de dimension finie ; préciser sa dimension ; trouver une base de E.
(2) Même question avec des fonctions de classe C^2 telles que $f_{|[x_i,x_{i+1}]}$ soit polynomiale de degré 3 (on parle de *fonctions splines*).

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, F et G 2 sous-espaces vectoriels de même dimension.

Montrer qu'il existe un sous-espace X de E tel que $E = F \oplus X = G \oplus X$.

Exercice 1.1.4. $\boxed{\textbf{F}}$

Soient F, G, H 3 sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E.

(1) Montrer l'implication $F \subset G \Rightarrow F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$.
(2) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 1.1.5. $\boxed{\textbf{I}}$

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I un ensemble d'indices non vide, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On suppose que

(R) $$\forall (i,j) \in I^2,\ \exists k \in I,\ F_i \cup F_j \subset F_k$$

(1) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
(2) Trouver un exemple d'espace vectoriel E avec $I = \mathbb{N}$, les F_i étant tous distincts, vérifiant la propriété (R).

1.2. **Translations, sous-espaces affines.**

Exercice 1.2.1. **D C** Lemme de Kakutani
Soient C_1 et C_2 deux parties convexes non vides disjointes de E espace affine. On suppose que $C_1 \cup C_2 \neq E$; soit $x \notin C_1 \cup C_2$ et on désigne par Γ_i l'*enveloppe convexe* de $C_i \cup \{x\}$ ($i \in \{1,2\}$) i.e. le plus petit convexe contenant $C_i \cup \{x\}$, soit encore l'ensemble des barycentres positifs des éléments de C_i et de x.
Montrer que l'un au moins des ensembles $\Gamma_1 \cap C_2$, $\Gamma_2 \cap C_1$ est vide (on pourra d'abord faire le raisonnement en dimension 2 puis s'y ramener).

Exercice 1.2.2. **I**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une partie Γ de E est un cône convexe ssi

$$\forall (a,b,\lambda,\mu) \in \Gamma^2 \times \mathbb{R}_+^2,\ \lambda a + \mu b \in \Gamma$$

(on supposera par la suite que Γ est un cône convexe). On notera $\Gamma^- = \{x | -x \in \Gamma\}$ (cône opposé à Γ). Le faîte du cône est $F = \Gamma \cap \Gamma^-$. Soit H un hyperplan défini par une forme linéaire φ de E telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$. On posera :

$$H_+ = \{x | \varphi(x) \geqslant 0\} \quad H_+^* = \{x | \varphi(x) > 0\}$$

(et des définitions analogues pour H_- et H_-^*).
On dit que H est latéral pour Γ si $(\Gamma \subset H_+)$ ou $(\Gamma \subset H_-)$ et que H est strictement latéral pour Γ si $H \cap \Gamma = F$.
Enfin Γ est de type fini ssi il existe une famille finie de vecteurs $(a_1, \ldots, a_p)$ telle que

$$x \in \Gamma \Leftrightarrow \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}_+^p, \quad x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i.$$

(1) Montrer que Γ est convexe (on prendra ici la structure affine de E), que F est un sous-espace vectoriel et que $\Gamma \setminus F$ est convexe.
(2) Montrer que, si H est latéral, il contient F ; montrer que tout hyperplan strictement latéral est latéral.
(3) Montrer que, si Γ est de type fini, il en est de même de $\Gamma \cap H$.

Exercice 1.2.3. **D**
Soit (a,b,c) un triplet de points indépendants d'un plan affine, (p,q,r) un triplet de points tels que

$$p \in D_{bc}, \quad q \in D_{ca}, \quad r \in D_{ab}.$$

On rappelle que $\overline{uv}$ représente la différence des abscisses de deux points (u,v) d'une droite D relativement à un repère affine de D.
Prouver les équivalences :

(1) $\overline{pb}.\overline{qc}.\overline{ra} = \overline{pc}.\overline{qa}.\overline{rb} \Leftrightarrow (p,q,r)$ alignés.
(2) $\overline{pb}.\overline{qc}.\overline{ra} + \overline{pc}.\overline{qa}.\overline{rb} = 0 \Leftrightarrow (D_{ap}, D_{bq}, D_{cr})$ appartiennent à un même faisceau i.e. sont concourantes ou parallèles.
On pourra montrer que 3 droites D_i d'équations $u_i x + v_i y + w_i = 0$ sont concourantes ou parallèles ssi $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$

EXERCICE 1.2.4. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient 7 points (a, b, c, p, q, r, s) deux à deux distincts tels que (a, b, c) ne soient pas alignés, $\{p, s\} \subset D_{bc}$, $s \in D_{qr}$, $r \in D_{ab}$, $q \in D_{ac}$ et (D_{ap}, D_{bq}, D_{cr}) appartiennent à un même faisceau (cf exo précédent).
Calculer $\dfrac{\overline{pb}}{\overline{pc}} + \dfrac{\overline{sb}}{\overline{sc}}$.

1.3. Applications linéaires.

EXERCICE 1.3.1. $\boxed{\textbf{I}}$
Si $a \in \mathbb{R}$, $u \in E$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.
Résoudre l'équation $x + af(x) = u$ où $x \in E$.

EXERCICE 1.3.2. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g dans $\mathcal{L}(E)$.

(1) Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$.
(2) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im}\, f = E$.

EXERCICE 1.3.3. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g dans $\mathcal{L}(E)$.

(1) Montrer que f et g sont inversibles ssi $g \circ f$ et $f \circ g$ le sont.
(2) Montrer que $\mathrm{Id}_E - f \circ g \in \mathrm{GL}(E) \Rightarrow \mathrm{Id}_E - g \circ f \in \mathrm{GL}(E)$.

EXERCICE 1.3.4. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q 2 projecteurs de E.

(1) Donner une C.N.S. pour que $p + q$ soit un projecteur.
(2) Déterminer alors $\mathrm{Ker}(p + q)$ et $\mathrm{Im}(p + q)$.

EXERCICE 1.3.5. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p un projecteur de E et $q = \mathrm{Id}_E - p$. On pose

$$P = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \exists u \in \mathcal{L}(E),\ f = u \circ p\}$$
$$Q = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \exists v \in \mathcal{L}(E),\ g = v \circ q\}.$$

Montrer que P et Q sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

EXERCICE 1.3.6. $\boxed{\textbf{I}}$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q 2 projecteurs de E. On suppose que $p \circ q = 0$.

(1) Que penser de $r = p + q - q \circ p$?
(2) Déterminer $\mathrm{Im}\, r$ et $\mathrm{Ker}\, r$.

---

2. Dimension des espaces vectoriels

2.1. **Familles de vecteurs.**

Exercice 2.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, quel est le rang du système $f_1,\ f_2,\ f_3$ où

$$f_1(x)=\sin(x+1),\ \ f_2(x)=\sin(x+2),\ \ f_3(x)=\sin(x+3).$$

Exercice 2.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$
Montrer que les familles suivantes de vecteurs de $\mathcal{F}(E,R)$ sont libres :

(1) $E=]0,1[$, $f_a\ :x\mapsto \dfrac{1}{1-ax}$, $a\in]0,1[$,
(2) $E=\mathbb{R}^2$, $f_{a,b}\ :(x,y)\mapsto e^{ax+by}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, généraliser,
(3) $E=]0,+\infty[^2$, $f_{a,b}\ :(x,y)\mapsto x^ay^b$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

2.2. **Dimension d'un espace vectoriel.**

Exercice 2.2.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Déterminer une base et la dimension de $F=\mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3,f_4)\subset\mathcal{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$ où

$$f_1(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ \ f_2(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ \ f_3(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ f_4(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 2.2.2. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des applications de E dans E qui sont constantes.

(1) Montrer que $\mathcal{A}(E)$ est un espace vectoriel.
(2) Calculer $\dim\mathcal{A}(E)$.

Exercice 2.2.3. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit E le sous-espace vectoriel des applications de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ qui s'écrivent sous la forme $f(x,y)=\sum\limits_{i\leqslant 2,j\leqslant 2}a_{i,j}x^iy^j$.

(1) Déterminer $\dim E$.
(2) On définit l'application $u\ :f\in E\mapsto\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$. Montrer que u est un endomorphisme de E dont on déterminera l'image et le noyau.

2.3. Rang d'une application linéaire.

EXERCICE 2.3.1. **F**

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, u et v 2 endomorphismes de E tels que $f \circ g = 0$, $f + g$ inversible. Montrer que $\operatorname{Rg}(f+g) = \operatorname{Rg} f + \operatorname{Rg} g$.

EXERCICE 2.3.2. **I**

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, E)$. On fait les hypothèses : $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g \circ f = f$.

(1) Montrer que $E = \operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Ker} f$.
(2) Comparer les rangs de f et g.

EXERCICE 2.3.3. **I**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \neq 0$.
Montrer que

$$f \text{ est un isomorphisme ssi } \forall g \in \mathcal{L}(E),\ \operatorname{Rg} f \circ g = \operatorname{Rg} g \circ f.$$

EXERCICE 2.3.4. **I**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Si $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que

$$\dim \operatorname{Ker} f^2 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f.$$

EXERCICE 2.3.5. **I**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Si $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ sont telles que

$$f + g = \operatorname{Id}_E \text{ et } \operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) \leqslant \dim E$$

alors montrer que f et g sont 2 projecteurs.

EXERCICE 2.3.6. **I C**

Soient E, F, G 3 espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

(1) Montrer que $\operatorname{Ker}(g_{|\operatorname{Im} f}) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.
(2) Montrer que $\operatorname{Rg}(g \circ f) = \operatorname{Rg}(f) - \dim(\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f)$.
(3) En déduire que $\operatorname{Rg}(g \circ f) \geqslant \operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) - \dim F$.

EXERCICE 2.3.7. **D**

Soient E et F 2 espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. Montrer l'équivalence

$$\operatorname{Rg}(f+g) = \operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g & = E \\ \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g & = \{0\} \end{cases}$$

---

3. Polynômes

3.1. **Polynômes à une indéterminée.**

Exercice 3.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, a, b, c, 3 réels.
Déterminer une base de E dans laquelle les coordonnées de P sont : $P(a)$, $P'(b)$, $P''(c)$.

Exercice 3.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel qu'il existe $r > 0$ avec $P(k) = r^k$ pour tout $k \in [1, n]$.
Calculer $P(n+1)$.

3.2. **Fonctions polynomiales et rationnelles.**

Exercice 3.2.1. $\boxed{\textbf{I C}}$

Soit (P_n) la suite de polynômes définie par : $P_0 = 1$, $P_1 = -X$, $P_{n+2} + XP_{n+1} + P_n = 0$, $n \geqslant 0$.

(1) Expliciter P_n.
(2) Quelles sont les racines de P_n ?

Exercice 3.2.2. $\boxed{\textbf{I T}}$

Soit $P(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

(1) Vérifier que P a une racine rationnelle, factoriser P.
(2) Montrer que les images D et E des racines de P' sont à l'intérieur du triangle ABC formé des images des racines de P.
(3) Montrer qu'il existe une ellipse de foyers D et E inscrite dans le triangle ABC.

Exercice 3.2.3. $\boxed{\textbf{F C}}$

Soit $P = aX^2 + bX + c$ et $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ 2 polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a\alpha \neq 0$. Montrer qu'ils ont une racine commune ssi $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$.

Cet exercice utilise la théorie des déterminants qui est vue au chapitre 2 à partir de la page 54.

Exercice 3.2.4. $\boxed{\textbf{I}}$

On considère les endomorphismes D et Δ de $\mathbb{R}[X]$ définis par :

$$D(P) = P' \text{ et } \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

Montrer, en justifiant les sommes, que l'on peut écrire

$$\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} D^n \text{ et } D = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Delta^n.$$

Interprétation ? (Réservée aux étudiants de deuxième année.)

Exercice 3.2.5. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel qu'il existe 4 entiers distincts λ_i tels que $P(\lambda_i) = 7$ pour $i \in [1, 4]$.
Montrer que l'équation $P(n) = 14$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3.2.6. $\boxed{\textbf{D}}$
Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts. Montrer que

$$\frac{z_1}{z_2 - z_3} + \frac{z_2}{z_3 - z_1} + \frac{z_3}{z_1 - z_2} = 0 \Rightarrow \frac{z_1}{(z_2 - z_3)^2} + \frac{z_2}{(z_3 - z_1)^2} + \frac{z_3}{(z_1 - z_2)^2} = 0.$$

La réciproque est-elle vraie ?
Étudier le cas où les z_i sont réels.

Exercice 3.2.7. $\boxed{\textbf{F}}$
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = k + 1.$$

Exercice 3.2.8. $\boxed{\textbf{F C}}$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$; on considère le polynôme $P(X) = (X-1)^n - e^{2i\alpha}(X+1)^n$.

(1) Déterminer les racines de P.
(2) En déduire une expression simple de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{cotan}(x + k\pi/n) \quad (nx \not\equiv 0[\pi])$

Exercice 3.2.9. $\boxed{\textbf{I}}$
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(X^2) = P(X+1)P(X-1).$$

Exercice 3.2.10. $\boxed{\textbf{I C}}$ Résolution de l'équation du troisième degré
L'objet de cet exercice est de résoudre l'équation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b, c sont des nombres complexes.

(1) Montrer que l'on peut, par translation, se ramener au cas de l'équation réduite

$$x^3 + px + q = 0. \tag{1}$$

(2) On pose $x = u + v$, montrer que, en choisissant $3uv = -p$, u^3 et v^3 sont racines de l'équation $U^2 + qU - \dfrac{p^3}{27} = 0$.
(3) En déduire une méthode de résolution de l'équation réduite (1).
(4) Si p et q sont des réels vérifiant $\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 > 0$, donner les solutions de (1) sous forme explicite.

EXERCICE 3.2.11. **I C T**
Soient $A(X)=X^4+bX^2+cX+d$ et $B(X)=X^2+\alpha X+\beta$ 2 polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$; on suppose que $bc\neq 0$.
Montrer que les couples (α,β) tels que $B|A$ sont ceux qui vérifient les conditions :

$$\alpha\neq 0,\ \beta=\frac{1}{2}(\alpha^2+b-c/\alpha) \text{ et } \alpha^6+2b\alpha^4+(b^2-4d)\alpha^2-c^2=0.$$

Que penser de ce résultat ?

3.3. **Polynômes scindés.**

EXERCICE 3.3.1. **D C**
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme réel non nul de degré $n\geqslant 2$.

(1) Montrer que si P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, alors P' l'est également.
(2) On suppose que $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k$ est tel qu'il existe $j\in[\![1,n-1]\!]$ tel que $a_j^2<a_{j-1}a_{j+1}$. Montrer que P n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (on montrera que, si Q est un polynôme scindé, alors $\forall t\in\mathbb{R},\ Q(t)Q''(t)-Q'(t)^2\leqslant 0$).

EXERCICE 3.3.2. **F C**
Trouver les racines de $P(X)=X^4-5X^3+9X^2-15X+18$ sachant qu'il existe 2 racines dont le produit vaut 6.

3.4. **Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$.**

EXERCICE 3.4.1. **I**
On se propose de déterminer tous les couples de polynômes réels (P,Q) vérifiant :

$$P^2+(1-X^2)Q^2=1. \tag{1}$$

(1) Par dérivation, montrer que $Q|P'$; en déduire que $Q^2=\dfrac{1}{n^2}P'^2$ avec $n=\deg P>0$.
(2) En déduire que (2) $\quad(1-X^2)P''-XP'+n^2P=0$.
(3) On définit $T_n\in\mathbb{R}[X]$ par $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$; montrer que T_n est solution de (2), en déduire toutes les solutions de (1) (T_n est appelé polynôme de Chebychev, on le divise parfois par 2^{n-1} pour qu'il soit normalisé—$n\geqslant 1$—).

EXERCICE 3.4.2. **I**
On considère le polynôme $F_{m,\theta}=X^{2m}-2X^m\cos m\theta+1\in\mathbb{C}[X]$ où $m\in\mathbb{N}^*$.

(1) Effectuer la division euclidienne de $F_{m,\theta}$ par $F_{1,\theta}$ (on supposera dans un premier temps $\sin\theta\neq 0$ et on fera intervenir des quantités $\dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$).
(2) Calculer le p.g.c.d. de $F_{m,\theta}$ et $F_{n,\theta}$ pour $m,\ n>0$.

EXERCICE 3.4.3. **F T**
Soit $P = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ et $Q = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$.

(1) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, trouver 2 polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$ avec $\deg U < \deg Q$ et $\deg V < \deg P$.
(2) En déduire un polynôme de degré aussi petit que possible dont le reste de la division par P est $X^2 + X + 1$ et dont le reste de la division par Q est $2X^2 - 3$.

EXERCICE 3.4.4. **F**
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que, si $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$ alors $P(X^n)$ est divisible par $X^n - 1$.

3.5. Étude locale d'une fraction rationnelle.

EXERCICE 3.5.1. **F C**
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\})$ l'ensemble des racines de P et A' l'ensemble des racines de P' ; décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{P'}{P}$.
En déduire que :

$$\forall z \in A' \setminus A \ : \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j z}{|z - a_j|^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j a_j}{|z - a_j|^2}$$

(où α_j est l'ordre de multiplicité de a_j) et en conclure que A' est inclus dans l'*enveloppe convexe* de A.

EXERCICE 3.5.2. **I T**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^n + 1$.
Montrer que

$$F_n(X) = \frac{X^n - 1}{(X^2 - 1)(X^n + 1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(X - \alpha_j)(X - \bar{\alpha}_j)}.$$

EXERCICE 3.5.3. **F**
Simplifier l'expression suivante :

$$\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(X + k)(X + k + 1)(X + k + 2)}.$$

EXERCICE 3.5.4. **I C**
Calculer les dérivées successives de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$.

EXERCICE 3.5.5. **F**
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ admettant n racines réelles distinctes non nulles : $x_1, \dots, x_n$.
On écrit $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$, $a_n \neq 0$.
Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i P'(x_i)} = -\dfrac{1}{a_n}$.

Exercice 3.5.6. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $(Z_0, \ldots, Z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ deux à deux distincts tels que

$$\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], P(Z_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(Z_i).$$

On pose $\varphi(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - Z_i)$.

(1) Montrer que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ on a $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i\varphi(Z_0)}{\varphi'(Z_i)(Z_0 - Z_i)} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
(2) Montrer que $\varphi(X) = \varphi(Z_0) + \dfrac{1}{n}(X - Z_0)\varphi'(X)$.
(3) En déduire le développement de φ suivant les puissances de $(X - Z_0)$.
(4) Trouver tous les $n+1$-uplets $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$ vérifiant la condition initiale.

---

4. Calcul matriciel

4.1. **Opérations sur les matrices.**

Exercice 4.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Structure de l'ensemble des matrices $G = \{A_n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{C}\}$ muni de la multiplication des matrices.

Exercice 4.1.2. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit A et B 2 matrices carrées d'ordre n telles que $AB - BA = B$.
Montrer que, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, $AB^p = B^p(A + pI)$.
En déduire que B est singulière (on dit qu'une matrice est *singulière* si elle n'est pas inversible).

Exercice 4.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit A, B, C des matrices carrées d'ordre n telles que $ABC = 0$.
Montrer que, si aucune n'est nulle, deux d'entre-elles sont *singulières* (i.e. non inversibles).
Généralisation à $A_1A_2 \ldots A_p = 0$.

Exercice 4.1.4. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient A et B 2 matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on suppose qu'il existe $a \neq 0$ et $b \neq 0$ tels que

$$AB = aA + bB.$$

Montrer que $AB = BA$.

Exercice 4.1.5. **I T**

Chercher toutes les matrices $(X,Y)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ vérifiant le système

$$\begin{cases} XYX &= I_2 \\ YXY &= I_2 \end{cases}.$$

Exercice 4.1.6. **F**

Soit $M=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $K=\{xM,\ x\in\mathbb{R}\}$.

(1) Montrer que $(K,+,\times)$ est un corps.
(2) A-t-on $K\setminus\{0\}\subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 4.1.7. **F**

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que B et $B-AB^{-1}A$ soient inversibles.

Résoudre en $(X,Y)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ le système $\begin{cases} AX-BY &= 0 \\ BX-AY &= I_n \end{cases}$.

Exercice 4.1.8. **F T** **Égalité de Wagner**

Soient A, B, C 3 matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ quelconques, montrer que

$$(AB-BA)^2C=C(AB-BA)^2.$$

Exercice 4.1.9. **I**

Soit $M=\begin{pmatrix}A&B\\B^{\mathrm{T}}&C\end{pmatrix}$ où les matrices A et C sont des matrices carrées symétriques.

Montrer que, si A et $S=C-B^{\mathrm{T}}A^{-1}B$ sont inversibles, alors M est inversible.
Calculer alors M^{-1}.

Exercice 4.1.10. **F C**

Montrer que, si A et B sont 2 matrices carrées complexes d'ordre n, on a :

$$\det\begin{bmatrix}A&B\\-B&A\end{bmatrix}=\det(A+iB)\det(A-iB)$$

Exercice 4.1.11. **I C**

Montrer que, pour tout hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $H\cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\neq\emptyset$.

Exercice 4.1.12. **I**

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on suppose qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall p\in\{1,2,3,4\},\ A^p=\lambda^p(U+pV).$$

Montrer que, pour tout entier $p\neq 0$, $A^p=\lambda^p(U+pV)$.

4.2. **Matrices et applications linéaires.**

EXERCICE 4.2.1. $\boxed{\textbf{F}}$
On suppose a et b distincts dans $\mathbb{C}$ et on considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_n[X]$ défini par :

$$\varphi(P(X)) = (X-a)(X-b)P'(X) - n(X - \frac{a+b}{2})P(X).$$

Écrire la matrice de φ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3, \ldots, X^n)$ puis dans la base $(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n)$ où $P_k(X) = (X-a)^{n-k}(X-b)^k$.

EXERCICE 4.2.2. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E,F)$.

(1) On suppose que $\mathrm{Rg}(v) \leqslant \mathrm{Rg}(u)$.
  a) Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{GL}(F)$, $d \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ v = u \circ d$.
  b) Montrer qu'il existe $\delta \in \mathrm{GL}(E)$, $\gamma \in \mathcal{L}(F)$ tels que $v \circ \delta = \gamma \circ u$.

(2) Si $\mathrm{Rg}(u) = \mathrm{Rg}(v)$ alors montrer qu'il existe $g \in \mathrm{GL}(F)$, $d \in \mathrm{GL}(E)$ tels que $g \circ v = u \circ d$.

EXERCICE 4.2.3. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que AB est la matrice d'un projecteur de rang 2, que $\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}\, B = 2$ et que $BA = I_2$.

4.3. **Rang d'une matrice.**

EXERCICE 4.3.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Quel est le rang de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n+1 & \ldots & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n & \ldots & 3n-2 \\ 3n-2 & 3n-1 & \ldots & 4n-3 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4.3.2. $\boxed{\textbf{D}}$
Soit $f\ : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ différente des applications constantes : $A \mapsto 0$ et $A \mapsto 1$. On suppose que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ f(AB) = f(A)f(B).$$

Montrer que A non inversible ssi $f(A) = 0$.

EXERCICE 4.3.3. $\boxed{\textbf{I C}}$
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. Montrer l'équivalence suivante

$$\mathrm{Rg}(A) = r \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (X_1, \ldots, X_r) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^p \\ \exists (Y_1, \ldots, Y_r) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p \end{cases}, \text{familles libres telles que} A = X_1 Y_1^{\mathrm{T}} + \cdots + X_r Y_r^{\mathrm{T}}.$$

Exercice 4.3.4. **I**
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et s un entier naturel. Montrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Rg}(A) \leqslant s \Leftrightarrow \exists q > 0,\ \exists B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \mid AB = 0 \text{ et } \mathrm{Rg}(B) \geqslant p - s.$$

4.4. **Systèmes d'équations linéaires.**

Exercice 4.4.1. **F**

Résoudre le système : $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = & 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + \cdots + x_n & = & \beta \\ \quad \ldots & & \\ x_1 + x_2 + \cdots + \alpha x_n & = & \beta^{n-1} \end{cases}$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4.4.2. **F**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$ où $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$. Calculer A^{-1}.

Exercice 4.4.3. **D CT**
Soit $H_n = (h_{ij})$ où $h_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$ la *matrice de Hilbert* d'ordre n ; à l'aide de

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{X+j-1}$$

calculer l'inverse de H_n.
Terminer le calcul lorsque $n = 4$. Qu'en penser ?

---

5. Déterminants

5.1. **Groupe symétrique.**

Exercice 5.1.1. **I**
Soit p premier et G le sous-groupe de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ formé des matrices inversibles (que l'on écrit $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$).
Montrer que G est un groupe multiplicatif. Donner le nombre d'éléments de G.

Exercice 5.1.2. **F**
Calculer $uvu^{-1}v^{-1}$ où $u = (1\,2\,3)$ et $v = (4\,5\,6)$ cycles dans $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geqslant 6$.

Exercice 5.1.3. **I C**
Calculer le produit de 2 transpositions (3 cas) ; en déduire que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les cycles d'ordre 3.
Montrer alors que $\{(1\,2\,3), (1\,2\,4), \ldots, (1\,2\,n)\}$ est générateur de $\mathcal{A}_n$.

EXERCICE 5.1.4. **I**
Soit $n \geqslant 3$ et (A, B) une partition de $[1, n]$ telle que

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \text{ où } 1 \leqslant a_1 < a_2 < \dots < a_p \leqslant n,$$
$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-p}\} \text{ où } 1 \leqslant b_1 < b_2 < \dots < b_{n-p} \leqslant n.$$

On considère la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & p+1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_p & b_1 & \dots & b_{n-p} \end{pmatrix}$.
Déterminer la signature de σ.
Exemple : $A = \{n-p+1, \dots, n\}$, $B = \{1, 2, \dots, n-p\}$.

5.2. **Déterminants.**

EXERCICE 5.2.1. **I**
Calculer le déterminant suivant :

$$A_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

EXERCICE 5.2.2. **F**

Calculer $A_n = \begin{vmatrix} \sin(2\alpha_1) & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1 + \alpha_n) \\ \sin(\alpha_2 + \alpha_1) & \sin(2\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_2 + \alpha_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ \sin(\alpha_n + \alpha_1) & \sin(\alpha_n + \alpha_2) & \dots & \sin(2\alpha_n) \end{vmatrix}$.

EXERCICE 5.2.3. **F**
Calculer $\det(a_{ij}) = \Delta_n$ où $a_{ii} = 2$, $a_{ii+1} = 1$, $a_{ii-1} = 3$ et $a_{ij} = 0$ si $|i - j| \geqslant 2$.

EXERCICE 5.2.4. **I C** Déterminants de Vandermonde
Soient $(x_1, \dots, x_n)$ n complexes ($n \geqslant 2$), montrer que le déterminant de Vandermonde

$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & \dots & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ vaut $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

EXERCICE 5.2.5. **I**
On prend $E = \mathbb{K}^n$ avec $n \geqslant 2$, f et g 2 endomorphismes de E. Pour $i < j$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ on définit

$$\delta_{ij} = \det(x_1, \dots, f(x_i), \dots, g(x_j), \dots, x_n)$$

où les seuls vecteurs x_i et x_j ont été remplacés par $f(x_i)$ et $g(x_j)$. On définit de même δ_{ij} pour $i > j$.
Montrer qu'il existe $a(f, g) \in \mathbb{K}$ tel que

$$\sum_{i \neq j} \delta_{ij} = a(f, g) \det(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

et donner l'expression de $a(f, g)$ en fonction de $\mathrm{Tr}(f)$, $\mathrm{Tr}(g)$ et $\mathrm{Tr}(f \circ g)$.

EXERCICE 5.2.6. $\boxed{\text{D}}$

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, résoudre le système $\begin{cases} yz-x^2 &= a\\ zx-y^2 &= b\\ xy-z^2 &= c\end{cases}$ en (x,y,z).

---

1. Indications

Indication 1.1.1

(1) Immédiat, les degrés sont étagés.
(2) Écrire $R = PM - Q(X^3+1)$ avec $\deg R \leqslant 2$.
(3) Pour montrer que $E = E(S) + E(T)$, décomposer la fraction rationnelle $\frac{R(X)}{X^3+1}$, $E(S)\cap E(T) = \{0\}$ est immédiat.

Indication 1.1.2

(1) S'intéresser à E' le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f continues sur $[x_1, x_n]$ telles que $f_{|[x_i,x_{i+1}]}$ soit affine par morceaux. $\dim E' = n$ et il est facile de passer de E' à E.
(2) On utilise le même procédé.

Indication 1.1.3 Prendre une base de $F\cap G$ que l'on complète en une base de F et de G puis de E et construire X en définissant une base. On peut aussi raisonner par récurrence sur $\dim F$.

Indication 1.1.4

(1) $F+(G\cap H)\subset(F+G)\cap(F+H)$ immédiat, pour l'inclusion dans l'autre sens, remarquer que $(F+G)\cap(F+H) = G\cap(F+H)$ puis écrire $x\in G\cap(F+H)$ sous la forme $x = y+z$ avec $x\in G$, $y\in F$ et $z\in H$.
(2) Prendre un contre-exemple dans le plan vectoriel.

Indication 1.1.5

(1) Les vérifications sont immédiates.
(2) Penser à $E = \mathbb{K}[x]$.

Indication 1.2.1 Faire un raisonnement par l'absurde, si $\Gamma_1\cap C_2$ est non vide, soit $y_2 = tx_1 + (1-t)x \in C_2$, de même pour $\Gamma_2\cap C_1$, soit $y_1 = t'x_2 + (1-t')x\in C_1$ où $x_i\in C_i$ alors montrer que les segments $[x_1,y_1]$ et $[x_2,y_2]$ se coupent.

Indication 1.2.2

(1) Γ convexe et F sous-espace vectoriel : immédiat. Pour prouver que $\Gamma\setminus F$ est convexe, raisonner par l'absurde.
(2) Première question : immédiate, raisonner par l'absurde pour la deuxième question.
(3) Répartir les générateurs de Γ selon qu'ils sont dans H_+^*, H_-^* et H (les x_i dans H_+^*, les y_j dans H_-^* et faire intervenir les vecteurs $v_{ij} = \varphi(x_i)y_j - \varphi(y_j)x_i$.

Indication 1.2.3

(1) Écrire les coordonnées barycentriques de p, q, r dans la base affine (a,b,c) et exprimer la condition d'alignement à l'aide d'un déterminant.
(2) On écrit $u\alpha+v\beta+w\gamma = 0$ une équation barycentrique de D_{ap}, on exprime que D_{ap} passe par a et p, on fait de même pour les 2 autres droites. On exprime enfin que les droites appartiennent à un même faisceau.

Indication 1.2.4 On trouve $\dfrac{\overline{pb}}{\overline{pc}} + \dfrac{\overline{sb}}{\overline{sc}} = 0$.

Indication 1.3.1 Composer par f et f^2 et distinguer les cas $a\neq -1$, $a=-1$.

Indication 1.3.2 Remarquer que : $\operatorname{Ker}(g \circ f) \supset \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$, les 2 questions proposées sont donc équivalentes à

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \text{ et } \operatorname{Im}(g \circ f) \supset \operatorname{Im} g \Leftrightarrow \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = E.$$

Indication 1.3.3

(1) C'est une propriété générale des applications (la linéarité n'intervient pas).
(2) Faire intervenir $\mathrm{Id}_E + g \circ h \circ f$ où $h = (\mathrm{Id}_E - f \circ g)^{-1}$.

Indication 1.3.4

(1) La C.N.S. est $p \circ q = q \circ p = 0$.
(2) Montrer que $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Indication 1.3.5 Si $f \in P \cap Q$ écrire $f = u \circ p^2 = f \circ p$, puis, si $f \in \mathcal{L}(E)$, $f = f \circ (p+q)$.

Indication 1.3.6 r est un projecteur, $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Indication 2.1.1 Penser aux formules d'addition des sinus.

Indication 2.1.2

(1) Utiliser l'unicité de la décomposition d'une fraction rationnelle.
(2) Soit $I \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble fini, se ramener au cas où $I \subset J \times K$ où J et K sont finis, montrer ensuite que la famille $f_a \ : x \mapsto e^{ax}$ est libre. La généralisation se fait avec $f_a(x) = e^{(a|x)}$ où $(a|x)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
(3) Même chose qu'à la question précédente.

Indication 2.2.1 On a des relations simples entre f_1, f_2 et f_3, f_4.

Indication 2.2.2 Utiliser un isomorphisme.

Indication 2.2.3

(1) La famille $(1, x, y, x^2, xy, y^2, x^2y, xy^2, x^2y^2)$ est une base.
(2) On trouve $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(1, x, y, xy)$ et $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(1, x, y, x^2, y^2)$.

Indication 2.3.1 Utiliser $\dim F + \dim G \geqslant \dim(F+G)$ avec $F = f(E)$, $G = g(E)$.

Indication 2.3.2

(1) Facile, on montre $E = \operatorname{Im} g + \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g \operatorname{Ker} f = \{0\}$.
(2) On obtient $\operatorname{Rg}(f) = \operatorname{Rg}(g)$.

Indication 2.3.3 Pour la réciproque, montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E, $F \neq E$ alors il existe H hyperplan tel que $F \subset H$.

Indication 2.3.4 Compléter une base de $\operatorname{Ker} f$ en une base de $\operatorname{Ker} f^2$ par $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ et prouver que la famille $(f(\varepsilon_i))$ est libre.

Indication 2.3.5 On montre que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$ puis on prouve que $f^2 = f$.

Indication 2.3.6

(1) Immédiat.
(2) Appliquer la formule du rang à $g_{|\operatorname{Im} f}$.
(3) Utiliser la formule $\dim(F \cap G) + \dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

Indication 2.3.7 Utiliser $\operatorname{Rg}(f+g) \leqslant \dim(f(E) + g(E)) = \operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$.
En déduire que $(f+g)(E) = f(E) + g(E)$ et conclure pour le sens direct.
Pour la réciproque, prouver que $f(E) \oplus g(E) = (f+g)(E)$.

Indication 3.1.1 Utiliser les polynômes 1, $X-a$, $(X-b)^2$.

Indication 3.1.2 Utiliser l'application $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$ et calculer $\Delta^n(P)$.

Indication 3.2.1

(1) Résoudre la récurrence double.
(2) Poser $x = 2\cos\theta$.

Indication 3.2.2

(1) On cherche la racine sous la forme a/b où $a|3$ et $b|2$.
(2) Les racines de P' sont réelles.
(3) L'ellipse admet $\frac{9}{4}(x-1/6)^2+4y^2-1=0$ comme équation.

Indication 3.2.3 $\Rightarrow$ Montrer que P, XP, Q, XQ sont linéairement dépendants.
$\Leftarrow$ distinguer les cas : P et Q proportionnels, P et Q non proportionnels.

Indication 3.2.4 Les sommes sont finies, penser ensuite à la formule de Taylor, utiliser la base de Hilbert $e_p=\dfrac{X(X-1)(\ldots)(X-p+1)}{p!}$. Pour l'interprétation, penser à l'exponentielle et au logarithme.

Indication 3.2.5 Utiliser la division dans $\mathbb{Z}[X]$ de $P-7$ par $Q(X)=\prod_{i=1}^{4}(X-\lambda_i)$.

Indication 3.2.6 Si $P(X)=(X-z_1)(X-z_2)(X-z_3)$ alors $P'(z_1)=(z_1-z_2)(z_1-z_3)$, il suffit donc de prouver que si $A=\sum_{i=1}^{3} z_iP'(z_i)=0$ alors $B=\sum_{i=1}^{3} z_i[P'(z_i)]^2=0$. Sur $\mathbb{C}$, la réciproque est fausse.

Indication 3.2.7 Utiliser $Q(x)=\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$.

Indication 3.2.8 Résolution de $z^n=a$ puis utiliser le produit des racines.

Indication 3.2.9 Si P n'est pas constant, obtenir une contradiction en considérant l'ensemble de ses racines.

Indication 3.2.10

(1) Poser $y=x+\frac{a}{3}$.
(2) On a $u^3+v^3=-q$ et $u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}$.
(3) Il suffit de résoudre l'équation du second degré, attention au choix de v (qui dépend de u).
(4) On obtient les formules de Cardan avec des racines cubiques réelles.

Indication 3.2.11 On fait la division euclidienne de A par B. La méthode proposée permet de résoudre l'équation du quatrième degré.

Indication 3.3.1

(1) Penser au théorème de Rolle et bien gérer les racines multiples.
(2) Si Q est scindé sur $\mathbb{R}$ alors, en calculant $\frac{Q'}{Q}$, montrer que $\frac{Q''Q-Q'^2}{Q^2}<0$ et appliquer ceci au polynôme $Q=P^{(j-1)}$.

Indication 3.3.2 En utilisant les fonctions symétriques élémentaires, $p_1=6$, $p_2=3$ (produits des racines prises 2 à 2) on trouve s_1 et s_2 (sommes des racines).

Indication 3.4.1

(1) $P\wedge Q=1$ puis on dérive, enfin on montre que P' et Q sont proportionnels.
(2) Remplacer Q^2 puis dériver.
(3) Trouver une relation de récurrence entre T_n, T_{n-1}, T_{n-2}. T_n vérifie (2) : calcul simple de dérivée. On montre ensuite que les seules solutions polynomiales de (2) sont de degré n. Les solutions sont alors $(\varepsilon T_n,\dfrac{\varepsilon\varepsilon'}{n}T_n')$ $n\in\mathbb{N}^*$.

Indication 3.4.2

(1) Faire une récurrence et des calculs...
(2) Si on pose $d=m\wedge n$ alors montrer que $F_{m,\theta}\wedge F_{n,\theta}=F_{d,\theta}$.

Indication 3.4.3 On trouve : $U=X^3-X^2-5X+7$ et $V=-X^3+X^2+4X-5$ puis, après calculs, le polynôme cherché est $-3X^7+5X^6+19X^5-58X^4+5X^3+134X^2-158X+57$.

Indication 3.4.4 On a $P(1) = 0$ et $1 = e^{i2k\pi/n})^n$.

Indication 3.5.1 La décomposition de $\frac{P'}{P}$ c'est du cours, prendre le conjugué ensuite et penser aux barycentres.

Indication 3.5.2 Distinguer les cas $n = 2p$, $n = 2p + 1$ et faire des calculs. Il y a une astuce pour ne pas faire tous les calculs, faire intervenir le polynôme $Q_n(X) = \frac{X^n-1}{X-1}$ et décomposer $(X + 1)F_n(X)$.

Indication 3.5.3 Penser à décomposer la fraction rationnelle (il y a une petite astuce).

Indication 3.5.4 Décomposer la fraction rationnelle.

Indication 3.5.5 Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{P}$.

Indication 3.5.6

(1) Calculer $\frac{\varphi(Z_0)}{\varphi'(Z_0)(Z_0-Z_i)}$.
(2) Faire la différence et utiliser le (1).
(3) Dériver et montrer que $\varphi(X) = \varphi(Z_0) + (X - Z_0)^n$.
(4) On obtient $Z_k = Z_0 + \alpha e^{2ik\pi/n}$ (en renumérotant).

Indication 4.1.1 On a un groupe mais qui n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ si $\alpha = 0$.

Indication 4.1.2 Relation immédiate par récurrence, raisonner ensuite par l'absurde.

Indication 4.1.3 Distinguer les différents cas en raisonnant par l'absurde. Généralisation immédiate.

Indication 4.1.4 $\frac{1}{b}(A - bI)$ et $\frac{1}{a}(B - aI)$ sont inverses l'une de l'autre.

Indication 4.1.5 Remarquer que $X = Y$ puis faire les calculs...

Indication 4.1.6 L'inverse de xM pour $x \neq 0$ est $\frac{M}{4x}$ mais $K \setminus \{0\} \not\subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

Indication 4.1.7 Exprimer Y et reporter.

Indication 4.1.8 Remarquer que $\mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$ puis calculer $(AB - BA)^2$.

Indication 4.1.9 Chercher M^{-1} sous la forme $M^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^{\mathrm{T}} & \gamma \end{pmatrix}$.

Indication 4.1.10 À l'aide de manipulations sur les colonnes, montrer que $\det \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A+iB & B \\ -B+iA & A \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A+iB & B \\ 0 & A-iB \end{bmatrix}$ en raisonnant sur les lignes.

Indication 4.1.11 H est le noyau de φ forme linéaire, poser $a_{ij} = \varphi(E_{ij})$ et distinguer des cas.

Indication 4.1.12 Se ramener au cas où $\lambda \neq 0$ puis exprimer les relations obtenues en écrivant A^3 et A^4 de 2 façons différentes.

Indication 4.2.1 Calculs simples, dans la base des P_k la matrice de f est diagonale.

Indication 4.2.2 Toute matrice est équivalente à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où p est le rang.

Indication 4.2.3 $(AB)^2 = AB$: immédiat. Poser ensuite f, g, h les applications linéaires de matrices A, B, C et raisonner avec.

Indication 4.3.1 $\mathrm{Rg}(A) = 2$ (raisonner sur les colonnes).

Indication 4.3.2 Utiliser (et démontrer) que toute matrice est équivalente à une matrice de la forme $J_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication 4.3.3 Écrire $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$.

Indication 4.3.4 Écrire $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$ et exprimer B à l'aide de Q. Pour la réciproque, utiliser les applications linéaires associées.

Indication 4.4.1 Faire intervenir $s = x_1 + \cdots + x_n$.

Indication 4.4.2 Résoudre le système associé.

Indication 4.4.3 On utilise les P.I.L. et on obtient $H^{-1} = (h'_{ij})$ où $h'_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{i+j-1}\frac{(n+i-1)!(n+j-1)!}{(n-i)!(i-1)!^2(n-j)!(j-1)!^2}$. On remarque que, pour $n = 4$, les coefficients sont entiers ce qui se justifie en exprimant h'_{ij} avec des coefficients binomiaux.

Indication 5.1.1 On compte le nombre de (a, b, c, d) tels que $ad - bc = 0$ ce qui nous donne le nombre de matrices non inversibles. On peut faire plus simplement avec les familles libres.

Indication 5.1.2 On trouve l'identité.

Indication 5.1.3 On trouve soit l'identité, soit un 3-cycle, soit le produit de deux 3-cycles. Calculer ensuite $c_1 \circ c_2 \circ c_1^{-1}$ où c_1 et c_2 sont des 3-cycles.

Indication 5.1.4 On compte le nombre d'inversions, il y en a $I(\sigma) = \sum\limits_{r=1}^{p}(a_r - r)$.

Indication 5.2.1 Montrer par récurrence que $A_n = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i$ où $\beta_0 = \prod_{k=1}^{n} b_k$, $\beta_i = \prod_{k\neq i} b_k$.

Indication 5.2.2 $A_n = 0$ si $n \geqslant 3$ car les colonnes sont liées.

Indication 5.2.3 On trouve la relation $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2}$.

Indication 5.2.4 Plusieurs méthodes pour arriver à ce résultat, on fait de toutes façons une récurrence et on peut utiliser le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{n-1}(X - x_i) = X^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2}\lambda_j X^j$ et utiliser une combinaison linéaire des lignes.

Indication 5.2.5 Poser $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i\neq j}\delta_{ij}$ et montrer que Δ est n-linéaire alternée.

Indication 5.2.6 Faire intervenir l'expression de la comatrice d'une matrice d'ordre 3 et trouve un système équivalent à $\operatorname{com}(M) = A$.

2. Solutions

Solution 1.1.1

(1) Évident, on a une famille de polynômes de degré étagés (donc libre) contenant 3 éléments (cf corollaire 2.11 sur la caractérisation d'une base page 40).

(2) Soient R_1 et R_2 2 éléments de $E(P)$, alors $R_i = PM_i - Q_i(X^3+1)$, donc :
$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = P(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) - (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)(X^3+1) \in E(P).$$

(3) On remarque que : $R \in E(S) \Leftrightarrow S|R$ et $R \in E(T) \Leftrightarrow T|R$; puis on décompose la fraction rationnelle :
$$\frac{R}{X^3+1} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}$$
ce qui donne : $R = a(X^2-X+1) + (bX+c)(X+1) = R_1 + R_2$ où $R_1 \in E(T)$ et $R_2 \in E(S)$. $R \in E(T) \cap E(S) \Leftrightarrow X^3+1|R \Leftrightarrow R = 0$ et enfin : $\dim E(T) = 1$, $\dim E(S) = 2$.

Solution 1.1.2

(1) Soit E' le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f continues sur $[x_1, x_n]$ telles que $f_{|[x_i,x_{i+1}]}$ soit affine par morceaux.
f est déterminée de manière unique par la donnée des $f(x_i)$, en effet
$$f_{|[x_{i-1},x_i]} = f(x_{i-1})\frac{x - x_{i-1}}{h_i} + f(x_i)\frac{x_i - x}{h_i}$$
où $h_i = x_i - x_{i-1}$ permet de connaître f sur $[x_1, x_n]$.
Soit $\varphi\ : f \in E' \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n)) \in \mathbb{R}^n$. φ est une application linéaire de E' dans $\mathbb{R}^n$ et on vient de voir que l'on pouvait définir l'application $\psi\ : (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto f \in E'$ où f est la seule fonction de E' vérifiant $f(x_i) = y_i$. On a évidemment $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{E'}$ donc φ est un isomorphisme et $\dim E' = n$.
Soit $I\ : (f, a) \in E' \times \mathbb{R} \mapsto g \in E$ où $g(x) = a + \displaystyle\int_{x_1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Il est facile de vérifier que I est un isomorphisme (d'application réciproque $D\ : g \in E \mapsto (g', g(x_1))$) et donc que $\dim E = n + 1$.

Remarque : une base de E est donnée par : $(f_i)_{i \in [0,n]}$ où pour $i \in [1, n]$, $f_i'(x_j) = \delta_{ij}$, $f_i(x_i) = 0$ et $f_0(x_1) = 1$, $f_0'(x_i) = 0$.
On peut aussi prendre comme base la famille $(g_1, h_1, f_i)_{i \geqslant 1}$ où
$$g_1(x) = 1,\ h_1(x) = x - x_1,\ f_i = \left[(x - x_i)^+\right]^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant x_i \\ (x - x_i)^2 & \text{si } x > x_i \end{cases}.$$

(2) Pour l'autre question, on procède de même en intégrant une fonction de E et en redéfinissant les applications I et D.

Solution 1.1.3 Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de $F \cap G$ que l'on complète par les familles $(e_{p+1}, \dots, e_q)$ et $(e_{q+1}, \dots, e_r)$ pour obtenir des bases de F et G ; on complète enfin $(e_1, \dots, e_r)$ par $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ pour obtenir une base de E (on utilise ici le fameux théorème de la base incomplète corollaire 2.6 page 39).
Alors $X = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{q-p}, e_{r+1}, \dots, e_n)$ où $\varepsilon_i = e_{p+i} + e_{q+i}$ satisfait les conditions $E = F \oplus X = G \oplus X$.
On pouvait aussi raisonner par récurrence descendante sur $r = \dim F = \dim G$.

Solution 1.1.4

(1) Les inclusions $F + (G \cap H) \subset F + G$ et $F + (G \cap H) \subset F + H$ sont immédiates donc $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$.
Comme $F \subset G$ alors $F+G = G$ donc $(F+G)\cap(F+H) = G\cap(F+H)$. Si $x \in G\cap(F+H)$ alors $x = y + z$ avec $x \in G$, $y \in F$ et $z \in H$. $z = x - y \in G$ donc $z \in G \cap H$ d'où $x \in F+(G\cap H)$ ce qui donne l'inclusion dans l'autre sens $(F+G)\cap(F+H) \subset F+(G\cap H)$ et l'égalité.

(2) Vu la formulation de la question, la réponse est NON. Prendre par exemple pour E le plan vectoriel, F, G, H 3 droites distinctes. $G \cap H = \{0\}$, $F + G = F + H = E$ et $F + (G \cap H) = F \neq (F + G) \cap (F + H) = E$.

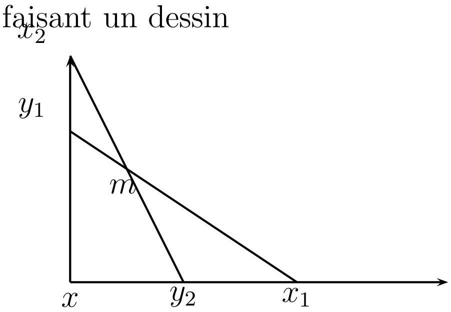
Solution 1.1.5

(1) On pose $F = \displaystyle\bigcup_{i \in I} F_i$.
- $F \neq \emptyset$ car il contient au moins un sous-espace vectoriel de E.
- Soit $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors il existe $i \in I$ tel que $x \in F_i$ et $\lambda x \in F_i \subset F$.
- Soit maintenant x et y dans F, $x \in F_i$ et $y \in F_j$ alors on sait qu'il existe $k \in I$ tel que $F_i \cup F_j \subset F_k$ et $x + y \in F_k \subset F$.

(2) Il suffit de prendre $E = \mathbb{K}[X]$ et $F_i = \mathbb{K}_i[X]$.

Solution 1.2.1 On fait un raisonnement par l'absurde : on suppose que $\Gamma_1 \cap C_2$ est non vide, soit $y_2 = tx_1 + (1-t)x \in C_2$, de même pour $\Gamma_2 \cap C_1$, soit $y_1 = t'x_2 + (1-t')x \in C_1$ où $x_i \in C_i$. Alors les segments (dans le plan affine) $[x_1, y_1]$ et $[x_2, y_2]$ se coupent (prendre un repère $(x, \overrightarrow{xx_1}, \overrightarrow{xx_2})$ et écrire les équations de droites).
En effet
- si x, x_1, x_2 sont alignés alors $[x_1, y_1] \cap [x_2, y_2] \neq \emptyset$ (on est ramené à une droite et on distingue les différents cas),
- si x, x_1, x_2 sont non alignés, comme $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ alors $y_2 \neq x_1$ et $y_1 \neq x_2$. On a alors $y_1 \begin{pmatrix} 0 \\ t_1 \end{pmatrix}$ et $y_2 \begin{pmatrix} t_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  L'équation de la droite (x_1, y_1) est $X + \dfrac{Y}{t_1} = 1$.
  L'équation de la droite (x_2, y_2) est $\dfrac{X}{t_2} + Y = 1$
  d'où, en cherchant l'intersection de ces deux droites, on trouve
$$X = \frac{t_2(1-t_1)}{1-t_1t_2}, \quad Y = \frac{t_1(1-t_2)}{1-t_1t_2}.$$
  $X > 0$ et $Y > 0$ soit, en faisant un dessin



  les segments se coupent bien en un point m. Or le segment $[x_1, y_1]$ est contenu dans C_1 et $[x_2, y_2]$ est contenu dans C_2. m appartient donc à $C_1 \cap C_2$ ce qui contredit l'hypothèse C_1 et C_2 disjoints et assure le résultat en dimension 2.

En dimension quelconque, la situation décrite ci-dessus ne fait intervenir qu'une figure plane, le raisonnement reste donc valable.

Solution 1.2.2

(1) Soit $(a,b) \in \Gamma^2$, $t \in [0,1]$ alors $ta + (1-t)b \in \Gamma$ ($t \geqslant 0$ et $(1-t) \geqslant 0$) donc Γ est convexe.
On vérifie ensuite que, si $a \in F$, $-a \in F$, puis, si $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $c = \lambda a + \mu b \in F$. Si λ ou μ ne sont tous deux positifs, on remplace a ou b par $-a$ ou $-b$. On a bien prouvé que F est un espace vectoriel.
Enfin, si $(a,b) \in \Gamma'^2$ (où $\Gamma' = \Gamma \setminus F$), et si $c = ta + (1-t)b$, $t \in]0,1[$. $c \in \Gamma$ et si $c \in F$ alors $c \in \Gamma^-$ et comme $b = t'c + (1-t')(-a)$ (où $t' = \dfrac{1}{1-t}$) alors $b \in \Gamma^-$ ce qui est contradictoire ($b \notin F$ donc $b \notin \Gamma^-$).
Conclusion : $c \notin F$, $\Gamma \setminus F$ est bien convexe.

(2) Supposons que $\Gamma \subset H_+$, alors $\Gamma^- \subset H_-$ d'où $F = \Gamma \cap \Gamma^- \subset H_+ \cap H_- = H$.
Soit H strictement latéral : $H \cap \Gamma = F$, raisonnons par l'absurde ; prenons $a \in \Gamma \cap H_+^*$ et $b \in \Gamma \cap H_-^*$. Comme $\varphi(a) > 0$ et $\varphi(b) < 0$ alors $t = \dfrac{\varphi(a)B - \varphi(b)a}{\varphi(a) - \varphi(b)} \in \Gamma \setminus F$ et $\varphi(t) = 0 \Rightarrow t \in F$. On a donc une contradiction et en conclusion : $\Gamma \subset H_+^*$ ou $\Gamma \subset H_-^*$ c.q.f.d.

(3) Soit $(a_1, \ldots, a_p)$ des générateurs de Γ, on les note $(x_1, \ldots, x_l)$ s'ils sont dans H_+^*, $(y_1, \ldots, y_m)$ s'ils sont dans H_-^* et $(z_1, \ldots, z_n)$ s'ils sont dans H avec $l + m + n = p$.
Pour $x \in \Gamma$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j + \sum_{k=1}^{n} \nu_k z_k$.
On va exprimer $x' = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$ en fonction des $v_{ij} = \varphi(x_i)y_j - \varphi(y_j)x_i$ et comme les $v_{ij} \in H$ on pourra conclure.
$\varphi(x) = \varphi(x') = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \varphi(x_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \varphi(y_j) = 0$ et en posant $\omega = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \varphi(x_i) = -\sum_{j=1}^{m} \mu_j \varphi(y_j) \geqslant 0$, on vérifie aisément que

$$\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j v_{ij} = \omega x'.$$

Si $\omega = 0$ alors $\lambda_i = \mu_j = 0$ pour tout (i,j), donc $x \in H$,
Si $\omega > 0$ alors x' s'écrit comme combinaison linéaire positive des v_{ij}.
Dans tous les cas, x est combinaison linéaire positive des vecteurs (z_k) et (v_{ij}).
On a bien trouvé une famille finie de générateurs de $\Gamma \cap H$ ($\Gamma \cap H$ est bien un cône convexe comme intersection de cônes convexes).

Solution 1.2.3 (1) Un système de coordonnées barycentriques de p dans la base affine (a,b,c) est $(0, \overline{pc}, -\overline{pb})$, de même pour les points q et r.
On sait alors que les points p, q, r sont alignés ssi $\begin{vmatrix} 0 & -\overline{qc} & \overline{rb} \\ \overline{pc} & 0 & -\overline{ra} \\ -\overline{pb} & \overline{qa} & 0 \end{vmatrix} = 0.$
On développe alors le déterminant et on trouve la C.N.S. annoncée (ce résultat est connu sous le nom de théorème de Ménélaüs.

(2) Soit $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$ une équation barycentrique de D_{ap} alors, en exprimant que D_{ap} passe par a et p, on obtient $\overline{pb}\beta + \overline{pc}\gamma = 0$ comme équation pour cette droite. On

procède là aussi de même pour les deux autres droites.
On exprime enfin que les 3 droites appartiennent à un même faisceau ssi

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{qa} & \overline{ra} \\ \overline{pb} & 0 & \overline{rb} \\ \overline{pc} & \overline{qc} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne le résultat en développant.

Solution 1.2.4

Grâce à l'exercice 1.2.3, on a $\dfrac{\overline{pb}}{\overline{pc}} = -\dfrac{\overline{qa}}{\overline{qc}}.\dfrac{\overline{rb}}{\overline{ra}} = -\dfrac{\overline{sb}}{\overline{sc}}$.

On a donc $\dfrac{\overline{pb}}{\overline{pc}} + \dfrac{\overline{sb}}{\overline{sc}} = 0$.

Solution 1.3.1 En composant par f et f^2 on obtient : $(1+a^3)x = u - af(u) + a^2f^2(u)$ d'où

- si $a \neq -1$: $x = \dfrac{u - af(u) + a^2f^2(u)}{a^3+1}$. Solution unique car $\mathrm{Ker}(af + \mathrm{Id}) = \{0\}$ (en effet, si $af(x) = -x$ alors par composition $a^3f^3(x) = a^3x = -x$ et donc $x = 0$).
- Si $a = -1$ et si $u + f(u) + f^2(u) \neq 0$: pas de solution.
- Si $a = -1$ et si $u + f(u) + f^2(u) = 0$: alors $x = \dfrac{2u + f(u)}{3} + y$ où $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. La solution particulière s'obtient formellement par passage à la limite quand $a \to -1$ et on vérifie a posteriori qu'elle convient (ceci peut servir à d'autres occasions car il est plus facile de faire une démonstration lorsque l'on sait ce que l'on veut démontrer !).

On a utilisé ici la proposition 2.2.10 page 49 qui précise l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

Solution 1.3.2 On remarque tout d'abord les choses suivantes : $\mathrm{Ker}(g\circ f) \supset \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$, les 2 questions proposées sont donc équivalentes à

$$\mathrm{Ker}(g\circ f) \subset \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\} \text{ et } \mathrm{Im}(g\circ f) \supset \mathrm{Im}\, g \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im}\, f = E.$$

(1) $(\Rightarrow)$ si $\mathrm{Ker}(g\circ f) \subset \mathrm{Ker}\, f$, soit $y \in \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f$. On écrit $y = f(x)$ et $(g\circ f)(x) = 0$ donc $f(x) = 0$ soit $y = 0$.
$(\Leftarrow)$ si $\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$ alors, pour $x \in \mathrm{Ker}(g\circ f)$ alors $f(x) \in \mathrm{Ker}\, g$ i.e. $f(x) \in \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$ donc $x \in \mathrm{Ker}\, f$.

(2) $(\Rightarrow)$ si $\mathrm{Im}(g\circ f) \supset \mathrm{Im}\, g$, soit $y \in E$, $g(y) \in \mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}(g\circ f)$ donc $g(y) = g(f(x))$ soit $y - f(x) \in \mathrm{Ker}\, g$ i.e. $E \subset \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im}\, f$ (et donc on a égalité).
$(\Leftarrow)$ si $E = \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im}\, f$ alors soit $t \in \mathrm{Im}\, g$, $t = g(z)$. On écrit $z = x + y$ (où $(x,y) \in \mathrm{Im}\, f \times \mathrm{Ker}\, g$). On a donc $z = f(u) + y$ donc $t = g\circ f(u) + g(y) = g\circ f(u)$ car $g(y) = 0$. Finalement $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}(g\circ f)$.

Solution 1.3.3

(1) Le sens direct est immédiat.
Réciproque : $g\circ f$ est injective donc f est injective, $f\circ g$ est surjective donc f est surjective. f est bijective, il en est de même pour g.
Remarque : la linéarité n'intervient pas ici.

(2) Posons $h = (\mathrm{Id}_E - f\circ g)^{-1}$, on a $h\circ(\mathrm{Id}_E - f\circ g) = (\mathrm{Id}_E - f\circ g)\circ h = \mathrm{Id}_E$ donc $h\circ f\circ g = f\circ g\circ h = \mathrm{Id}_E$.

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_E - g\circ f)\circ(\mathrm{Id}_E + g\circ h\circ f) &= \mathrm{Id}_E - g\circ f + g\circ h\circ f - g\circ f\circ g\circ h\circ f \\ &= \mathrm{Id}_E - g\circ f + g\circ(h - \mathrm{Id})\circ f = \mathrm{Id} - E.\end{aligned}$$

On vérifie de même que $(\mathrm{Id}_E + g\circ h\circ f)\circ(\mathrm{Id}_E - g\circ f) = \mathrm{Id}$.

Solution 1.3.4

(1) On va montrer que la C.N.S. est $p\circ q = q\circ p = 0$.

($\Leftarrow$) $(p+q)^2 = p^2 + p\circ q + q\circ q + q^2 = p+q$ donc $p+q$ est un projecteur.

($\Rightarrow$) En faisant le même calcul que ci-dessus, on obtient tout d'abord $p\circ q = -q\circ p$. Ensuite on a

$$\begin{aligned} p\circ q &= p\circ(p\circ q) = -p\circ(q\circ p)\\ &= -(p\circ q)\circ p = q\circ p \end{aligned}$$

donc $p\circ q = q\circ p = 0$.

(2) On va prouver que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\,p + \mathrm{Im}\,q$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\,p\cap\mathrm{Ker}\,q$, i.e. $p+q$ est le projecteur sur $\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,p\cap\mathrm{Ker}\,q$.

- On a évidemment $\mathrm{Im}(p+q)\subset\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$. Soit $z = p(x)+q(y)\in\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$ alors $p(z) = p^2(x) = p(x)$ et $q(z) = q^2(y) = q(y)$ donc $z = p(z)+q(z)\in\mathrm{Im}(p+q)$.
  De même, il est évident que $\mathrm{Ker}\,p\cap\mathrm{Ker}\,q\subset\mathrm{Ker}(p+q)$. Si $p(x)+q(x) = 0$ alors, en composant par p, on a $p^2(x) = p(x) = 0$ i.e. $x\in\mathrm{Ker}\,p$. On a aussi $x\in\mathrm{Ker}\,q$.

Solution 1.3.5

- P et Q sont évidemment des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
- Soit $f\in P\cap Q$ alors $f = u\circ p = v\circ q$ d'où

$$\begin{aligned} f &= u\circ p = u\circ p^2 = (u\circ p)\circ p\\ &= (v\circ q)\circ p = 0 \end{aligned}$$

  donc $P\cap Q = \{0\}$.
- Si $f\in\mathcal{L}(E)$ alors $f = f\circ(p+q) = f\circ p + f\circ q\in P+Q$.

Conclusion : $P\oplus Q = \mathcal{L}(E)$.

Solution 1.3.6

(1) r est un projecteur. En effet

$$\begin{aligned} r^2 &= p^2 + q^2 + \underbrace{(q\circ p)^2}_{=0} + p\circ q + q\circ p - \underbrace{p\circ(q\circ p)}_{=0} - \underbrace{(q\circ p)\circ p}_{=q\circ p} - \underbrace{q\circ(q\circ p)}_{=q\circ p} - \underbrace{(q\circ p)\circ q}_{=0}\\ &= p + q - q\circ p = r. \end{aligned}$$

(2) $\mathrm{Im}\,r\subset\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,q$, montrons l'égalité :
soit $z = p(x)+q(y)$ alors $p(z) = p^2(x) = p(x)$ et $q(z) = q\circ p(x) + q(y)$ donc $q(y) = q(z) - q\circ p(x) = q(z) - q\circ p(z)$ soit $z = p(z) + q(z) - q\circ p(z)\in\mathrm{Im}\,r$.
$\mathrm{Ker}\,r\supset\mathrm{Ker}\,p\cap\mathrm{Ker}\,q$, montrons là aussi l'égalité :
si $p(x)+q(x)-q\circ p(x) = 0$ alors, en appliquant p on a $p(x) = 0$ puis $q(x) = 0$ c.q.f.d.

Solution 2.1.1 On a évidemment : $f_i\in\mathrm{Vect}(\sin,\cos)$ et $\mathrm{Rg}(f_1,f_2,f_3) = 2$ car les f_i ne sont pas liées deux à deux.

Solution 2.1.2

(1) On utilise l'unicité de la décomposition d'une fraction rationnelle :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-a_i x} = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0$$

(2) Soit I un ensemble d'indices fini contenu dans $\mathbb{R}^2$ alors on peut trouver J et K familles finies d'éléments de $\mathbb{R}$ telles que $I \subset J\times K$. On va donc prouver que $\sum_{(j,k)\in J\times K} \lambda_{j,k} e^{a_j x + b_k y} = 0 \Rightarrow \lambda_{j,k} = 0$.
On démontre pour cela que la famille $f_a\ : x \mapsto e^{ax}$ est une famille libre :
On procède par récurrence sur n nombre d'éléments de cette famille :
- $n = 1$ immédiat.
- On suppose donc que toute sous-famille à n éléments est libre, soit $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j e^{a_j x} = 0$ où on a rangé les a_j dans l'ordre croissant, on met $e^{a_{n+1}x}$ en facteur et on prend la limite en $+\infty$, on obtient $\lambda_{n+1} = 0$ puis $\lambda_i = 0$ en appliquant l'hypothèse de récurrence.

Effectivement, on peut généraliser au cas des familles f_a, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ définies par $f_a(x) = e^{(a|x)}$ où $(a|x) = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i$ produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^p$ en utilisant là encore l'ordre lexicographique dans $\mathbb{R}^p$.

(3) C'est la même chose qu'en 2 en écrivant $f_{(a,b)}(x,y) = e^{a\ln x + b \ln y}$.

Solution 2.2.1 On remarque tout de suite que $f_1(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) - f_4(x)$ et que $f_2(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) + f_4(x)$, donc $\dim F \leqslant 2$. Il n'est pas difficile alors de prouver que (f_3, f_4) est libre.

Solution 2.2.2 Soit $\varphi\ : x \in E \mapsto f_x \in \mathcal{A}(E)$ fonction constante définie par $f_x(u) = x$. φ est un isomorphisme donc, par transfert, $\mathcal{A}(E)$ est un espace vectoriel de dimension n.

Solution 2.2.3

(1) La famille $(1, x, y, x^2, xy, y^2, x^2y, xy^2, x^2y^2)$ est génératrice, montrons qu'elle est libre : soit

$$a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{2,2}x^2y^2 = 0.$$

Relation que l'on peut écrire $A_0(y) + A_1(y)x + A_2(y)x^2 = 0$. Cette égalité étant vraie pour tout x, on en déduit que $A_0(y) = 0$, $A_1(y) = 0$ et $A_2(y) = 0$. Comme les $A_i(y)$ sont des polynômes identiquement nuls ce sont des polynômes nuls d'où la nullité des $a_{i,j}$.
Conclusion : $\dim E = 9$.

(2) Si $f(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{2,2}x^2y^2$ alors $u(f)(x,y) = a_{1,1} + 2a_{2,1}x + 2a_{1,2}y + 4a_{2,2}xy \in E$. La dérivation étant linéaire on peut alors affirmer que u est linéaire.
$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(1, x, y, xy)$ et $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(1, x, y, x^2, y^2)$.

Solution 2.3.1 On écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{Rg}(f)+\mathrm{Rg}(g) &= \dim f(E)+\dim g(E) \geqslant \dim(f(E)+g(E)) \\ &\geqslant \dim[(f+g)(E)] \geqslant n \qquad ((1))\end{aligned}$$

(car $f+g \in \mathrm{GL}(E)$). Puis $f\circ g = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Im} g$ d'où $n-\mathrm{Rg}(f) \geqslant \mathrm{Rg}(g)$ i.e. $\mathrm{Rg}(f)+\mathrm{Rg}(g) \leqslant n$ d'où l'égalité.

Remarque : si f est bijective et si $g=-f$ alors $(f+g)(E)=\{0\}$ et $f(E)+g(E)=E$ donc on a bien inégalité dans la relation (1).

Solution 2.3.2

(1) Si $y = x - g(f(x))$ alors $y \in \operatorname{Ker} f$ et $x = g(f(x)) + y$ d'où $E = \operatorname{Im} g + \operatorname{Ker} f$.
Si $x \in \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f$ alors $\exists y \in F\ : x = g(y)$ et $f(g(y)) = 0$ et donc

$$g\circ f\circ g(y) = g(y) = x = 0.$$

On a bien $E = \operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Ker} f$.

(2) On a de même : $F = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$ et avec les dimensions : $\mathrm{Rg}\, f = \mathrm{Rg}\, g$ (on utilise le théorème 2.16 page 41).

Solution 2.3.3

($\Rightarrow$) $\mathrm{Rg}(g\circ f) = \dim(g(f(E))) = \dim g(E) = \mathrm{Rg}\, g$ (car f surjective).
$\mathrm{Rg}(f\circ g) = \dim(f(g(E)) = \dim g(E) = \mathrm{Rg}\, g$ (car f injective). On a donc égalité des rangs.

($\Leftarrow$) Supposons f non surjective, posons $F = \operatorname{Im} f$ alors il existe H, hyperplan tel que $F \subset H$ (on utilise le théorème de la base incomplète corollaire 2.6 page 39)pour compléter une base F et on prend pour H l'espace vectoriel engendré par $n-1$ vecteurs, en prenant les vecteurs de la base de F). Soit $\alpha \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{Ker}\alpha = H$ et $c \in E$ tel que $f(c) \neq 0$. Si on définit g par $g(x) = \alpha(x)c$ alors $g\circ f = 0$ et $\mathrm{Rg}\, f\circ g = 1$. Par contraposée, on en déduit que f est surjective.

Comme E est de dimension finie alors f est bijective (cf proposition 2.1.9 page 42).

Solution 2.3.4

Soit $n = \dim E$ et $p = \mathrm{Rg}(f)$, $q = \mathrm{Rg}(f^2)$. On a $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$, soit $(e_1,\dots,e_{n-p})$ une base de $\operatorname{Ker} f$ que l'on complète en $(e_1,\dots,e_{n-p},\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{p-q})$ pour avoir une base de $\operatorname{Ker} f^2$.

- Montrons que la famille $(f(\varepsilon_1),\dots,f(\varepsilon_{p-q}))$ est libre. Si $\sum\limits_{i=1}^{p-q}\lambda_i f(\varepsilon_i) = 0$ alors $\sum\limits_{i=1}^{p-q}\lambda_i\varepsilon_i \in \operatorname{Ker} f$ donc il existe des μ_j tels que $\sum\limits_{i=1}^{p-q}\lambda_i\varepsilon_i = \sum\limits_{j=1}^{n-p}\mu_j e_j$ et comme la famille est libre, alors $\forall i \in [\![1,p-q]\!]$, $\lambda_i = 0$ ce qui permet de conclure.
- On a ainsi $((f(\varepsilon_i)))$ qui est une famille libre d'éléments de $\operatorname{Ker} f$ donc $p-q \leqslant n-p$ d'où $\dim\operatorname{Ker} f^2 = n-q = (n-p)+(p-q) \leqslant 2(n-p)$.

Remarque : on pouvait prendre $p = \dim\operatorname{Ker} f$ comme paramètre.

Solution 2.3.5

- $E \subset f(E)+g(E) \subset E$ donc $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
- $\dim E = \mathrm{Rg}(f)+\mathrm{Rg}(g) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$ et comme $\mathrm{Rg}(f)+\mathrm{Rg}(g) \leqslant \dim E$ alors $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$.

- Soit $x \in E$, $f(g(x)) \in \operatorname{Im} f$ et $f(g(x)) = f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = (\operatorname{Id} - f) \circ f(x) = g \circ f(x) \in \operatorname{Im} g$ donc $f(g(x)) = g(f(x)) = 0$ ce qui donne immédiatement $f^2 = f$ et, par symétrie, $g^2 = g$.

Solution 2.3.6

(1) Égalité quasi-immédiate, $x \in \operatorname{Ker}(g_{|\operatorname{Im} f}) \Leftrightarrow (g(x) = 0,\ x \in \operatorname{Im} f) \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

(2) On applique la formule du rang à l'application linéaire $h = g_{|\operatorname{Im} f} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} f, G)$ d'où $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{Rg} h + \dim \operatorname{Ker} h = \operatorname{Rg}(g \circ f) + \dim(\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f)$.

(3) $\dim(\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f) = \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} f = \dim F - \operatorname{Rg} g + \dim \operatorname{Im} f$ donc $\dim(\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f) = \dim F - \operatorname{Rg} g + [\dim \operatorname{Im} f - \dim(\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f)] \leqslant \dim F - \operatorname{Rg} g$.
Conclusion : $\operatorname{Rg}(g \circ f) \geqslant \operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) - \dim F$.

Solution 2.3.7 On fait la remarque préalable suivante : $(f+g)(E) \subset f(E) + g(E)$ donc

$$\operatorname{Rg}(f+g) \leqslant \dim(f(E) + g(E)) = \operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g).$$

$\Rightarrow$ Vu la remarque, on a immédiatement $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$ et $\dim(f+g)(E) = \dim f(E) + \dim g(E)$ donc $(f+g)(E) = f(E) + g(E)$.
Ensuite, si $x \in E$ alors $f(x) \in (f+g)(E)$ donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = (f+g)(y)$ donc $g(y) = f(x-y) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$ i.e. $g(y) = 0 = f(x-y)$ et, en écrivant que $x = (x-y) + y$ on a bien $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.

$\Leftarrow$ Soit $y \in \operatorname{Im} f$, $y = f(x)$ et, en écrivant $x = z + t \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ alors $y = f(t) = f(t) + g(t) = (f+g)(t) \in (f+g)(E)$ donc $f(E) \subset (f+g)(E)$. Par symétrie, $g(E) \subset (f+g)(E)$ donc $f(E) + g(E) \subset (f+g)(E)$ et comme la somme $f(E) + g(E)$ est directe on a $f(E) \oplus g(E) \subset (f+g)(E)$. L'inclusion dans l'autre sens étant évidente, on a $f(E) \oplus g(E) = (f+g)(E)$ soit $\operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) = \operatorname{Rg}(f+g)$.

Solution 3.1.1 On écrit $P = P(a)A + P'(b)B + P''(c)C$ et on applique ceci à $P = 1$, $P = X - a$ et $P = (X-b)^2$ d'où $A = 1$, $B = (X-a)$ et $C = \dfrac{1}{2}[(X-b)^2 - (a-b)^2]$.

Solution 3.1.2 Par une récurrence immédiate, on arrive à

$$\Delta^n P(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k) = 0$$

et, en remplaçant X par 1, on obtient

$$P(n+1) = -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} r^{k+1} = r[r^n - (r-1)^n].$$

Remarque : pour obtenir la première formule, on peut écrire $\Delta = \tau - \operatorname{Id}$ où $\tau(P)(X) = P(X+1)$. τ et Id sont des éléments de l'algèbre des endomorphismes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton qui donne

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \tau^k$$

qui fournit le résultat attendu car $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$.

Solution 3.2.1

(1) Si on étudie la suite de réels $p_0 = 1$, $p_1 = -x$, $p_{n+2} + xp_{n+1} + p_n = 0$, on trouve :

$$p_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}\delta}\left[(x+\delta)^{n+1} - (x-\delta)^{n+1}\right]$$

(pour $x \neq \pm 2$) où $\delta \in \mathbb{C}$ est tel que $\delta^2 = x^2 - 4$. En développant, on va trouver : $P_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n+1}{2k+1}X^{n-2k}(X^2-4)^k$ et on vérifie que cette formule est encore vraie pour $x = \pm 2$.

(2) Si on pose $x = 2\cos\theta$, $\delta = 2i\sin\theta$ et $P_n(2\cos\theta) = (-1)^n\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ d'où

$$x_k = 2\cos\frac{k\pi}{n+1},\ \ k \in [1, n].$$

Comme $\deg P_n = n$ et que l'on trouve exactement n racines, on a bien toutes les racines de P_n.

Solution 3.2.2

(1) On cherche la racine sous la forme a/b où $a|3$ et $b|2$, d'où : $P(X) = (2X-3)(X^2+X+1)$.

(2) Racines de P' : $d = \dfrac{1+\sqrt{7}}{6}$ et $e = \dfrac{1-\sqrt{7}}{6}$ et $-\dfrac{1}{2} < e < d < \dfrac{3}{2}$ c.q.f.d.

(3) L'ellipse $\mathcal{E}$ de foyer D et E a pour équation :

$$\frac{(x-1/6)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ où } c = \sqrt{a^2-b^2} = \frac{\sqrt{7}}{6}.$$

Avec $B(j)$, $C(j^2)$, comme BC est tangente à $\mathcal{E}$ alors, par raison de symétrie, $\mathcal{E}$ admet $(-1/2, 0)$ comme sommet (faire un dessin), donc : $\mathcal{E}$: $\dfrac{9}{4}(x-1/6)^2 + 4y^2 - 1 = 0$. La droite $A(3/2)B(j)$ s'écrit : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-3/2) + 2y = 0$, elle rencontre $\mathcal{E}$ en un seul point $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Solution 3.2.3 (Ceci est un cas particulier de la théorie du *résultant*)

($\Rightarrow$) Si λ est la racine commune alors $P = (X-\lambda)(lX+m)$ et $Q = (X-\lambda)(nX+p)$ d'où la relation

$$(nX+p)P - (lX+m)Q = 0$$

donc P, XP, Q, XQ sont linéairement dépendants c.q.f.d. (ici on sait que $l = \alpha$ et $n = \beta$).

($\Leftarrow$) On peut écrire la relation ci-dessus et on distingue les cas

- $n = 0$ alors, en raisonnant sur les degrés, on a aussi $l = 0$, les deux polynômes P et Q sont proportionnels, ils ont donc une racine commune. De même si $l = 0$, on a $n = 0$.
- $n.l \neq 0$ alors $(nX+p)P = (lX+q)Q = R$. R a trois racines dont deux sont zéros de P donc Q admet la même racine que P.

Solution 3.2.4 Les sommes ont bien une justification car elles sont finies pour tout polynôme ($D^{n+1}P = 0$ pour tout polynôme P de degré $\leqslant n$ et il en est de même de $\Delta^{n+1}P$ car $\deg \Delta P \leqslant \deg P - 1$).
La première formule n'est autre que la formule de Taylor pour les polynômes (cf théorème 1.20 page 32).
Pour la deuxième formule, on s'intéresse à la base de Hilbert $e_p = \dfrac{X(X-1)(\ldots)(X-p+1)}{p!}$.
On remarque que $\Delta e_p = e_{p-1}$. On calcule ensuite $De_p(i)$ pour $i \in [0,p]$, de même pour l'autre membre. Comme on a égalité (après des calculs un peu laborieux) on peut alors écrire $\Delta = \exp D - \mathrm{Id}$ et $D = \ln(\mathrm{Id} + \Delta)$.
On pouvait aussi poser $L = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n$ et prouver par récurrence le résultat

$$(L_p) \qquad \deg P \leqslant p,\ L(P) = P'.$$

On vérifie que $L(P) = P'$ pour $P \in \{0, 1, X\}$ donc (L_0) et (L_1) sont acquis.
Montrons alors le résultat par récurrence sur p. On suppose la propriété vraie pour tout polynôme de degré $\leqslant p$.
Si $P \in \mathbb{R}_{p+1}[X]$ alors, comme D et Δ commutent,

$$\begin{aligned}\Delta(D(P)) = D(\underbrace{\Delta P}_{\in \mathbb{R}_p[X]}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^{n+1}(P)\\ &= \Delta\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n(P)\right).\end{aligned}$$

On a donc $D(P) - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n(P) \in \operatorname{Ker}\Delta$ i.e. cette différence est une constante que l'on note C_p. Si on écrit $P = a_{p+1}X^{p+1} + Q$, $\deg Q \leqslant p$, alors, comme la propriété est vérifiée pour Q, $C_P = C_{X^{p+1}}$ (si $a_{p+1} \neq 0$). Cette constante est aussi égale à $C_{e_{p+1}}$. On calcule alors $D(e_{p+1})(0)$:

$$D(e_{p+1})(0) = \frac{(-1)^{p+1}}{p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \underbrace{\Delta^n(e_{p+1})}_{=e_{p+1-n}}(0)$$

car 0 est racine de e_k si $k \neq 0$. La constante est bien nulle ce qui prouve la récurrence.
Conclusion : l'interprétation attendue est la suivante : $\Delta = \exp(D) - \mathrm{Id}$ et $D = \ln(\mathrm{Id} + \Delta)$ qui sont bien des fonctions réciproques l'une de l'autre lorsque l'on prend des variables réelles.

Solution 3.2.5 $Q(X) = \prod\limits_{i=1}^{4}(X - \lambda_i)$ est normalisé, il divise donc le polynôme $P - 7$ dans $\mathbb{Z}[X]$.
En effet, l'algorithme de division euclidienne ne fait pas intervenir de quotient dans $\mathbb{Q}$.
On peut donc écrire $P = Q.S + 7$ où S est un polynôme à coefficients entiers.
L'équation $P(n) = 14$ s'écrit donc $S(n)\prod\limits_{i=1}^{4}(n - \lambda_i) = 7$
7 aurait 4 diviseurs distincts, ce qui est impossible.

Solution 3.2.6 Si on note $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$ alors $P'(z_1) = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)$, il suffit donc de prouver que si $A = \sum\limits_{i=1}^{3} z_i P'(z_i) = 0$ alors $B = \sum\limits_{i=1}^{3} z_i [P'(z_i)]^2 = 0$.
Si on développe $P(X)$ sous la forme $X^3 - aX^2 - bX - c$ (avec $a = z_1 + z_2 + z_3$, $b = -(z_1 z_2 +$

$z_2z_3 + z_3z_1)$, $c = z_1z_2z_3)$ alors $z_iP'(z_i) = 3z_i^3 - 2az_i^2 - bz_i = az_i^2 + 2bz_i + 3c$. Comme $\sum_{i=1}^{3} z_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} z_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} z_iz_j = a^2 + 2b$ alors

$$A = a\sum_{i=1}^{3} z_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{3} z_i + 9c = a^3 + 4ab + 9c.$$

De même, on calcule B et on trouve $B = (a^2 + 3b)A$ d'où l'implication recherchée.
Sur $\mathbb{C}$, la réciproque est fausse, en effet, $a = b = 0$ et $c = -1$ donne $z_1 = -1$, $z_2 = -j$, $z_3 = -j^2$, $A = 9$ et $B = 0$.
Remarque : si $a^2 + 3b = 0$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P'(X) = \dfrac{1}{3}(3X - a)^2$, les racines de P ne sont pas toutes réelles et simples, dans ce cas, l'implication réciproque est assurée.

Solution 3.2.7 Posons $Q(x) = \displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$ alors la relation s'écrit

$$\Delta Q(k) = k + 1$$

(avec $\Delta Q(X) = Q(X+1) - Q(X)$). Cette relation étant vraie pour tout k, on a $\Delta Q(X) = X + 1$.

Δ et la dérivation étant permutable, on en déduit que $\Delta P(X) = 1$ i.e. $P(X) = X + a$. Après calculs, on trouve $a = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion : l'ensemble des polynômes cherché est réduit au seul polynôme

$$P(X) = X + \frac{1}{2}.$$

Solution 3.2.8

(1) $\deg P = n$ et $P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = e^{2i(\alpha + k\pi)/n}(x+1) = \rho(x+1)$ $\rho \neq 1$ car $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow$ $x = \dfrac{1+\rho}{1-\rho} = i\cot\left(\dfrac{\alpha + k\pi}{n}\right)$, $k \in [0, n-1]$ c.q.f.d.

(2) Le produit des racines vaut $\dfrac{1 - (-1)^n e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}}$ (relations entre coefficients et racines). On pose $x = \dfrac{\alpha}{n} \Rightarrow \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cot(x + \tfrac{k\pi}{n}) = \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{si } n = 2p \\ (-1)^{(n-1)/2}\operatorname{cotan} nx & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$

Solution 3.2.9 Si P est non constant, on appelle A l'ensemble de ses racines.

Si $a \in A$ alors $(a-1)^2$ et $(a+1)^2$ appartiennent à A car : $P[(X+1)^2] = P(X+2)P(X)$ et $P[(X-1)^2] = P(X)P(X-2)$.

Soit a tel que $|a| = \sup\limits_{b \in A} |b|$ (borne atteinte car on est sur un ensemble fini) alors $4|a| = |(a+1)^2 - (a-1)^2| \leqslant |a+1|^2 + |a-1|^2 \Rightarrow |a+1|^2 > |a|$ ou $|a-1|^2 > |a|$ contradiction, donc $P = 0$ ou $P = 1$.

Solution 3.2.10

(1) On pose $y = x + \dfrac{a}{3}$ alors $y^3 = x^3 + ax^2 + \dfrac{a^2}{9}x + \dfrac{a^3}{27}$. $x^3 + ax^2 + bx + c = y^3 + R(x)$ où $R(x)$ est un polynôme du premier degré en x qui va donc s'écrire $R'(y) = py + q$. On remplace alors y par x.

(2) Si on remplace x par $u+v$ dans (1) on obtient

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=0$$

d'où $u^3+v^3=-q$ et $u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}$ (en tenant compte de la relation $uv=-\dfrac{p}{3}$).

u^3 et v^3 sont bien les racines de l'équation $U^2+qU-\dfrac{p^3}{27}=0$.

(3) On résout alors cette équation du second degré, on choisira u racine cubique d'une racine et v par la relation $3uv=-p$. On vérifie alors que

$$x_1=u+v,\ x_2=uj+vj^2,\ x_3=uj^2+vj$$

sont racines de (1).

(4) Dans le cas qui nous préoccupe on a $u^3=-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$ d'où les trois solutions

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,j+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,j^2$$

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,j^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,j$$

qui fournit les trois racines distinctes de (1).

Remarque : on sait que si $\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{27}\right)^3=0$ alors l'équation (1) a une racine double (au moins) et que c'est une C.N.S. (cf question (*iv*) page 33). Ces formules sont connues sous le nom de formules de Cardan publiées pour la première fois en 1545.

Solution 3.2.11 On a $A=BQ+R$ où

$$Q=X^2-\alpha X+b-\beta+\alpha^2 \text{ et } R=(c+2\alpha\beta-\alpha b-\alpha^3)X+d-\beta d+\beta^2-\alpha^2\beta.$$

La C.N.S. cherchée est $R=0$, soit $c+2\alpha\beta-\alpha b-\alpha^3=0$ et $d-\beta d+\beta^2-\alpha^2\beta$. Le cas $\alpha=0$ est à écarter car $bc\neq 0$ et la première égalité ne serait pas satisfaite. À l'aide de la première relation, on exprime β en fonction de α que l'on reporte dans la deuxième pour obtenir $\alpha^6+2b\alpha^4+(b^2-4d)\alpha^2-c^2=0$.

Ce résultat nous permet de factoriser A en un produit de 2 polynômes moyennant la résolution d'une équation du $3^{\text{ième}}$ degré. Ceci permet de ramener la résolution d'une équation du quatrième degré sous forme réduite à la résolution d'une équation du troisième degré en α^2 et à la résolution de deux équations du second degré.

Solution 3.3.1

(1) On utilise le théorème de Rolle. Soient $x_1<x_2<\ldots<x_p$ les racines de P et m_i leur ordre de multiplicité. Alors d'une part P' s'annule sur chaque intervalle ouvert $]x_i,x_{i+1}[$ en un point que l'on note y_i. D'autre part, les racines x_i sont des racines d'ordre m_i-1 de P' (ceci marche même si $m_i=1$) donc on trouve $n-1$ racines de P' avec leur ordre de multiplicité car $\sum\limits_{i=1}^{p}(m_i-1)=\sum\limits_{i=1}^{p}m_i-p=n-p$ et on a $p-1$ zéros simples à rajouter qui sont les y_i.

On a bien toutes les racines de P' qui sont réelles.

(2) Si P est scindé alors $P^{(j-1)}$ l'est aussi pour tout $j \in [1, n-1]$. Le problème ici est de dégager une propriété des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$.
Si Q est un polynôme scindé alors $\dfrac{Q'}{Q} = \sum\limits_{k=1}^{q} \dfrac{1}{X - y_k}$ où les y_k désignent les racines, éventuellement multiples de Q (on utilise une version de la proposition 1.5.11 page 36).
On dérive une autre fois, $\dfrac{Q''Q - Q'^2}{Q^2} = -\sum\limits_{k=1}^{q} \dfrac{1}{(X - y_k)^2}$ donc on peut dire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $Q(t)Q''(t) - Q'(t)^2 \leqslant 0$ (pour $t = y_k$, on obtient ce résultat par continuité.
Appliquons ceci au polynôme $Q = P^{(j-1)}$ pour $t = 0$.

$$Q = (j-1)!a_{j-1} + j!a_j X + \frac{(j+1)!}{2} X^2 + \cdots .$$

On a $Q(0) = (j-1)!a_{j-1}$, $Q'(0) = j!a_j$ et $Q''(0) = (j+1)!a_{j+1}$. En simplifiant par $(j-1)!^2$ la relation annoncée, on arrive à : $(j+1)a_{j-1}a_{j+1} \leqslant j a_j^2$, inégalité incompatible avec l'hypothèse $a_j^2 < a_{j-1}a_{j+1}$.

Solution 3.3.2 Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de P et $p_1 = x_1x_2 = 6$ alors $p_2 = x_3x_4 = 3$, $s_1 + s_2 = 5$, $s_1s_2 = 9 - (p_1 + p_2) = 0$, $3s_1 + 6s_2 = 15$ (en utilisant les fonctions symétriques élémentaires cf définition 1.5.13 page 33).

On obtient alors $s_1 = 5$, $s_2 = 0$ et en conclusion 2, 3, $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ sont les solutions.

Solution 3.4.1

(1) Si $Q = 0$ alors $P^2 = 1$. On écarte ce cas par la suite.
(1) $\Rightarrow$ P et Q sont étrangers ; en dérivant : $PP' = (XQ + (X^2 - 1)Q')Q$ on arrive à $Q|P'$ (on applique le théorème de Gauss cf théorème 1.13 page 29 et le commentaire page 35 après la définition1.5.17).
Si $\deg P = n$ alors $\deg Q = n - 1$ ($n > 0$) donc P' et Q sont proportionnels ; en examinant les termes de plus haut degré dans (1), on obtient : $Q^2 = \dfrac{1}{n^2} P'^2$.

(2) On remplace Q^2 par $\dfrac{P'^2}{n^2}$ et on simplifie par P' après dérivation :
en effet, on a $P^2 + (1 - X^2)\dfrac{1}{n^2} P'^2 = 1$ et, en dérivant, on obtient

$$P'[n^2 P + (1 - X^2)P'' - XP'] = 0$$

et comme $P' \neq 0$, on peut simplifier.

(3) On vérifie que T_n est un polynôme. En effet, avec la formule de trigonométrie

$$\cos n\theta = 2\cos\theta \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

T_n vérifie la relation de récurrence $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ pour $x \in [-1, 1]$. $T_n(x)$ est une fonction polynomiale (récurrence évidente) et comme un polynôme est défini d'une manière unique par une infinité de valeurs alors la définition est bien cohérente.
Le calcul montre que T_n vérifie (2) :

$$\frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}x} = \frac{-n}{\sqrt{1-x^2}} \sin n\theta, \quad \frac{\mathrm{d}^2 T_n}{\mathrm{d}x^2} = \frac{n^2}{1-x^2}\cos n\theta - \frac{nx}{(1-x^2)^{3/2}} \sin n\theta$$

et on remplace dans l'équation.
On vérifie alors que, si P est un polynôme non nul, solution de (2) alors $\deg P = n$ (on regarde les coefficients de plus haut degré) et donc, si λ est choisi pour que $P - \lambda T_n$ soit de degré $\leqslant n - 1$ alors $P - \lambda T_n = 0$. Les solutions polynomiales de (2) forment ainsi une droite vectorielle.

Les solutions de (1) (si elles existent) sont de la forme $(\lambda T_n, \frac{\lambda\varepsilon}{n}T'_n)$ (on a raisonné par conditions nécessaires) or

$$\underbrace{T_n^2(x)}_{=\cos^2 nx} + \underbrace{(1-x^2)\frac{1}{n^2}T'_n(x)^2}_{=\sin^2 nx} = 1$$

donc l'ensemble des solutions est donné par les couples : $(\varepsilon T_n, \dfrac{\varepsilon\varepsilon'}{n}T'_n)$ $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon, 0)$ où $\varepsilon = \pm 1$ et $\varepsilon' = \pm 1$.

Solution 3.4.2

(1) On vérifie que : $Q = X^{2m-2} + \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}X^{2m-3} + \cdots + \dfrac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}X^{2m-k} + \cdots + \dfrac{\sin m\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin(m-1)\theta}{\sin\theta}X^{m-2} - \cdots - \dfrac{\sin(m-k-1)\theta}{\sin\theta}X^{m-k} - \cdots + 1$ (après récurrences et calculs) et $R = 0$.
Si $\cos\theta = 1$: $F_{m,\theta} = (X^m-1)^2 \Rightarrow Q = (X^{m-1} + \cdots + 1)^2$.
Si $\cos\theta = -1$: $Q = (X^{m-1} - X^{m-2} + \cdots + (-1)^{m-1})^2$.

(2) Si on pose $d = m \wedge n$ alors $F_{m,\theta} \wedge F_{n,\theta} = F_{d,\theta}$. En effet, $F_{d,\theta}$ divise $F_{m,\theta}$ (remplacer X par X^d et θ par $d\theta$ dans le calcul ci-dessus) et $F_{d,\theta}$ (pour les mêmes raisons) divise $F_{n,\theta}$.
Si on suppose que $\dfrac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ alors les racines de $F_{m,\theta}$ sont les $e^{\pm i(\theta + \frac{2k\pi}{m})}$, $k \in [0, m-1]$. Les racines communes à $F_{m,\theta}$ et $F_{n,\theta}$ vérifient $\exp i(\theta + \frac{2k\pi}{m}) = \exp i(\theta + \frac{2k'\pi}{n})$ soit $\dfrac{k}{m} = \dfrac{k'}{n}$ car les arguments sont dans l'intervalle $[\theta, \theta + 2\pi[$. On déduit alors que $\dfrac{k}{m} = \dfrac{k'}{d}$ ce qui donne effectivement une racine de $F_{d,\theta}$ donc $F_{d,\theta}$ est un multiple du p.g.c.d. et en conclusion, $F_{d,\theta}$ est le p.g.c.d.

Solution 3.4.3

(1) On trouve : $U = X^3 - X^2 - 5X + 7$ et $V = -X^3 + X^2 + 4X - 5$.

(2) On cherche un polynôme F tel que $F = R_1 + KP = R_2 + LQ$ où $R_1 = X^2 + X + 1$ et $R_2 = 2X^2 - 3$; $F = R_2 + (R_1 - R_2)VQ$ répond à la question. Pour avoir le polynôme de degré le plus faible, il suffit ensuite de prendre le reste de la division de F par PQ pour trouver :
$-3X^7 + 5X^6 + 19X^5 - 58X^4 + 5X^3 + 134X^2 - 158X + 57$.

Solution 3.4.4 On a : $P(1) = 0$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$: $P((\exp(i\dfrac{2k\pi}{n}))^n) = 0$ d'où : toutes les racines (simples) de $X^n - 1$ sont racines de $P(X^n)$ et donc $X^n - 1 | P(X^n)$.

Solution 3.5.1 On a : $\dfrac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\alpha_j}{X - a_j}$ (cf proposition 1.5.11 page 36) donc, si $z \in A' \setminus A$, $P'(z) = 0$ et

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{z - a_j} = 0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\bar{z} - \bar{a}_j}{|z - a_j|^2} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j z}{|z - a_j|^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j a_j}{|z - a_j|^2}.$$

Si on choisit $\dfrac{1}{\mu} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{|z-a_j|^2}$ alors, la dernière relation signifie que : $\forall z \in A' \setminus A$, z est barycentre des a_j affectés des coefficients $\dfrac{\mu\alpha_j}{|z-a_j|^2}$ ce qui signifie encore que A' est contenu dans l'enveloppe convexe de A (ce qui était évident pour toutes les racines multiples de P).
Ce résultat est assez remarquable et mérite d'être retenu.

Solution 3.5.2

- Si $n = 2p$, $P(X) = \dfrac{X^{2p}-1}{X^2-1} = 1 + X^2 + \cdots + X^{2p-2}$ donc $F_n(X) = \dfrac{P(X)}{X^n+1}$ et on peut écrire :
$$F_n(X) = \sum_{j=1}^{n} \frac{2\alpha_j}{n(\alpha_j^2-1)} \frac{1}{X-\alpha_j} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(A_j + \bar{A}_j)$$
où $A_j = \dfrac{\alpha_j}{(\alpha_j^2-1)(X-\alpha_j)}$ et en utilisant le fait que α_j est un nombre complexe de module 1 différent de ± 1 : $A_j + \bar{A}_j = \dfrac{1}{(X-\alpha_j)(X-\bar{\alpha}_j)}$.
- Si $n = 2p+1$, $F_n(X) = \dfrac{P(X)}{(X+1)(X^n+1)}$ où $P(X) = 1 + X + \cdots + X^{2p}$, alors :
$$F_n(X) = \frac{A}{(X+1)^2} + \frac{B}{X+1} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2\alpha_j}{n(\alpha_j^2-1)(X-\alpha_j)}.$$
Or $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \frac{2\alpha_j}{n(\alpha_j^2-1)(X-\alpha_j)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(X-\alpha_j)(X-\bar{\alpha}_j)}$ par conséquent $A = \dfrac{1}{n}$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF_n(x) = 0$: $B = 0$.

Autre méthode : on pose $Q_n(X) = \dfrac{X^n-1}{X-1}$, $G_n(X) = (X+1)F_n(X) = \dfrac{Q_n(X)}{X^n+1}$ et $H_n(X) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{X+1}{(X-\alpha_j)(X-\bar{\alpha}_j)}$. On écrit $G_n(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X-\alpha_i}$ et $H_n(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{X-\alpha_i}$. Alors, on vérifie aisément que $x_i = \dfrac{2}{n(1-\bar{\alpha}_i)}$ et $y_i = \dfrac{2}{n}\dfrac{\alpha_i+1}{\bar{\alpha}_i(\alpha_i^2-1)}$ si $\alpha_i \neq 1$. En simplifiant l'expression de y_i, on trouve $y_i = x_i$. Cette deuxième méthode est plus simple, encore fallait-il voir l'astuce ! Dans les deux méthodes, on a utilisé le résultat de la proposition 1.5.10 page 36 qu'il est important de bien retenir.

Solution 3.5.3 On a :
$$\frac{1}{(X+k)(X+k+1)(X+k+2)} = \frac{1}{2(X+k)} - \frac{1}{(X+k+1)} + \frac{1}{2(X+k+2)}$$
d'où
$$\Sigma_n = \frac{1}{2X} - \frac{1}{2(X+1)} - \frac{1}{2(X+n+1)} + \frac{1}{2(X+n+2)}.$$
Remarque : on peut aussi écrire $\dfrac{1}{(X+k)(X+k+1)(X+k+2)} = \dfrac{1}{2(X+k)(X+k+1)} - \dfrac{1}{2(X+k+1)(X+k+2)}$ et là le résultat devient immédiat.

Solution 3.5.4 On décompose la fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$, la dérivation sera plus simple.

$$f(x) = \frac{1}{2i\sin\theta}\left(\frac{1}{x-e^{i\theta}} - \frac{1}{x-e^{-i\theta}}\right)$$

d'où, en dérivant n fois :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i\sin\theta}\left[\frac{1}{(x-e^{i\theta})^{n+1}} - \frac{1}{(x-e^{-i\theta})^{n+1}}\right] = \frac{(-1)^n n! \sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}\sin k\theta}{\sin\theta(x^2-2x+1)^{n+1}}$$

Solution 3.5.5 On décompose la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P(X)}$ en éléments simples et on remplace X par 0 :

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P'(x_i)(X-x_i)}$$

(en utilisant la proposition 1.5.10 page 36).

Solution 3.5.6

(1) On pose $\varphi(X) = (X-Z_i)\varphi_i(X)$ alors

$$\varphi(Z_0) = (Z_0-Z_i)\varphi_i(Z_0) = (Z_0-Z_i)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_i(Z_j) = (Z_0-Z_i)\frac{1}{n}\varphi_i(Z_i).$$

On remarque aussi que $\varphi_i(Z_i) = \varphi'(Z_i)$ donc $\dfrac{x_i\varphi(Z_0)}{\varphi'(Z_i)(Z_0-Z_i)} = \dfrac{x_i}{n}$. On obtient alors

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i\varphi(Z_0)}{\varphi'(Z_i)(Z_0-Z_i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

(2) Soit $\psi(X) = \varphi(X) - \varphi(Z_0) - \dfrac{1}{n}(X-Z_0)\varphi_i(X)$ alors, ψ est de degré n au plus et grâce à la relation établie ci-dessus, $\psi(Z_i) = 0$ pour $i \in [1,n]$ (car $\varphi_i(Z_i) = \varphi'(Z_i)$) donc $\psi = 0$ c.q.f.d.

(3) On dérive la relation ci-dessus, on obtient $(n-1)\varphi'(X) = (X-Z_0)\varphi''(X)$ et si l'on pense aux équations différentielles, on est amené à dériver $F(X) = \dfrac{\varphi'(X)}{(X-Z_0)^{n-1}}$. On trouve immédiatement $F'(X) = 0$ (on a tout fait pour !) donc $F(X) = a \in \mathbb{C}$ et en regardant les termes de plus haut degré on en déduit : $\varphi'(X) = n(X-Z_0)^{n-1}$ d'où $\varphi(X) = \varphi(Z_0) + (X-Z_0)^n$.

(4) On aura nécessairement, vu le c, $(Z_k-Z_0)^n = A \in \mathbb{C}$, donc les Z_k sont de la forme $Z_k = Z_0 + \alpha e^{2ik\pi/n}$ (on prend k de part et d'autre car les Z_k sont distincts et quitte à les renuméroter ...).
Réciproquement : si $Z_k = Z_0 + \alpha e^{2ik\pi/n}$ alors, avec les polynômes $(X-Z_0)^h$, $h \leqslant n-1$ qui forment une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, on vérifie que les Z_k conviennent.
Remarque : en prenant $P(Z) = (Z-Z_0)^k$ on obtenait $\sum\limits_{i=1}^{n}(Z_i-Z_0)^k = 0$ i.e., avec les formules de Newton, on en déduisait que les Z_i étaient racines d'un polynôme $(Z-Z_0)^n - \alpha = 0$.

Solution 4.1.1 Comme $A_nA_p = A_{n+p}$ pour $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$, cet ensemble a une structure de groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$

ATTENTION au cas où $\alpha = 0$ car dans ce cas là, l'élément neutre pour la multiplication est la matrice $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice A est inversible dans G sans l'être dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Solution 4.1.2 La relation demandée est évidente par récurrence.

Si B est *régulière* (i.e. inversible), $\det B \neq 0$ (cf proposition 2.4.9 page 56) et donc, pour tout p de $\mathbb{N}$: $\det A = \det(A + pI)$ ce qui est impossible.

Solution 4.1.3 Il suffit de montrer que, si 2 des 3 matrices sont *régulières*, alors la 3[ième] est nulle ; pour cela, on distingue les différents cas.

- Si A et B sont régulières alors on peut simplifier à droite par AB la relation $ABC = 0$ donc $C = 0$.
- Si A et C sont régulières, on simplifie à droite par A et à gauche par C donc $B = 0$.
- Si B et C sont régulières, on simplifie à gauche par BC.

Le cas général se traite de la même façon, deux au moins des matrices A_i sont singulières.

Solution 4.1.4 On a $(A - bI)(B - aI) = AB - aA - bB + abI = abI$ donc $A - bI$ et $B - aI$ sont des matrices inversibles, inverses l'une de l'autre. On a donc $(B - aI)(A - bI) = abI$ soit $BA = aA + bB = AB$.

Solution 4.1.5 On remarque tout d'abord que $XYX = I_2 \Rightarrow YXYX = Y$ et $YXY = I_2 \Rightarrow YXYX = X$ donc $X = Y$ et les relations proposées sont équivalentes à $X^3 = I_2$.

C'est là que ça devient calculatoire. En effet, on écrit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'où le système de 4 équations

$$\begin{cases} a^3 + 2abc + bcd & = 1 \\ b(a^2 + ad + bc + d^2) & = 0 \\ c(a^2 + ad + bc + d^2) & = 0 \\ abc + 2bcd + d^3 & = 1 \end{cases}$$

- Si $b = c = 0$ alors on a immédiatement $a = 1$ et $d = 1$.
- Si $b \neq 0$ (par exemple) alors on obtient les 3 équations

$$\begin{cases} a^3 + 2abc + bcd & = 1 \\ a^2 + ad + bc + d^2 & = 0 \\ abc + 2bcd + d^3 & = 1 \end{cases}$$

soit, en remplaçant bc donné par la deuxième équation dans les 2 autres, on obtient $bc = -a^2 - ad - d^2$ et $(a + d)^3 = -1$ soit $d = -1 - a$ et $bc = -1 - a - a^2$.

Solution 4.1.6

(1) • $(K, +)$ est évidemment un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- $M^2 = 2M$ donc $E = \dfrac{1}{2}M$ vérifie $E^2 = E$ puis $ME = M$ donc E est l'élément neutre pour la multiplication dans K. L'inverse de xM pour $x \neq 0$ est $\dfrac{1}{4x}M$.
  De cette remarque, on arrive à la conclusion que $(K, +, \times)$ est un corps.

(2) M n'est pas inversible donc $K \setminus \{0\}$ n'est pas contenu dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

Remarque : E est la matrice d'un projecteur, on peut ainsi construire des exemples de corps K à partir de n'importe quel projecteur non nul, différent de l'identité et qui vérifieront la propriété surprenante de prime abord où les matrices inversibles dans K ne le sont pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 4.1.7 Avec la première équation, on obtient $Y = B^{-1}AX$ que l'on reporte dans la seconde $(B - AB^{-1}A)X = I_n$ d'où, si on note $C = (B - AB^{-1}A)^{-1}$, $X = C$ et $Y = B^{-1}AC$.

Solution 4.1.8

- La première idée est de faire le calcul...
- Plus simple : on remarque que $\mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$ donc $AB - BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ donc $(AB - BA)^2 = (a^2 + bc)I_2$ qui commute avec toute matrice C.

Solution 4.1.9 On cherche M^{-1} sous la forme $M^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^{\mathrm{T}} & \gamma \end{pmatrix}$.

On trouve alors $\gamma = S^{-1}$, $\beta = -A^{-1}BS^{-1}$, $\alpha = A^{-1}(I + BS^{-1}B^{\mathrm{T}}A^{-1}$.

Solution 4.1.10 Si on note $C_1, \ldots, C_n, C_{n+1}, \ldots, C_{2n}$ les colonnes, on a :
$\det(C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}, \ldots, C_{2n}) = \det(C_1 + iC_{n+1}, C_2 + iC_{n+2}, \ldots, C_n + iC_{2n}, C_{n+1}, \ldots, C_{2n})$.
Puis, en raisonnant sur les lignes :
$\det(L_1, \ldots, L_n, L_{n+1}, \ldots, L_{2n}) = \det(L_1, \ldots, L_n, L_{n+1} - iL_1, \ldots, L_{2n} - iL_n)$ c.q.f.d.

Solution 4.1.11 On sait que tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire. $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ on pose $a_{ij} = \varphi(E_{ij})$ où (E_{ij}) est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si $I_n \in H$ alors le résultat est acquis.
- Si $I_n \notin H$.
  - S'il existe $k \neq l$ tel que $a_{kl} \neq 0$, on cherche $A \in H$ sous la forme $A = I_n + \alpha E_{kl}$. Il suffit de choisir $\alpha = \dfrac{-\varphi(I_n)}{a_{kl}}$.
  - Si $a_{ij} = 0$ pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$ alors on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$ matrice de permutation. A est inversible et $\varphi(A) = 0$.

Solution 4.1.12 Si $\lambda = 0$ c'est immédiat, on suppose donc $\lambda = 1$ (quitte à remplacer A par A/λ) et on commence par rassembler quelques résultats sur U et V.

- $A^3 = A.A^2 = A^2.A$ donne $U^2 + 2UV + VU + 2V^2 = U^2 + 2VU + UV + 2V^2$ donc $UV = VU$.

- $A^4 = A.A^3 = A^2.A^2$ donne $(U+V)(U+3V) = U^2+4UV+3V^2 = (U+2V)^2 = U^2+4UV+4V^2$ donc $V^2=0$.
- $A^3 = A.A^2$ donne $U+3V = U^2+3UV$. Or $A^2 = U^2+2UV = U+2V$ permet de simplifier $U^2+3UV = U+2V+UV = U+3V$ donc $UV = V$ et $U^2 = U$.

Conclusion : par une récurrence immédiate on a $U^p = U$ et $U^{p-1}V = V$ et, avec la formule du binôme, $A^p = U^p + pU^{p-1}V = U+pV$.
Remarque : on pouvait avoir directement la réponse en faisant une récurrence sur la propriété demandée avec $A^{p+1} = (U+V)(U+pV) = U+(p+1)V$.

Solution 4.2.1 En posant $s = \dfrac{a+b}{2}$ et $p = ab$, on obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} ns & p & & 0 \\ -n & (n-2)s & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & np \\ 0 & & -1 & -ns \end{pmatrix} \text{ dans la base canonique.}$$

On remarque que $f(P_k) = (\frac{n}{2}-k)(a-b)P_k$ donc la matrice de f dans la base des (P_k) est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}((\frac{n}{2}-k)(a-b))$.

Solution 4.2.2 On pose $p = \mathrm{Rg}(u)$, $q = \mathrm{Rg}(v)$, $m = \dim E$, $n = \dim F$.

(1) a) On écrit la matrice de u dans (e) base de E et (ε) base de F telles que $M(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ telles que $M(v) = P\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$.
On a alors
$$P^{-1}M(v) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q.$$
Il suffit alors de choisir g de matrice P^{-1} dans (ε) et d de matrice $\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$ dans (e).

b) On fait de même avec
$$M(v)Q^{-1} = P\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) On reprend le (a) ci-dessus avec $p = q$.

Solution 4.2.3

- On vérifie immédiatement que $(AB)^2 = AB$ donc AB est la matrice d'un projecteur.
- On note $E = \mathbb{R}^2$ de base (e_1, e_2) et $F = \mathbb{R}^3$ de base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Soient f, g et h les applications linéaires canoniquement associées aux matrices A, B, AB. $\mathrm{Ker}\, h = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)$ donc h est un projecteur de rang 2 et $\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Vect}(\underbrace{\varepsilon_1-\varepsilon_2}_{\varepsilon'_1}, \underbrace{\varepsilon_3-\varepsilon_1}_{=\varepsilon'_2})$.
- Montrons que $\mathrm{Rg}\, f = 2$. $f \in \mathcal{L}(E,F)$ donc $\dim E = 2 \Rightarrow \mathrm{Rg}\, f \leqslant 2$. $h = f \circ g$ est de rang 2 donc $\mathrm{Rg}\, f \geqslant \mathrm{Rg}\, h \geqslant 2$. On a bien $\mathrm{Rg}\, f = 2$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, h$, f est injectif.
- Comme f est injectif, $\mathrm{Im}\, h = f(\mathrm{Im}\, g)$ donne $\dim \mathrm{Im}\, g = 2$ i.e. $\mathrm{Rg}\, g = 2$.
- Toujours grâce à l'injectivité de f, $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ i.e. $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, h$. Comme h est un projecteur $\mathrm{Im}\, h$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, h = \mathrm{Ker}\, g$ donc $g_{|\mathrm{Im}\, h}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Im}\, h$ sur E. $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)$ est une base de $\mathrm{Im}\, h$ donc $(g(\varepsilon'_1), g(\varepsilon'_2))$ est une

base de E.
Finalement $g \circ f(g(\varepsilon_i')) = g(h(\varepsilon_i')) = g(\varepsilon_i')$ donc $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Solution 4.3.1 Si on note C_j les colonnes de A_n et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors : $C_{j+1} = C_j + U$ d'où $C_{j+1} = C_1 + jU$ et le rang de A_n est $\leqslant 2$. Comme C_1 et C_2 sont linéairement indépendantes alors le rang de A_n est bien égal à 2.

Solution 4.3.2 $f(I) = 1$ car $f(A) = f(I)f(A)$ et f est non nulle.
On a alors $f(I) = f(A)f(A^{-1}) = 1$ donc, si A est inversible alors $f(A) \neq 0$.
On montre ensuite que $f(0) = 0$ ($f(0) = f(A)f(0)$ et f différente de l'application constante $A \mapsto 1$).
Si A est non inversible, soit $r = \mathrm{Rg}\, A \leqslant n-1$, alors A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c'est une version du théorème 2.25 page 48 où on a permuté les vecteurs colonnes), J_r est nilpotente ($(J_r)^{r+1} = 0$) d'où

$$f(J_r^{p+1}) = 0 = f(J_r)^{p+1}$$

donc $f(J_r) = 0$ et comme $A = PJ_rQ$ alors $f(A) = 0$.
Conclusion : on a bien prouvé l'équivalence demandée.

Solution 4.3.3

($\Rightarrow$) On sait qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$. On prend alors pour $X_1, \ldots, X_r$ les r premières colonnes de P et pour $Y_1^{\mathrm{T}}, \ldots, Y_r^{\mathrm{T}}$ les r premières lignes de Q.

($\Leftarrow$) On complète chacune des 2 familles libres $(X_1, \ldots, X_r)$ et $(Y_1, \ldots, Y_r)$ en 2 bases et on écrit la matrice J de l'application linéaire associée à A dans ces 2 bases, ce qui donne $J = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution 4.3.4

($\Rightarrow$) Posons $r = \mathrm{Rg}(A)$, $r \leqslant s$ alors $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. Il suffit alors de prendre $B = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{p-r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

($\Leftarrow$) Soit a l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ associée à A. Il existe $b \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$ telle que $a \circ b = 0$ donc $\mathrm{Im}\, b \subset \mathrm{Ker}\, a$. Or $\dim \mathrm{Im}\, b \geqslant p - s$ donc $\dim \mathrm{Ker}\, a \geqslant p - s$, comme $p = \mathrm{Rg}(a) + \dim \mathrm{Ker}\, a$ (théorème du rang) alors $\mathrm{Rg}(a) = \mathrm{Rg}(A) \leqslant s$.

Solution 4.4.1 Le déterminant du système est égal à $(\alpha + n - 1)(\alpha - 1)^{n-1}$ (on additionne toutes les lignes dans la première, on met $\alpha + n - 1$ en facteur dans la première ligne puis on soustrait la ligne de 1 ainsi obtenue à toutes les autres lignes. On obtient alors le déterminant d'une matrice triangulaire qui se calcule immédiatement).

- Si $\alpha = 1$ le système n'est possible que si $\beta = 1$.

- Si $\alpha = n-1$ alors, en posant $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, on a : $x_k = \dfrac{1}{n}(s - \beta^{k-1})$ avec $\beta^n = 1$.
- Si $\alpha \notin \{1, 1-n\}$, $s = \dfrac{1}{\alpha+n-1}\dfrac{\beta^n - 1}{\beta - 1}$ et $x_k = \dfrac{\beta^{k-1} - s}{\alpha - 1}$, $\beta = 1$: $x_k = \dfrac{1}{\alpha+n-1}$.

Solution 4.4.2 Le calcul de A^{-1} équivaut à la résolution du système $\sum_{j\neq i} x_j = y_i$; en faisant la somme de toutes ces équations on obtient : $(n-1)\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} y_j$ et, en retranchant $n-1$ fois la i-ème ligne on obtient

$$x_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} y_j - y_i$$

d'où l'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 2-n \end{pmatrix}.$$

Solution 4.4.3 On a $F(X) = \dfrac{Q(X)}{\prod_{j=1}^{n}(X+j-1)}$ où Q est un polynôme de degré $\leqslant n-1$. Le système $HX = Y$ s'écrit $F(i) = y_i$. Or

$$Q(i) = F(i)\prod_{j=1}^{n}(i+j-1) = \frac{(n+i-1)!}{(i-1)!}y_i$$

et $x_j = \dfrac{Q(1-j)}{\prod_{l\neq j}(l-j)} = \dfrac{Q(1-j)(-1)^{j-1}}{(j-1)!(n-j)!}$ (décomposition d'une fraction rationnelle) en utilisant le résultat suivant

$$\prod_{l\neq j}(l-j) = (-1)^{j-1}\underbrace{\prod_{l=1}^{j-1}(j-l)}_{=(j-1)!}\underbrace{\prod_{l=j+1}^{n}(l-j)}_{=(n-j)!}. \tag{1}$$

Pour résoudre le système, il suffit d'avoir l'expression de $Q(1-j)$. Or on connaît les valeurs de $Q(i)$ pour $i \in [1, n]$ donc le recours aux polynômes d'interpolation de Lagrange s'impose (cf définition 2.1.5 page 172). On écrit

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{n} L_i(X)Q(i) \text{ où } L_i(X) = \prod_{l\neq i}\frac{X-l}{i-l}$$

donc $Q(1-j) = \sum_{i=1}^{n} L_i(1-j)Q(i)$ où

$$\begin{aligned} L_i(1-j) &= \prod_{l\neq i}\frac{j+l-1}{l-i} = \frac{\prod_{l=1}^{n}(j+l-1)}{i+j-1}\times\frac{1}{\prod_{l\neq i}(l-i)} \\ &= \frac{1}{i+j-1}\frac{(j+n-1)!}{(j-1)!}\times\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!(n-i)!} \end{aligned}$$

(on a utilisé le résultat (1) en substituant i à j). D'où, en rassemblant tous les résultats obtenus

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!(n-j)!}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+j-1}\frac{(n+j-1)!}{(j-1)!}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!(n-i)!}\frac{(n+i-1)!}{(i-1)!}y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j-1}\frac{(n+i-1)!(n+j-1)!}{(n-i)!(i-1)!^2(n-j)!(j-1)!^2}y_j \end{aligned}$$

si $H^{-1}=(h'_{ij})$ alors

$$h'_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}}{i+j-1}\frac{(n+i-1)!(n+j-1)!}{(n-i)!(i-1)!^2(n-j)!(j-1)!^2}$$

et pour $n=4$, on trouve

$$H^{-1}=\begin{pmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{pmatrix}.$$

On remarque que tous ses coefficients sont entiers et certains sont très importants en valeur absolue. À un ordre plus élevé, la résolution numérique d'un tel système devient très aléatoire. Cette matrice peut servir de bon test pour les algorithmes d'inversion de matrice.

En écrivant

$$\begin{aligned} h'_{ij} &= \frac{(-1)^{i+j}}{i+j-1}\frac{(n+j-1)!(n+i-1)!}{(j-1)!^2(i-1)!^2(n-j)!(n-i)!} \\ &= \frac{(-1)^{i+j}}{i+j-1}\frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}\frac{(n+i-1)!}{(i+j-1)!(n-j)!}(i+j-1) \\ &\times\frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}\frac{(n+j-1)!}{(i+j-1)!(n-i)!}(i+j-1) \\ &= (-1)^{i+j}(i+j-1)\left(\binom{i+j-2}{i-1}\right)^2\times\binom{n+i-1}{i+j-1}\times\binom{n+j-1}{i+j-1}\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

on remarque en effet que les coefficients sont bien entiers.

Solution 5.1.1 Il suffit d'utiliser les propriétés des déterminants pour montrer que G est un groupe multiplicatif.

$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G\Leftrightarrow \det M=ad-bc\neq 0$. Pour compter le nombre d'éléments de G, il suffit de compter le nombre de matrices M telles que $\det M=0$: on trouve $(p-1)^3+4(p-1)^2+4(p-1)+1$ et donc

$$\operatorname{Card} G=p^4-(p-1)^3-4(p-1)^2-4(p-1)-1=(p-1)^2(p+1)p.$$

Remarque : on pouvait aussi calculer le nombre de familles libres à deux éléments dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ ce qui fournit directement le résultat et surtout permet de généraliser le résultat à $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. On a en tout p^2-1 famille libres à un élément (en effet, toute famille réduite à un élément non nul est libre) et pour avoir une famille libre à deux éléments, il suffit de choisir un vecteur non nul (p^2-1 choix) et de compléter par un vecteur non colinéaire au précédent (p^2-p choix car on a exactement p vecteurs colinéaires à un vecteur) ce qui fait $(p^2-1)(p^2-p)$ familles libres à deux éléments.

Solution 5.1.2 On trouve l'identité car u et v sont permutables.

Solution 5.1.3 On trouve soit l'identité, soit un 3-cycle, soit le produit de deux 3-cycles.
On a $(1\,2\,j)\circ(1\,2\,i)\circ(1\,2\,j)^{-1}=(2\,j\,i)$ et $(2\,j\,i)\circ(2\,j\,k)\circ(2\,j\,i)^{-1}=(j\,i\,k)$. On retrouve ainsi tous les 3-cycles en distinguant les cas :
On choisit i le plus petit des entiers i,j,k, puis, quitte à prendre le cycle inverse, on peut s'arranger pour que $i<j<k$.

- Si $i\geqslant 3$ le calcul fait précédemment s'applique.
- Si $i=2$, ça marche aussi.
- Si $i=1$, $j=2$ on retrouve les cycles du départ.
- Si $i=1$, $j\geqslant 3$, alors, $(21j)\circ(21k)\circ(21j)^{-1}=(2jk)$.

Solution 5.1.4 On a $\mathrm{Card}([1,a_r]\cap B)=a_r-r$ pour $r\leqslant p$ car les éléments de B s'intercalent entre les éléments de A et

$$a_r=\mathrm{Card}([1,a_r])=\underbrace{\mathrm{Card}([1,a_r]\cap A)}_{=r}+\mathrm{Card}([1,a_r]\cap B).$$

(c'est encore la relation sur les cardinaux page 18).
Comptons le nombre d'inversions pour un couple (i,j) $i<j$:

- si $(i,j)\in[1,p]^2$, il n'y a pas d'inversion, de même si $(i,j)\in[p+1,n]^2$,
- si $i=r\leqslant p$, $j\geqslant p+1$, on aura autant d'inversions que le nombre d'éléments de B strictement inférieurs à a_r i.e. a_r-r ; si $i=b_s$, on n'aura pas d'inversion, donc $I(\sigma)=\sum\limits_{r=1}^{p}(a_r-r)$ et $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{I(\sigma)}$.

Pour l'exemple on trouve : $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{(n-p)p}$.

Solution 5.2.1 On prouve par récurrence sur n que

$$A_n=\beta_0+\sum_{i=1}^{n}a_i\beta_i$$

où $\beta_0=\prod\limits_{k=1}^{n}b_k$, $\beta_i=\prod\limits_{k\neq i}b_k$.

La propriété est vraie pour $n=2$ (et, par extension, pour $n=1$). En notant $\mathcal{A}_{n-1}$ la matrice de déterminant A_{n-1}, on a, en utilisant la linéarité par rapport à la dernière ligne :

$$A_n=\begin{vmatrix} & & & a_1\\ & \mathcal{A}_{n-1} & & \vdots\\ & & & a_{n-1}\\ a_n & \dots & a_n & a_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} & & & 0\\ & \mathcal{A}_{n-1} & & \vdots\\ & & & 0\\ a_n & \dots & a_n & b_n\end{vmatrix}.$$

On met a_n en facteur dans le premier déterminant et pour $i\leqslant n-1$, on retranche la dernière ligne multipliée par a_i à la $i$ème ligne ce qui donne le déterminant d'une matrice triangulaire. On développe le deuxième déterminant par rapport à la dernière colonne, d'où $A_n=a_n\beta_n+b_nA_{n-1}$ ce qui assure le passage du rang $n-1$ au rang n.

Solution 5.2.2 Si $n \geqslant 3$ alors $A_n = 0$ car, si C_i désigne la $i$ème colonne alors $C_i = \sin\alpha_i \begin{pmatrix}\cos\alpha_1\\ \vdots \\ \cos\alpha_n\end{pmatrix} + \cos\alpha_i \begin{pmatrix}\sin\alpha_1\\ \vdots \\ \sin\alpha_n\end{pmatrix}$ donc les colonnes appartiennent à un espace de dimension 2, elles sont nécessairement liées.
Si $n = 2$ alors un simple calcul donne $\Delta_2 = -\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)$.

Solution 5.2.3 On peut écrire $\Delta_n = \begin{vmatrix}2 & 1 & \dots & 0\\ 3 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 3 & 2\end{vmatrix}$. En développant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2}.$$

Avec $\Delta_1 = 2$ et $\Delta_2 = 1$ on obtient :

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\Im(1 + i\sqrt{2})^{n+1}.$$

Solution 5.2.4 On procède par récurrence sur n.

- Pour $n = 2$, c'est immédiat.
- On suppose la propriété vraie pour $n - 1$, montrons la pour n :
  si on développe le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{n-1}(X - x_i)$ on obtient $P(X) = X^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_j X^j$ et $P(x_i) = 0$ pour $i \leqslant n - 1$. Dans le déterminant de Vandermonde $V(x_1, \dots, x_n)$ on additionne à la dernière ligne la combinaison $\sum_{j=0}^{n-2} \lambda_j L_j$ des $n - 1$ premières lignes (L_j désigne la $j + 1$ème ligne). On a alors

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix}1 & \dots & \dots & 1\\ x_1 & \dots & \dots & x_n\\ \vdots & & & \vdots\\ P(x_1) & \dots & \dots & P(x_n)\end{vmatrix} = P(x_n)V(x_1, \dots, x_{n-1})$$

  (car $P(x_i) = 0$ pour $i \leqslant n - 1$) ce qui achève la récurrence.

Solution 5.2.5 Soit Δ l'application qui à $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fait correspondre $\sum_{i \neq j} \delta_{ij}$.

- Grâce à la linéarité de f et g, Δ est une application n-linéaire.
- Si $x_1 = x_2$ alors $\delta_{ij} = 0$ si i et j ne sont pas dans $\{1, 2\}$, sinon
  - si $j \notin \{1, 2\}$ alors $\delta_{1j} + \delta_{2j} = \det(f(x_1), x_1, \dots) + \det(x_1, f(x_1), \dots) = 0$,
  - $\delta_{12} + \delta_{21} = 0$,
  - de même $\delta_{j1} + \delta_{j2} = 0$.

  Conclusion : Δ est n-linéaire alternée donc $\exists a(f, g) \in \mathbb{K}$ tel que $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = a(f, g)\det(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Calcul de $a(f, g)$: on prend $x_i = e_i$ base canonique de $\mathbb{K}^n$, $A = (a_{ij})$ matrice de f, $B = (b_{ij})$ matrice de g.
  - $\det(e_1, \dots, f(e_i), \dots, e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\det(e_1, \dots, e_k, \dots, e_n) = a_{ii}$ (le vecteur e_k est placé en i-ième position).

– $\delta_{ij} = \det(e_1, \dots, a_{ji}e_j + a_{ii}e_i, \dots, b_{jj}e_j + b_{ij}e_i, \dots, e_n)$ car tous les autres termes sont nuls (répétition d'un même vecteur). On a ainsi $\delta_{ij} = a_{ii}b_{jj} - a_{ji}b_{ij}$.
– On obtient le résultat partiel suivant $a(f,g) = \sum\limits_{i\neq j} a_{ii}b_{jj} - \sum\limits_{i\neq j} a_{ij}b_{ji}$ et, en rajoutant dans les deux sommes les termes $a_{ii}b_{ii}$ on peut réécrire

$$\begin{aligned} a(f,g) &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{ii}b_{jj} - \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{ij}b_{ji} \\ &= \mathrm{Tr}(f)\,\mathrm{Tr}(g) - \mathrm{Tr}(f\circ g). \end{aligned}$$

Solution 5.2.6 On peut penser à l'expression de la comatrice. Soit $M = \begin{pmatrix} x & z & y \\ z & y & x \\ y & x & z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix}$ alors le système est équivalent à $\mathrm{com}\,(M) = A$.

- Si (x,y,z) est solution du système alors

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Rg}(M) = 3 & \Rightarrow \mathrm{Rg}(A) = 3 \\ \mathrm{Rg}(M) = 2 & \Rightarrow \mathrm{Rg}(A) = 1. \\ \mathrm{Rg}(M) \leqslant 1 & \Rightarrow A = 0 \end{array}$$

- $\det A = 3abc - a^3 - b^3 - c^3 = (a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)$ et $\det M = (x+y+z)(xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2)$ et on remarque la correspondance entre A et M. Comme $\det A = \det(\mathrm{com}\,(M) = \det(M)^2 \geqslant 0$, on obtient une première condition pour que le système soit possible $(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2) \geqslant 0$.
Or $2ab+2bc+2ca-2a^2-2b^2-2c^2 = -\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \leqslant 0$ donc
  – soit $a=b=c$, $\mathrm{Rg}(A) \leqslant 2$ et vu le premier point, on a 2 cas
    * $a=b=c=0$, $\mathrm{Rg}(M) \leqslant 1$ est la seule possibilité donc $x=y=z$ est l'unique solution,
    * $a=b=c\neq 0$, $\mathrm{Rg}(A) = 1$ donc $\mathrm{Rg}(M) = 2$, $x+y+z=0$ (on ne peut avoir $xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2 = 0$ sinon $x=y=z$). En additionnant les 3 équations, on obtient $xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2 = 3a$ et, en tenant compte de la relation $x+y+z=0$, ceci donne $x^2+y^2+z^2 = 2a$. Le système n'est possible que si $a>0$ et dans ce cas, les solutions s'obtiennent en prenant l'intersection du plan $x+y+z=0$ et de la sphère $x^2+y^2+z^2=2a$ soit, en posant $r = \dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$, $x = r\cos\theta$, $y = r\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})$, $z = r\cos(\theta+\frac{4\pi}{3})$.
  – Si a, b, c sont distincts alors $a+b+c \leqslant 0$, là encore, on distingue 2 cas
    * $a+b+c=0$, alors $\mathrm{Rg}(A)=2$, le système n'est pas possible,
    * $a+b+c<0$, $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(M) = 3$, dans ce cas $MA = \det M I_3 = \sqrt{\sqrt{A}}I_3$ d'où les solutions $(x,y,z) = \lambda(bc-a^2, ca-b^2, ab-c^2)$ où $\lambda = \pm\sqrt{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}$.
